МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2007

УДК 539.3

© 2007 г. И.И. АРГАТОВ

МЕДЛЕННЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ШТАМПА НА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается динамическая контактная задача о вертикальных движениях абсолютно твердого тела на упругом полупространстве. Предполагается, что область контакта не изменяется во время движения, причем трение под подошвой штампа отсутствует. Приближенное решение задачи строится в предположении, что контактное давление под подошвой штампа изменяется мало за время пробега волны Рэлея на дистанции, равной диаметру площадки контакта. Расчетные формулы получены для случая кругового и эллиптического штампов.

1. Постановка динамической контактной задачи. Рассмотрим динамическую задачу линейной теории упругости о вертикальных движениях абсолютно твердого тела (штампа), находящегося в постоянном контакте с поверхностью упругого (с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) полупространства. Предполагается, что область контакта не изменяется во время движения, причем трение под подошвой штампа отсутствует, а плотный контакт штампа с упругим телом обеспечивается внешними прижимающими нагрузками (в том числе и весом штампа).

Дополнительно сделаем следующее предположение. Будем считать, что контактное давление под штампом изменяется мало за время пробега волны Рэлея на дистанции, равной диаметру площадки контакта. Для того, чтобы формализовать данное предположение, введем в рассмотрение характерное время медленного движения T (например, период в случае периодического характера движения). Тогда в качестве малого параметра можно взять отношение диаметра штампа к величине Tc_3, где c_3 – скорость распространения поверхностной волны.

Итак, пусть $0 < \varepsilon$ – малый безразмерный параметр. Будем считать, что область контакта ω_ε получается сжатием в ε^{-1} раз некоторой фиксированной плоской области ω_1, т.е.

$$\omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \colon \varepsilon^{-1}(x_1, x_2) \in \omega_1\} \tag{1.1}$$

Идея введения растянутых координат $\xi = \varepsilon^{-1}(x_1, x_2)$ широко применяется в методе сращиваемых асимптотических разложений [1].

Потребуем, чтобы диаметр области ω_1 был сопоставим с величиной Tc_3. Для простоты сначала рассмотрим штамп с плоской подошвой. Обозначим через $\delta_0(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ зависящие от времени t заданные вертикальное перемещение штампа и углы поворота штампа относительно осей, проходящих через центр статического давления подошвы штампа и параллельных координатным осям Ox_1 и Ox_2.

Плотность $p(t, x_1, x_2)$ контактных давлений, передаваемых штампом на границу упругого полупространства, согласно решению задачи Лэмба (см., например, [2, 3]) удовлетворяет следующему интегральному уравнению [3, 4]:

$$(D_\varepsilon p)(t, x_1, x_2) = \delta_0(t) - \beta_2(t)x_1 + \beta_1(t)x_2, \quad (x_1, x_2) \in \omega_\varepsilon \tag{1.2}$$

Здесь D_ε – линейный интегральный оператор, действующий по формуле

$$(D_\varepsilon p)(t, x_1, x_2) = \int_0^t \iint_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial(t-\tau)} G_3(t-\tau, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) p(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau \tag{1.3}$$

Через $G_3(t, r)$ обозначено вертикальное перемещение точек поверхности упругого полупространства, вызванное действием единичной сосредоточенной силы, внезапно приложенной к границе в начале координат (с полярным радиусом $r = 0$) в момент времени $t = 0$ и затем сохраняющей свое значение.

При значении коэффициента Пуассона $\nu < 0.263$ справедливо следующее представление [2]:

$$\begin{aligned} G_3(t, r) = T_3(r)\Big[&\frac{1}{2}H\Big(t-\frac{r}{c_1}\Big)+\frac{1}{2}H\Big(t-\frac{r}{c_2}\Big)+ \\ &+ f_{12}\Big(\frac{c_2 t}{r}\Big)H\Big(r-\frac{r}{c_1}\Big)H\Big(\frac{r}{c_2}-t\Big) - f_{23}\Big(\frac{c_2 t}{r}\Big)H\Big(r-\frac{r}{c_2}\Big)H\Big(\frac{r}{c_3}-t\Big)\Big] \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь и далее $H(t)$ – функция Хевисайда, c_1 и c_2 – скорости волн растяжения и сдвига, c_3 – скорость волн Рэлея, $T_3(r) = \vartheta r^{-1}$ – вертикальное смещение точек поверхности упругого полупространства в задаче Буссинеска, $\vartheta = (\pi E)^{-1}(1-\nu^2)$, $f_{12}(x)$ и $f_{23}(x)$ – заданные функции, зависящие от коэффициента Пуассона, причем последняя при $t \to (r/c_3) - 0$ имеет интегрируемую особенность:

$$f_{23}\Big(\frac{c_2 t}{r}\Big) = 2q_3\Big(\gamma^2 - \frac{c_2^2 t^2}{r^2}\Big)^{-1/2} \tag{1.5}$$

При $\nu = 1/4$ согласно решению Пекериса [5] имеем

$$f_{12}(x) = -q_1(x^2-p_1)^{-1/2} + q_2(x^2-p_2)^{-1/2} - q_3(\gamma^2-x^2)^{-1/2} \tag{1.6}$$

$$q_1 = \sqrt{3}/12, \quad q_2 = \sqrt{3\sqrt{3}-5}/12, \quad q_3 = \sqrt{3\sqrt{3}+5}/12, \quad p_1 = 1/4, \quad p_2 = (3-\sqrt{3})/4$$

$$\gamma = \sqrt{3+\sqrt{3}}/2, \quad \beta = \sqrt{3}, \quad \beta = c_1/c_2, \quad \gamma = c_2/c_3$$

Заметим, что в осесимметричной задаче правая часть уравнения (1.2) является функцией только полярного радиуса r и не зависит от полярного угла φ, так что его решение обладает этим же свойством. При этом в двойном интеграле в (1.3) можно произвести интегрирование по переменной φ, как это сделано в работе [6].

Уравнение (1.2) должно снабжаться начальными условиями, определяющими положение и скорость штампа при $t = 0$. В предположении, что упругое полупространство в начальный момент времени находилось в недеформированном состоянии, когда $p(0, x_1, x_2) \equiv 0$, можно положить $\delta_0(0) = \beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$ и $\dot\delta_0(0) = \dot\beta_1(0) = \dot\beta_2(0) = 0$. Однако развиваемый ниже метод приближенного решения рассматриваемой динамической контактной задачи не позволяет описать начальный этап движения, существенно зависящий от начальных условий.

Осесимметричная динамическая задача для кругового штампа рассматривалась во многих работах. Было построено [7] приближенное решение на начальном этапе (при $0 \le t < c_1^{-1} a$, где a – радиус штампа). Методом асимптотически эквивалентных функций получено [8, 9] приближенное выражение для контактной реакции, из которого сделан вывод, что выход на статическое решение возможен после того, как продольная волна пробежит характерный размер штампа (для кругового штампа, равный 4/3 радиуса его подошвы). В работах [10, 11] было построено приближенное решение, пригодное в любой момент времени. Метод построения асимптотики решения при больших значениях времени был предложен в работе [12]. В [13] была найдена асимптотика решения для малых значений времени внедрения штампа в упругое полупространство.

Решение задачи о вертикальной вибрации кругового штампа на границе упругого полупространства различными методами было дано в работах [14–16]. В [17–19] изучен случай наклонных колебаний кругового штампа. Вертикальные движения штампа, движущегося равномерно вдоль поверхности упругого полупространства, рассматривались в [22].

Случай вибрации кругового штампа относительно малого радиуса на упругой слоистой среде рассмотрен в работе [20]. В [21] был предложен метод приближенного решения задачи о вибрации на упругой среде (упругий слой, упругое полупространство, пакет упругих слоев) штампа, занимающего в плане произвольную область.

В настоящей работе строится приближенное решение задачи нестационарной динамической контактной задачи для штампа, занимающего в плане произвольную фиксированную область, в предположении, что контактное давление под подошвой штампа изменяется мало за время пробега волны Рэлея на дистанции, равной диаметру площадки контакта. Получаемые ниже асимптотические разложения аналогичны разложениям [12, 13] для больших значений времени. Соответственно, асимптотические разложения в случае установившихся колебаний с частотой ω соответствуют разложениям [16, 17, 19] для кругового штампа радиуса a, полученным при малых значениях параметра динамичности $\omega a/c_2$. Основной результат работы можно сформулировать следующим образом. Решение задачи о медленных движениях штампа сведено к решению интегрального уравнения соответствующей квазистатической контактной задачи. Подчеркнем, что при таком подходе не удается корректно описать начальный этап движения, как и этапы скачкообразного (импульсивного) нагружения штампа.

2. Выделение квазистатического решения. Интегрируя в (1.3) по частям, получаем

$$(D_\varepsilon p)(t, x_1, x_2) = \iint\limits_{\omega_\varepsilon} G_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)p(0, \mathbf{y})d\mathbf{y} + \iint\limits_{\omega_\varepsilon} G_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{2.1}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} G_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y}) &= \int_0^t G_3(t-\tau, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\frac{\partial p}{\partial \tau}(t, \mathbf{y})d\tau = \\ &= -\int_0^t G_3(t-\tau, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\frac{\partial p}{\partial \tau}(t-\tau, \mathbf{y})d\tau \end{aligned} \tag{2.2}$$

Положим

$$G_3(t, r) = T_3(r) + g_3(t, r) \tag{2.3}$$

Подстановка выражения (2.3) в (2.2) дает

$$\begin{aligned} G_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y}) &= T_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)[p(t, \mathbf{y}) - p(0, \mathbf{y})] + \\ &+ g_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

При этом формула (2.1) приобретает вид

$$(D_\varepsilon p)(t,x_1,x_2) = \iint\limits_{\omega_\varepsilon} g_3(t,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)p(0,\mathbf{y})d\mathbf{y} + \iint\limits_{\omega_\varepsilon} T_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)p(t,\mathbf{y})d\mathbf{y} + \\ + \iint\limits_{\omega_\varepsilon} g_3(t,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t,\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{2.5}$$

Согласно выражению (1.4) имеем $g_3(t, r) = 0$ при $t > r/c_3$. Поэтому по истечению начального этапа движения первое слагаемое в правой части соотношения (2.5) аннулируется.

3. Расщепление оператора D_ε в ряд по степеням параметра ε. Согласно представлениям (1.4) и (2.3) по истечении определенного промежутка времени с начала движения будет выполняться соотношение

$$-T_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^{-1} g_3(t,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t,\mathbf{y}) = -\int\limits_0^{c_1^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \frac{\partial p}{\partial(t-\tau)}(t-\tau,\mathbf{y})d\tau + \\ + \int\limits_{c_1^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left\{-\frac{1}{2} + f_{12}\left(\frac{c_2\tau}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right)\right\} \frac{\partial p}{\partial(t-\tau)}(t-\tau,\mathbf{y})d\tau - \\ - \int\limits_{c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{c_3^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} f_{23}\left(\frac{c_2\tau}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right) \frac{\partial p}{\partial(t-\tau)}(t-\tau,\mathbf{y})d\tau \tag{3.1}$$

Осуществляя замену переменных интегрирования по формулам $\tau = c_1^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\tau'$ в первом интеграле и $\tau = c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\tau'$ во втором и третьем интегралах суммы (3.1), будем иметь:

$$-T_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^{-1} g_3(t,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t,\mathbf{y}) = -\int\limits_0^1 \frac{\partial p}{\partial \tau'}(t-c_1^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\tau',\mathbf{y})d\tau' + \\ + \int\limits_{\beta^{-1}}^1 \left(-\frac{1}{2} + f_{12}(\tau')\right)\frac{\partial p}{\partial \tau'}(t-c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\tau',\mathbf{y})d\tau' - \\ - \int\limits_1^\gamma f_{23}(\tau')\frac{\partial p}{\partial \tau'}(t-c_2^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\tau',\mathbf{y})d\tau' \tag{3.2}$$

Введем растянутые координаты $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \omega_1$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in \omega_1$ по формулам

$$\xi_i = \varepsilon^{-1}x_i \ (i = 1, 2); \quad \eta_i = \varepsilon^{-1}y_i \ (i = 1, 2) \tag{3.3}$$

Тогда получим

$$\vartheta^{-1}T_3(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = \varepsilon^{-1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^{-1} \tag{3.4}$$

Принимая во внимание соотношение (3.4), представление (3.2) можно преобразовать следующим образом:

$$\vartheta^{-1}c_2g_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = -\beta^{-1}\int_0^1 \frac{\partial p}{\partial t}(t - \varepsilon c_1^{-1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\tau', \mathbf{y})d\tau' +$$

$$+ \int_{\beta^{-1}}^{1}\left(-\frac{1}{2} + f_{12}(\tau')\right)\frac{\partial p}{\partial t}(t - \varepsilon c_2^{-1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\tau', \mathbf{y})d\tau' - \tag{3.5}$$

$$-\int_1^{\gamma} f_{23}(\tau')\frac{\partial p}{\partial t}(t - \varepsilon c_2^{-1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\tau', \mathbf{y})d\tau'$$

Раскладывая подынтегральные функции в (3.5) по степеням параметра ε, находим

$$\vartheta^{-1}c_2g_3(t, |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) * \frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\varepsilon^n\frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^n}{c_2^n n!}\Lambda_n\frac{\partial^{n+1}p}{\partial t^{n+1}}(t, \mathbf{y}) \tag{3.6}$$

$$\Lambda_n = \frac{1+\beta^{-(n+1)}}{2(n+1)} - \int_{\beta^{-1}}^{1} f_{12}(\tau)\tau^n d\tau + \int_1^{\gamma} f_{23}(\tau)\tau^n d\tau \tag{3.7}$$

Таким образом, при $t > c_3^{-1}\varepsilon d$, когда справедливо представление (3.1) и обращается в нуль первое слагаемое в сумме (2.5), на основании разложения (3.6) будем иметь:

$$\vartheta^{-1}(D_\varepsilon p)(t, x_1, x_2) = \varepsilon\iint_{\omega_1}\frac{p(t, \mathbf{y})}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}d\boldsymbol{\eta} - \varepsilon^2\frac{\Lambda_0}{c_2}\iint_{\omega_1}\frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y})d\boldsymbol{\eta} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\varepsilon^{n+2}\frac{\Lambda_n}{c_2^{n+1}n!}\iint_{\omega_1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^n\frac{\partial^{n+1}p}{\partial t^{n+1}}(t, \mathbf{y})d\boldsymbol{\eta} \tag{3.8}$$

или, избавляясь от растянутых координат (3.3):

$$\vartheta^{-1}(D_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \iint_{\omega_\varepsilon}\frac{p(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{y} - \frac{\Lambda_0}{c_2}\iint_{\omega_\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial t}(t, \mathbf{y})d\mathbf{y} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\Lambda_n}{c_2^{n+1}n!}\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n\frac{\partial^{n+1}p}{\partial t^{n+1}}(t, \mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{3.9}$$

Асимптотическое разложение (3.9), или (3.8), позволяет построить приближенное решение исходного интегрального уравнения (1.2).

4. Медленные движения штампа, занимающего в плане произвольную область. Решение уравнения (1.2) представим в виде разложения

$$p(t, \mathbf{x}) = \varepsilon^{-1}p_0(t, \boldsymbol{\xi}) + p_1(t, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon p_2(t, \boldsymbol{\xi}) + \varepsilon^2 p_3(t, \boldsymbol{\xi}) + \ldots \tag{4.1}$$

Подставим разложение (3.8), а затем (4.1) в уравнение (1.2) и приведем подобные. После этого в правой части полученного уравнения перейдем к растянутым координатам (3.3) и приравняем члены при одинаковых степенях параметра ε. В результате такой обычной для метода возмущений процедуры приходим к следующей рекуррентной системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода:

$$(B_1 p_0)(t, \boldsymbol{\xi}) = \delta_0(t) \tag{4.2}$$

$$(B_1 p_1)(t, \boldsymbol{\xi}) = -\beta_2(t)\xi_1 + \beta_1(t)\xi_2 + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta \iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial p_0}{\partial t}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} \tag{4.3}$$

$$\vartheta^{-1}(B_1 p_2)(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\Lambda_0}{c_2}\iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial p_1}{\partial t}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\iint\limits_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\vartheta^{-1}(B_1 p_3)(t, \boldsymbol{\xi}) = {} & \frac{\Lambda_0}{c_2}\iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial p_2}{\partial t}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\iint\limits_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} + \\ & + \frac{\Lambda_2}{2c_2^3}\iint\limits_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2 \frac{\partial^3 p_0}{\partial t^3}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь B_1 – интегральный оператор квазистатической контактной задачи для области контакта ω_1, действующий по формуле

$$(B_1 p_i)(t, \boldsymbol{\xi}) = \vartheta \iint\limits_{\omega_1} \frac{p_i(t, \boldsymbol{\eta})}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} \tag{4.6}$$

Оставшиеся члены разложения (4.1) удовлетворяют интегральному уравнению ($m = 4, 5, \ldots$):

$$\vartheta^{-1}(B_1 p_m)(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-1-k}\Lambda_{m-1-k}}{c_2^{m-k}(m-1-k)!} \iint\limits_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^{m-1-k} \frac{\partial^{m-k} p_k}{\partial t^{m-k}}(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} \tag{4.7}$$

Таким образом, построение членов разложения (4.1) сводится к решению интегрального уравнения квазистатической контактной задачи.

5. Медленные движения кругового штампа. Решения уравнений (4.2) и (4.3) в случае круговой области ω_1 радиуса a_1 получаются немедленно по формулам Буссинеска и [23]:

$$p_0(t, \boldsymbol{\xi}) = \pi^{-2}\vartheta^{-1} \frac{\delta_0(t)}{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \tag{5.1}$$

$$p_1(t, \boldsymbol{\xi}) = \pi^{-2}\vartheta^{-1} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} \left(\frac{2\Lambda_0}{\pi c_2} a_1 \dot{\delta}_0(t) - 2\beta_2(t)\xi_1 + 2\beta_1(t)\xi_2\right) \tag{5.2}$$

Здесь и далее производная по времени обозначается точкой.

Для вычисления второго интеграла в правой части уравнения (4.4) от плотности (5.1) воспользуемся следующим приемом:

$$\iint\limits_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \ddot{p}_0(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \iint\limits_{\omega_1} \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^2 \ddot{p}_0(t, \boldsymbol{\eta})}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|} d\boldsymbol{\eta} \tag{5.3}$$

Нетрудно видеть, что в правой части равенства (5.3) стоит результат действия интегрального оператора (4.6) на функцию

$$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2\ddot{p}_0(t,\boldsymbol{\eta}) = (|\boldsymbol{\xi}|^2-2\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{\eta}|^2)\pi^{-2}\vartheta^{-1}\frac{\ddot{\delta}_0(t)}{\sqrt{a_1^2-|\boldsymbol{\eta}|^2}} \tag{5.4}$$

Теперь интеграл, стоящий в левой части равенства (5.3), легко может быть вычислен при помощи готовых формул [24] (см. также [25], § 1.2.7):

$$\vartheta\iint_{\omega_1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\ddot{p}_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \ddot{\delta}_0(t)\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4}\right) \tag{5.5}$$

Подстановка выражений (5.5) и (5.2) в правую часть уравнения (4.4) дает

$$(B_1p_2)(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{4a_1^2\Lambda_0^2}{\pi^2c_2^2}\ddot{\delta}_0(t)-\frac{\Lambda_1}{c_2^2}\ddot{\delta}_0(t)\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{4}\right)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$p_2(t,\boldsymbol{\xi}) = \pi^{-2}\vartheta^{-1}\frac{\ddot{\delta}_0(t)}{\sqrt{a_1^2-|\boldsymbol{\xi}|^2}}\left(\frac{4a_1^2\Lambda_0^2}{\pi^2c_2^2}-\frac{\Lambda_1}{c_2^2}|\boldsymbol{\xi}|^2\right) \tag{5.6}$$

Наконец, подставим выражения (5.1), (5.2) и (5.6) в правую часть уравнения (4.5). Принимая во внимание четность плотности (5.1), получаем

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2\ddot{p}_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} &= |\boldsymbol{\xi}|^2\iint_{\omega_1}\ddot{p}_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}+\iint_{\omega_1}|\boldsymbol{\eta}|^2\ddot{p}_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} =\\ &= 2\pi^{-1}\vartheta^{-1}a_1\left(|\boldsymbol{\xi}|^2+\frac{2}{3}a_1^2\right)\ddot{\delta}_0(t)\end{aligned} \tag{5.7}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\iint_{\omega_1}p_2(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \pi^{-1}\vartheta^{-1}\frac{8a_1^3}{c_2^2}\left(\frac{\Lambda_0^2}{\pi^2}-\frac{\Lambda_1}{6}\right)\ddot{\delta}_0(t) \tag{5.8}$$

Аналогично (5.4) находим

$$\begin{aligned}\iint_{\omega_1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\ddot{p}_1(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} &= \pi^{-1}\vartheta^{-1}\left\{\frac{a_1^3\Lambda_0}{c_2}\ddot{\delta}_0(t)+\frac{\pi^2a_1^2}{2}(\ddot{\beta}_2(t)\xi_1-\ddot{\beta}_1(t)\xi_2)+\right.\\ &\left.+\frac{a_1\Lambda_0}{2c_2}(\xi_1^2+\xi_2^2)\ddot{\delta}_0(t)-\frac{\pi}{8}(\ddot{\beta}_2(t)\xi_1^3-\ddot{\beta}_1(t)\xi_1^2\xi_2+\ddot{\beta}_2(t)\xi_1\xi_2^2-\ddot{\beta}_1(t)\xi_2^3)\right\}\end{aligned} \tag{5.9}$$

Подстановка выражений (5.7)–(5.9) в правую часть уравнения (4.5) дает

$$\begin{aligned}(B_1p_3)(t,\boldsymbol{\xi}) &= \left(\frac{8\Lambda_0^3}{\pi^3}-\frac{7\Lambda_0\Lambda_1}{3\pi}+\frac{2\Lambda_2}{3\pi}\right)\frac{a_1^3\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^3}-\\ &-\frac{\Lambda_1a_1^2}{2c_2^2}(\ddot{\beta}_2(t)\xi_1-\ddot{\beta}_1(t)\xi_2)+\frac{2\Lambda_2-\Lambda_1\Lambda_0}{2\pi c_2^3}(\xi_1^2+\xi_2^2)a_1\ddot{\delta}_0(t)+\end{aligned}$$

$$+\frac{\Lambda_1}{8c_2^2}(\ddot{\beta}_2(t)\xi_1^3-\ddot{\beta}_1(t)\xi_1^2\xi_2+\ddot{\beta}_2(t)\xi_1\xi_2^2-\ddot{\beta}_1(t)\xi_2^3)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$\begin{gathered}p_3(t,\boldsymbol{\xi}) = \pi^{-2}\vartheta^{-1}\frac{1}{\sqrt{a_1^2-|\boldsymbol{\xi}|^2}}\left\{\frac{2a_1^3}{3\pi c_2^3}\left(\frac{12}{\pi^2}\Lambda_0^3-2\Lambda_0\Lambda_1-2\Lambda_2\right)\dddot{\delta}_0(t)-\right.\\ -\frac{4a_1^2\Lambda_1}{3c_2^2}(\ddot{\beta}_2(t)\xi_1-\ddot{\beta}_1(t)\xi_2)-\frac{2(\Lambda_1\Lambda_0-2\Lambda_2)}{\pi c_2^3}a_1\dddot{\delta}_0(t)(\xi_1^2+\xi_2^2)+\\ \left.+\frac{2\Lambda_1}{3c_2^2}(\ddot{\beta}_2(t)\xi_1^3-\ddot{\beta}_1(t)\xi_1^2\xi_2+\ddot{\beta}_2(t)\xi_1\xi_2^2-\ddot{\beta}_1(t)\xi_2^3)\right\}\end{gathered} \tag{5.10}$$

Практический интерес представляют равнодействующая $F_3(t)$ и моменты $M_1(t)$, $M_2(t)$ контактного давления, определяемые формулами

$$F_3(t) = \iint\limits_{\omega_\varepsilon} p(t,\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \left\{\begin{matrix} M_1(t) \\ -M_2(t)\end{matrix}\right\} = \iint\limits_{\omega_\varepsilon}\left\{\begin{matrix} y_2 \\ -y_1\end{matrix}\right\}p(t,\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{5.11}$$

Подставляя разложение (4.1) в формулы (5.11), получаем

$$\begin{aligned}F_3(t) &= \varepsilon F_3^0(t)+\varepsilon^2F_3^1(t)+\ldots\\ M_i(t) &= \varepsilon^2M_i^0(t)+\varepsilon^3M_i^1(t)+\ldots \ (i=1,2)\end{aligned} \tag{5.12}$$

При этом первые коэффициенты разложений (5.12) согласно полученным выражениям (5.1), (5.2), (5.6) и (5.10) таковы:

$$\begin{gathered}F_3(t) = \vartheta^{-1}\frac{2\varepsilon a_1}{\pi}\left\{\delta_0(t)+\varepsilon\frac{2a_1}{\pi c_2}\Lambda_0\dot{\delta}_0(t)+\varepsilon^2\frac{2a_1^2}{c_2^2}\left(\frac{2}{\pi^2}\Lambda_0^2-\frac{1}{3}\Lambda_1\right)\ddot{\delta}_0(t)+\right.\\ \left.+\varepsilon^3\frac{a_1^3}{c_2^3}\left(\frac{8}{\pi^3}\Lambda_0^3-\frac{8}{3\pi}\Lambda_0\Lambda_1+\frac{4}{3\pi}\Lambda_2\right)\dddot{\delta}_0(t)+O(\varepsilon^4)\right\}\end{gathered} \tag{5.13}$$

$$M_i(t) = \vartheta^{-1}\frac{4\varepsilon^3a_1^3}{3\pi}\left\{\beta_i(t)+\varepsilon^2\frac{2a_1^2}{5c_2^2}\Lambda_1\ddot{\beta}_i(t)+O(\varepsilon^4)\right\} \tag{5.14}$$

Заметим, что первая поправка к квазистатическому решению для силы $F_3(t)$ (см. член $O(\varepsilon)$ в фигурных скобках в (5.13)) была фактически получена в работе [4] другим путем.

6. Асимптотика решения осесимметричной задачи. Пусть подошва штампа, занимающего в плане круговую область ω_ε, изменяется во времени, так что плотность контактных давлений, передаваемых штампом на границу упругого полупространства, определяется из интегрального уравнения

$$(D_\varepsilon p)(t,\mathbf{x}) = w(t,\varepsilon^{-1}|\mathbf{x}|), \quad \mathbf{x}\in\omega_\varepsilon \tag{6.1}$$

Подчеркнем, что форма подошвы штампа (см. правую часть уравнения (6.1)) задается в растянутых координатах. Рассматриваемая задача представляет интерес с точки зрения приложений в задаче о колебаниях упругой пластинки на упругом полупространстве.

Решение уравнения (6.1) будем разыскивать в форме разложения (4.1). Подставляя разложения (3.8) и (4.1) в уравнение (6.1), для первых двух членов разложения (4.1) получаем уравнения

$$(B_1 p_0)(t, \xi) = w(t, |\xi|), \quad \xi \in \omega_1 \tag{6.2}$$

$$(B_1 p_1)(t, \xi) = \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta \iint\limits_{\omega_1} \frac{\partial p_0}{\partial t}(t, \eta) d\eta \tag{6.3}$$

Оставшиеся члены разложения (4.1) удовлетворяют уравнениям (4.4)–(4.7).

Используя решение Леонова – Шуберта – Штаермана [26, 27, 28] (см. также [25], § 1.3), плотность $p_0(t, \xi)$, которая зависит от координат только через полярный радиус $\rho = |\xi|$, представим в виде

$$p_0(t, \xi) = \frac{g_0(t, a_1)}{\pi\sqrt{a_1^2 - \rho^2}} - \frac{1}{\pi}\int_\rho^{a_1} \frac{g_0'(t, s) ds}{\sqrt{s^2 - \rho^2}} \tag{6.4}$$

где функция $g_0(t, \rho)$ определяется через правую часть уравнения (6.2) следующим образом (штрихом обозначается производная по координате):

$$\pi\vartheta g_0(t, \rho) = w(t, 0) + \rho\int_0^\rho \frac{w'(t, x) ds}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \tag{6.5}$$

При этом справедливы соотношения

$$\iint\limits_{\omega_1} p_0(t, \eta) d\eta = 2\pi^{-1}\vartheta^{-1}\int_0^{a_1} \frac{w(t, s) s ds}{\sqrt{a_1^2 - s^2}} \tag{6.6}$$

$$\vartheta\iint\limits_{\omega_1} |\eta| p_0(t, \eta) d\eta = a_1\int_0^{a_1} \frac{w(t, s) s ds}{\sqrt{a_1^2 - s^2}} - \int_0^{a_1} l(a_1, s) w(t, s) s ds \tag{6.7}$$

$$\iint\limits_{\omega_1} |\eta|^2 p_0(t, \eta) d\eta = 4\pi^{-1}\vartheta^{-1}\int_0^{a_1} \frac{w(t, s) s(2s^2 - a_1^2)}{\sqrt{a_1^2 - s^2}} ds \tag{6.8}$$

Здесь введено обозначение

$$l(r, \rho) = \ln\frac{r + \sqrt{r^2 - \rho^2}}{\rho} \tag{6.9}$$

Таким образом, подстановка выражения (6.6) в правую часть уравнения (6.3) приводит к следующему уравнению с правой частью, не зависящей от координат

$$(B_1 p_1)(t, \xi) = \frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\int_0^{a_1} \frac{\dot{w}(t, s) s ds}{\sqrt{a_1^2 - s^2}} \tag{6.10}$$

Решение уравнения (6.10) имеет вид

$$p_1(t,\xi) = \frac{g_1(t,a_1)}{\pi\sqrt{a_1^2-\rho^2}}, \quad g_1(t,a_1) = \pi^{-1}\vartheta^{-1}\frac{2\Lambda_0}{\pi c^2}\int\limits_0^{a_1}\frac{\dot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} \tag{6.11}$$

$$\iint\limits_{\omega_1} p_1(t,\eta)d\eta = 2a_1g_1(t,a_1), \quad \iint\limits_{\omega_1}|\eta|p_1(t,\eta)d\eta = \frac{\pi a_1^2}{2}g_1(t,a_1) \tag{6.12}$$

Чтобы выписать в явном виде правую часть уравнения (4.4), необходимо вычислить значение интеграла

$$\vartheta\iint\limits_{\omega_1}|\xi-\eta|p_0(t,\eta)d\eta = W_0(t,\rho) \tag{6.13}$$

Поскольку $\Delta_\xi|\xi-\eta| = |\xi-\eta|^{-1}$, получаем (см. формулу (4.6)):

$$\vartheta\Delta_\xi\iint\limits_{\omega_1}|\xi-\eta|p_0(t,\eta)d\eta = (B_1p_0)(t,\xi) \tag{6.14}$$

Ввиду уравнения (6.2) правая часть соотношения (6.14) равна функции $w(t,\rho)$, следовательно, для правой части соотношения (6.13) получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dW_0}{d\rho}(t,\rho)\right) = w(t,\rho)$$

откуда функция $W_0(t,\rho)$ определяется с точностью до произвольной функции от переменной t в виде

$$W_0(t,\rho) = \int\limits_0^\rho\frac{1}{x}\int\limits_0^x w(t,s)sdsdx + C(t) \tag{6.15}$$

Подставляя в соотношения (6.13) и (6.15) значение $\rho = 0$, находим

$$C(t) = \vartheta\iint\limits_{\omega_1}|\eta|p_0(t,\eta)d\eta \tag{6.16}$$

Таким образом, принимая во внимание формулы (6.7), (6.12), (6.13), (6.15) и (6.16), уравнение (4.4) можно записать так:

$$\begin{gathered}(B_1p_2)(t,\xi) = \left[\left(\frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\right)^2 - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\right]a_1\int\limits_0^{a_1}\frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} + \\ + \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\int\limits_0^{a_1}l(a_1,s)\ddot{w}(t,s)sds - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\int\limits_0^\rho\ddot{w}(t,x)x\ln\frac{\rho}{x}dx\end{gathered} \tag{6.17}$$

Решение уравнения (6.17) имеет вид

$$p_2(t,\xi) = \frac{g_2(t,a_1)}{\pi\sqrt{a_1^2-\rho^2}} - \frac{1}{\pi}\int\limits_\rho^{a_1}\frac{g_2'(t,s)ds}{\sqrt{s^2-\rho^2}} \tag{6.18}$$

$$\pi\vartheta g_2(t,\rho) = \left[\left(\frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\right)^2 - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\right] a_1 \int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} + \\ + \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\int_0^{a_1} l(a_1,s)\ddot{w}(t,s)sds - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho} l(\rho,x)\ddot{w}(t,x)xdx \tag{6.19}$$

При этом справедливо соотношение

$$\frac{\pi\vartheta}{2}\iint_{\omega_1} p_2(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \left(\frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\right)^2 a_1^2 \int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)s^3ds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} \tag{6.20}$$

Далее, аналогично равенству (5.5) получаем

$$\vartheta\iint_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\ddot{p}_1(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{a_1^2}{2}\right)\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} \tag{6.21}$$

Принимая во внимание четность плотности $p_0(t,\boldsymbol{\xi})$, будем иметь

$$\iint_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2 p_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = |\boldsymbol{\xi}|^2\iint_{\omega_1} p_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} + \iint_{\omega_1} |\boldsymbol{\eta}|^2 p_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}$$

Подстановка в данное равенство выражений (6.6) и (6.8) дает

$$\frac{\pi\vartheta}{2}\iint_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^2 \ddot{p}_0(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \rho^2\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} + 2\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)s(2s^2-a_1^2)}{\sqrt{a_1^2-s^2}}ds \tag{6.22}$$

Теперь, используя формулы (6.20)–(6.22), нетрудно в явном виде выписать правую часть уравнения (4.5). Опуская выкладки, получаем его решение в форме

$$p_3(t,\boldsymbol{\xi}) = \pi^{-2}\vartheta^{-1}\frac{1}{\sqrt{a_1^2-\rho^2}}\left\{\left(\frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\right)^3 a_1^2\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} - \frac{2\Lambda_0\Lambda_1}{\pi c_2^3}\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)s^3ds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} - \right. \\ \left. - \frac{4\Lambda_2}{\pi c_2^3}\int_0^{a_1} \ddot{w}(t,s)s\sqrt{a_1^2-s^2}ds - \frac{2(\Lambda_0\Lambda_1-2\Lambda_2)}{\pi c_2^3}\rho^2\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}}\right\} \tag{6.23}$$

При этом справедливо соотношение

$$\frac{\pi\vartheta}{2}\iint_{\omega_1} p_3(t,\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \left(\frac{2\Lambda_0}{\pi c_2}\right)^3 a_1^3\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)sds}{\sqrt{a_1^2-s^2}} - \frac{2\Lambda_0\Lambda_1}{3\pi c_2^3}a_1\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)s(3s^2+2a_1^2)}{\sqrt{a_1^2-s^2}}ds + \\ + \frac{4\Lambda_2}{3\pi c_2^3}a_1\int_0^{a_1} \frac{\ddot{w}(t,s)s(3s^2-a_1^2)}{\sqrt{a_1^2-s^2}}ds \tag{6.24}$$

В случае штампа с плоской подошвой $w(t, \rho) \equiv \delta_0(t)$ полученное решение (6.4), (6.5), (6.11), (6.18), (6.19) и (6.23) совпадает с решением (5.1), (5.2), (5.6) и (5.10) при $\beta_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2$). Формулы (6.6), (6.12), (6.20) и (6.24) позволяют аналогично формуле (5.13) выписать асимптотику равнодействующей контактного давления.

Следует отметить, что найденное в данном разделе решение не согласуется с решением [12], полученным иным гораздо более сложным и трудоемким путем. При этом результаты [12] не согласуются с расчетами [17, 38].

7. Медленное поступательное движение эллиптического штампа. Пусть область ω_ε ограничена эллипсом с полуосями $a_\varepsilon = \varepsilon a_1$ и $b_\varepsilon = \varepsilon b_1$. Тогда решение уравнения (4.2) дается формулой [29]:

$$p_0(t, \boldsymbol{\xi}) = \vartheta^{-1}\left(1 - \frac{\xi_1^2}{a_1^2} - \frac{\xi_2^2}{b_1^2}\right)^{-1/2} \frac{\delta_0(t)}{2\pi b_1 \mathbf{K}(e)} \tag{7.1}$$

$$F_3^0 = \vartheta^{-1}\frac{a_1\delta_0(t)}{\mathbf{K}(e)}, \quad F_3^i = \iint\limits_{\omega_1} p_i(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} \ (i = 0, 1, \ldots) \tag{7.2}$$

Здесь $e = \sqrt{1 - (b_1/a_1)^2}$ – эксцентриситет, $\mathbf{K}(e)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Решение уравнения (4.3) при $\beta_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2$) согласно выражению (7.2) имеет вид

$$p_1(t, \boldsymbol{\xi}) = \vartheta^{-1}\left(1 - \frac{\xi_1^2}{a_1^2} - \frac{\xi_2^2}{b_1^2}\right)^{-1/2} \frac{\Lambda_0}{c_2} \frac{\dot{\delta}_0(t)}{2\pi\sqrt{1-e^2}\mathbf{K}(e)^2} \tag{7.3}$$

$$F_3^1 = \vartheta^{-1}\frac{\Lambda_0}{c_2}\frac{a_1^2\dot{\delta}_0(t)}{\mathbf{K}(e)^2} \tag{7.4}$$

Принимая во внимание соотношение (5.3), на основании теоремы Галина [30] (см. также [25], № 1.2.5) при учете четности плотности (7.1) устанавливаем представление

$$\vartheta\iint\limits_{\omega_1} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|\ddot{p}_0(t, \boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = \ddot{\delta}_0(t)[k_0(e)a_1^2 + k_1(e)\xi_1^2 + k_2(e)\xi_2^2] \tag{7.5}$$

Коэффициенты $k_i(e)$ ($i = 0, 1, 2$) легко определяются методом Довноровича. Опуская несложные выкладки, приведем результат

$$k_0(e) = \frac{\mathbf{E}(e)}{2\mathbf{K}(e)}, \quad k_1(e) = \frac{\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)}{2e^2\mathbf{K}(e)}, \quad k_2(e) = \frac{(1-e^4)\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)}{2e^2(1-e^2)\mathbf{K}(e)} \tag{7.6}$$

Здесь $\mathbf{E}(e)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Итак, на основании соотношений (7.4)–(7.6) уравнение (4.4) конкретизируется следующим образом:

$$(B_1 p_2)(t, \boldsymbol{\xi}) = \left[\frac{\Lambda_0^2}{\mathbf{K}(e)^2} - \Lambda_1 k_0(e)\right]\frac{a_1^2\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^2} - \frac{\Lambda_1\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^2}[k_1(e)\xi_1^2 + k_2(e)\xi_2^2] \tag{7.7}$$

Решение уравнения (7.7) дается формулой (см., например, [24], гл. 1, § 2; [31], § 1.5):

$$p_2(t, \boldsymbol{\xi}) = \vartheta^{-1}\frac{\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^2}\left(1 - \frac{\xi_1^2}{a_1^2} - \frac{\xi_2^2}{b_1^2}\right)^{-1/2}[c_{00}^{(2)} + c_{20}^{(2)}\xi_1^2 + c_{02}^{(2)}\xi_2^2] \tag{7.8}$$

Коэффициенты $c_{00}^{(2)}$, $c_{20}^{(2)}$, $c_{02}^{(2)}$ определяются как решение системы ($i = 2$):

$$
\begin{aligned}
&d_{00}^{00}c_{00}^{(i)} + d_{20}^{00}c_{20}^{(i)} + d_{02}^{00}c_{02}^{(i)} = b_{00}^{(i)}\\
&d_{20}^{20}c_{20}^{(i)} + d_{02}^{20}c_{02}^{(i)} = -b_{20}^{(i)}, \quad d_{20}^{02}c_{20}^{(i)} + d_{02}^{02}c_{02}^{(i)} = -b_{02}^{(i)}
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

$$
b_{00}^{(2)} = \left[\frac{\Lambda_0^2}{\mathbf{K}(e)^2} - \Lambda_1 k_0(e)\right]a_1^2, \quad b_{20}^{(2)} = \Lambda_1 k_1(e), \quad b_{02}^{(2)} = \Lambda_1 k_2(e)
$$

Согласно расчетам [24] имеем

$$
d_{00}^{00} = 2\pi b_1 \mathbf{K}(e), \quad d_{20}^{00} = \frac{\pi a_1^2 b_1}{e^2}[\mathbf{E}(e) - (1-e^2)\mathbf{K}(e)], \quad d_{02}^{00} = \frac{\pi b_1^2}{e^2}[\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]
$$

$$
d_{20}^{20} = \frac{\pi b_1}{e^4}[2\mathbf{K}(e) - (2+e^2)\mathbf{E}(e)], \quad d_{02}^{20} = \frac{\pi b_1(1-e^2)}{e^4}[2\mathbf{E}(e) - (2-e^2)\mathbf{K}(e)]
$$

$$
d_{20}^{02} = \frac{\pi b_1}{e^4}[2\mathbf{E}(e) - (2-e^2)\mathbf{K}(e)], \quad d_{02}^{02} = \frac{\pi b_1}{e^4}[2e^4\mathbf{K}(e) - (2-3e^2)\mathbf{E}(e)]
$$

Равнодействующая плотности контактного давления (7.8) равна

$$
F_3^2(t) = \vartheta^{-1}\frac{\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^2}2\pi a_1 b_1\left(c_{00}^{(2)} + \frac{a_1^2}{3}c_{20}^{(2)} + \frac{b_1^2}{3}c_{02}^{(2)}\right) \tag{7.10}
$$

Наконец, подставляя выражения (7.1), (7.3) и (7.8) в правую часть уравнения (4.5), в результате будем иметь

$$
\begin{aligned}
(B_1 p_3)(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{a_1\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^3\mathbf{K}(e)}\bigg\{&2\pi b_1\Lambda_0\mathbf{K}(e)\left(c_{00}^{(2)} + \frac{a_1^2}{3}c_{20}^{(2)} + \frac{b_1^2}{3}c_{02}^{(2)}\right) -\\
&-\Lambda_0\Lambda_1 k_0(e)a_1^2 + \frac{\Lambda_2}{6}(2-e^2)a_1^2 +\\
&+\left(\frac{\Lambda_2}{2} - \Lambda_0\Lambda_1 k_1(e)\right)\xi_1^2 + \left(\frac{\Lambda_2}{2} - \Lambda_0\Lambda_1 k_2(e)\right)\xi_2^2\bigg\}
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Решение уравнения (7.11) дается формулой, аналогичной (7.8):

$$
p_3(t, \boldsymbol{\xi}) = \vartheta^{-1}\frac{\ddot{\delta}_0(t)}{c_2^3}\left(1 - \frac{\xi_1^2}{a_1^2} - \frac{\xi_2^2}{b_1^2}\right)^{-1/2}[c_{00}^{(3)} + c_{20}^{(3)}\xi_1^2 + c_{02}^{(3)}\xi_2^2] \tag{7.12}
$$

где коэффициенты $c_{00}^{(3)}$, $c_{20}^{(3)}$, $c_{02}^{(3)}$ определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений (7.9) ($i = 3$) с правыми частями

$$
b_{00}^{(3)} = 2\pi a_1 b_1 \Lambda_0\left(c_{00}^{(2)} + \frac{a_1^2}{3}c_{20}^{(2)} + \frac{b_1^2}{3}c_{02}^{(2)}\right) - \Lambda_0\Lambda_1 k_0(e)a_1^2 + \frac{\Lambda_2}{6}(2-e^2)a_1^2
$$

$$
b_{20}^{(3)} = \Lambda_0\Lambda_1 k_1(e) - \Lambda_2/2, \quad b_{02}^{(3)} = \Lambda_0\Lambda_1 k_2(e) - \Lambda_2/2
$$

Равнодействующая плотности контактного давления (7.12) определяется формулой, аналогичной (7.10).

8. Асимптотические модели поступательного движения штампа с плоской подошвой общей формы. Ограничиваясь в разложении (3.9) первой поправкой, приходим к уравнению

$$(B_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\iint\limits_{\omega_\varepsilon} \dot{p}(t, \mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{8.1}$$

Вводя равнодействующую контактных давлений

$$F_3(t) = \iint\limits_{\omega_\varepsilon} p(t, \mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{8.2}$$

уравнению (8.1) придаем вид

$$(B_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dot{F}_3(t) \tag{8.3}$$

Обозначим через $\hat{p}_0(\mathbf{x})$ плотность распределения контактных давлений в статической задаче о вдавливании штампа с плоской подошвой в форме области ω_ε на единичную глубину в упругое полупространство. Иными словами, пусть $\hat{p}_0(\mathbf{x})$ – решение интегрального уравнения

$$(B_\varepsilon\hat{p})(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x}\in\omega_\varepsilon \tag{8.4}$$

Положим

$$\mathbf{c}^\varepsilon = \vartheta\iint\limits_{\omega_\varepsilon} \hat{p}_0(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{8.5}$$

Величина $\mathbf{c}^\varepsilon$ называется [32] поступательной емкостью штампа.

Поскольку правая часть уравнения (8.3) не зависит от координат, его решение может быть выражено следующим образом:

$$p(t, \mathbf{x}) = \left(\delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dot{F}_3(t)\right)\hat{p}_0(\mathbf{x}) \tag{8.6}$$

При этом согласно равенству (8.5) будем иметь

$$F_3(t) = \vartheta^{-1}\mathbf{c}^\varepsilon\delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\mathbf{c}^\varepsilon\dot{F}_3(t) \tag{8.7}$$

Подчеркнем, что (приближенное) уравнение (8.7) справедливо для произвольного плоского штампа. В случае области ω_ε, отличной от эллиптической, в ряде работ (см., в частности, [32–35]) были предложены различные приближенные формулы для вычисления поступательной емкости, или величины, ей эквивалентной.

Удерживая теперь в разложении (3.9) две поправки, получаем

$$(B_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dot{F}_3(t) - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\vartheta\iint\limits_{\omega_\varepsilon} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\ddot{p}(t, \mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{8.8}$$

Оставаясь в рамках точности, с которой было выписано уравнение (8.8), его можно заменить следующим:

$$(B_\varepsilon p)(t, \mathbf{x}) = \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dot{F}_3(t) - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\vartheta\ddot{\delta}_0(t)\iint\limits_{\omega_\varepsilon} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\hat{p}_0(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{8.9}$$

где $\hat{p}_0(\mathbf{x})$ – решение интегрального уравнения (8.4).

Применяя теорему Моссаковского [36], из уравнения (8.9) выводим

$$F_3(t) = \vartheta^{-1}\mathbf{c}^\varepsilon\delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\mathbf{c}^\varepsilon\dot{F}_3(t) - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\vartheta^{-1}\mathbf{d}^\varepsilon\ddot{\delta}_0(t) \tag{8.10}$$

$$\mathbf{d}^\varepsilon = \vartheta^2\iint_{\omega_\varepsilon}\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\hat{p}_0(\mathbf{y})\hat{p}_0(\mathbf{x})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \tag{8.11}$$

В случае эллиптической области ω_ε с большей полуосью $a_\varepsilon = \varepsilon a_1$ и эксцентриситетом e, используя формулы (7.5), (7.6) и (7.8), находим

$$\mathbf{d}^\varepsilon = \frac{a_\varepsilon^3}{6\mathbf{K}(e)^2}(3\mathbf{E}(e) + (1-e^2)\mathbf{K}(e)) \tag{8.12}$$

При этом величина поступательной емкости равна [29]:

$$\mathbf{c}^\varepsilon = a_\varepsilon/\mathbf{K}(e) \tag{8.13}$$

Наконец, удерживая в разложении (3.9) три поправки, будем иметь

$$\begin{aligned}(B_\varepsilon p)(t,\mathbf{x}) &= \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dot{F}_3(t) - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\vartheta\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\ddot{p}(t,\mathbf{y})d\mathbf{y} + \\ &+ \frac{\Lambda_2}{2c_2^3}\vartheta\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\dddot{p}(t,\mathbf{y})d\mathbf{y}\end{aligned} \tag{8.14}$$

Оставаясь в рамках точности, с которой было получено уравнение (8.14), заменим его следующим (сравните с (8.9)):

$$\begin{aligned}(B_\varepsilon p)(t,\mathbf{x}) &= \delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dot{F}_3(t) - \\ &- \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\vartheta\left(\ddot{\delta}_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\vartheta\dddot{F}_3(t)\right)\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\hat{p}_0(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \\ &+ \frac{\Lambda_2}{2c_2^3}\vartheta\dddot{\delta}_0(t)\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\hat{p}_0(\mathbf{y})d\mathbf{y}\end{aligned} \tag{8.15}$$

Здесь $\hat{p}_0(\mathbf{x})$ – как и прежде, решение интегрального уравнения (8.4).

Применяя теорему Моссаковского [36], из уравнения (8.15) выводим

$$\begin{aligned}F_3(t) &= \vartheta^{-1}\mathbf{c}^\varepsilon\delta_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\mathbf{c}^\varepsilon\dot{F}_3(t) - \frac{\Lambda_1}{c_2^2}\mathbf{d}^\varepsilon\left(\vartheta^{-1}\ddot{\delta}_0(t) + \frac{\Lambda_0}{c_2}\dddot{F}_3(t)\right) + \\ &+ \frac{\Lambda_2}{c_2^3}\mathbf{c}^\varepsilon\dddot{\delta}_0(t)\vartheta^{-1}\hat{m}_0\end{aligned} \tag{8.16}$$

где $\hat{m}_0$ – приведенный полярный момент плотности $\hat{p}_0(\mathbf{x})$, т.е.

$$\hat{m}_0 = \vartheta\iint_{\omega_\varepsilon}|\mathbf{y}|^2\hat{p}_0(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{8.17}$$

В случае эллиптической области ω_ε с большей полуосью $a_\varepsilon = \varepsilon a_1$ и эксцентриситетом e легко получается

$$\hat{m}_0 = (2-e^2)a_\varepsilon^3/(3\mathbf{K}(e)) \tag{8.18}$$

В случае выпуклой области ω_ε, близкой к круговой, приближенные выражения приемлемой точности можно получить для величин (8.11) и (8.17), применяя формулы работ [35, 37].

9. Низкочастотная асимптотика импеданса. Положим $F_3(t) = F_{30}\exp(i\omega t)$ и $\delta_0(t) = \delta_{00}\exp(i\omega t)$. Тогда согласно уравнению (8.16) будем иметь

$$\begin{aligned} F_{30} &= \vartheta^{-1}\mathbf{c}^\varepsilon\delta_{00} + i\omega\frac{\Lambda_0}{c_2}\mathbf{c}^\varepsilon F_{30} + \omega^2\vartheta^{-1}\frac{\Lambda_1}{c_2^2}\mathbf{d}^\varepsilon\delta_{00} + \\ &+ i\omega^3\frac{\Lambda_1\Lambda_0}{c_2^3}\mathbf{d}^\varepsilon F_{30} - i\omega^3\vartheta^{-1}\frac{\Lambda_2}{c_2^3}\mathbf{c}^\varepsilon\hat{m}_0\delta_{00} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Таким образом, величина импеданса, определяемого [38] как отношение амплитуды силы F_{30} к амплитуде перемещения δ_{00}, оказывается равной

$$\frac{F_{30}}{\delta_{00}} = \vartheta^{-1}\frac{\mathbf{c}^\varepsilon + \omega^2\dfrac{\Lambda_1}{c_2^2}\mathbf{d}^\varepsilon - i\omega^3\dfrac{\Lambda_2}{c_2^3}\mathbf{c}^\varepsilon\hat{m}_0}{1 - i\omega\dfrac{\Lambda_0}{c_2}\mathbf{c}^\varepsilon - i\omega^3\dfrac{\Lambda_1\Lambda_0}{c_2^3}\mathbf{d}^\varepsilon} \tag{9.2}$$

Предположение о медленности движения штампа, сделанное при выводе уравнения (8.16), в рассматриваемом случае (9.1) при фиксированном значении диаметра d_ε подошвы штампа ω_ε означает малость относительной частоты колебаний. Заметим также, что область практического применения полученных результатов ограничивает требование малости амплитуды колебаний.

С той же точностью, с какой было получено уравнение (8.16), из соотношения (9.2) выводим

$$F_{30}/\delta_{00} = \vartheta^{-1}\mathbf{c}^\varepsilon(1 + i\lambda_0\tilde{\omega} - \lambda_1\tilde{\omega}^2 + i\lambda_2\tilde{\omega}^3 + \ldots) \tag{9.3}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{\omega d_\varepsilon}{2c_2}, \quad \lambda_0 = \frac{2\mathbf{c}^\varepsilon}{d_\varepsilon}\Lambda_0, \quad \lambda_1 = \left(\frac{2\mathbf{c}^\varepsilon}{d_\varepsilon}\right)^2\left(\Lambda_0^2 - \frac{\mathbf{d}^\varepsilon}{(\mathbf{c}^\varepsilon)^3}\Lambda_1\right) \\ \lambda_2 &= \left(\frac{2\mathbf{c}^\varepsilon}{d_\varepsilon}\right)^3\left(-\Lambda_0^3 + 2\Lambda_1\Lambda_0\frac{\mathbf{d}^\varepsilon}{(\mathbf{c}^\varepsilon)^3} - \Lambda_2\frac{\hat{m}_0}{(\mathbf{c}^\varepsilon)^3}\right) \end{aligned} \tag{9.4}$$

Заметим, что формула (9.2), которая представляет собой аппроксимацию Паде, имеет в сравнении с разложением (9.3) большую точность (см. также [39, 40]).

В частном случае кругового штампа радиуса a_ε имеем

$$d_\varepsilon = 2a_\varepsilon, \quad \mathbf{c}^\varepsilon = \frac{2a_\varepsilon}{\pi}, \quad \mathbf{d}^\varepsilon = \frac{4a_\varepsilon^3}{3\pi}, \quad \hat{m}_0 = \frac{4a_\varepsilon^3}{3\pi}$$

Для сравнения с известными результатами [38] следует вычислить значения коэффициентов разложения (9.3), принимающих следующие выражения:

$$\lambda_0 = \frac{2}{\pi}\Lambda_0, \quad \lambda_1 = \frac{4}{\pi^2}\left(\Lambda_0^2 - \frac{\pi^2}{6}\Lambda_1\right), \quad \lambda_2 = \frac{8}{\pi^3}\left(-\Lambda_0^3 + \frac{\pi^2}{3}\Lambda_1\Lambda_0 - \frac{\pi^2}{6}\Lambda_2\right) \tag{9.5}$$

Заметим, что согласно формуле (3.7) получим

$$\Lambda_1 = \frac{1+\beta^{-2}}{4} + \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1} q_i(\sqrt{1-p_i} - \sqrt{\beta^{-2}-p_i}) + q_3(\sqrt{\gamma^2-1} - \sqrt{g^2-\beta^{-2}})$$

причем ввиду тождества $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$ при $\nu = 1/4$ имеем $\Lambda_1 = 3/4$.

По формуле (1.5), (1.6) и (3.7) при $\nu = 1/4$ получаем $\lambda_0 = 0.790$, $\lambda_1 = 0.124$ и $\lambda_2 = 0.045$, что в точности совпадает с результатами расчетов [38].

В случае эллиптического штампа с большой полуосью a_ε и эксцентриситетом e, принимая во внимание формулы (8.12), (8.13) и (8.18), будем иметь

$$\lambda_0 = \frac{\Lambda_0}{\mathbf{K}(e)}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\mathbf{K}(e)^2}\left(\Lambda_0^2 - \frac{\Lambda_1}{6}\mathbf{K}(e)[3\mathbf{E}(e) + (1-e^2)\mathbf{K}(e)]\right)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{\mathbf{K}(e)^3}\left(-\Lambda_0^3 + \frac{\Lambda_1\Lambda_0}{3}\mathbf{K}(e)[3\mathbf{E}(e) + (1-e^2)\mathbf{K}(e)] - \frac{(2-e^2)}{3}\mathbf{K}(e)^2\Lambda_2\right) \quad (9.6)$$

Полагая $e = 0$ в формулах (9.6), приходим к (9.5).

Подчеркнем, что формулы (8.5), (8.11) и (8.17) позволяют вычислить коэффициенты разложения (9.3), как только известно решение интегрального уравнения статической задачи (8.4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ (Грант Президента Российской Федерации МД-182.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 73–82.
2. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb's problems for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seismol. Soc. America. 1979. V. 69. № 4. P. 947–956.
3. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
4. *Лавров Н.А., Павловская Е.Е.* Динамика системы удаленных штампов на упругом полупространстве // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 6. С. 204–210.
5. *Pekeris C.L.* The seismic surface pulse // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1955. V. 41. № 41. P. 469–480.
6. *Тарлаковский Д.В.* Применение принципа суперпозиции в осесимметричной динамической задаче для упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 76–84.
7. *Поручиков В.Б.* Осесимметричная динамическая задача о штампе на упругом полупространстве // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. № 6. С. 114–120.
8. *Лобысев В.Л., Яковлев Ю.С.* Осесимметричная динамическая задача теории упругости со смешанными граничными условиями // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 103–108.
9. *Лобысев В.Л., Сайгина В.И., Яковлев Ю.С.* К решению динамической задачи о круглом штампе на границе с упругим полупространством // Физ.-техн. пробл. разработки полез. ископаемых. 1971. № 2. С. 25–33.
10. *Gutzwiller M.C.* The impact of a rigid circular cylinder on an elastic solid // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1962. V. 255. № 1053. P. 153–191.
11. *Сеймов В.М.* Применение метода ортогональных многочленов к динамическим контактным задачам // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 1. С. 67–77.
12. *Зеленцов В.Б.* Об одном асимптотическом методе решения плоских и пространственных осесимметричных нестационарных динамических контактных задач // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 20–33.
13. *Александров В.М., Зеленцов В.Б.* Асимптотические методы в осесимметричной динамической нестационарной контактной задаче для упругого полупространства // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 137–150.

14. *Бородачев Н.М.* Динамическая контактная задача для штампа с плоским круговым основанием, лежащего на упругом полупространстве // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 2. С. 82–90.
15. *Закорко В.Н., Ростовцев Н.А.* К динамической контактной задаче стационарных колебаний упругого полупространства // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 545–552.
16. *Robertson I.A.* Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid // Proc. Camb. Phil. Soc. 1966. V. 62. Pt 3. P. 547–553.
17. *Закорко В.Н.* К динамической задаче о распределении давления на контакте круглого штампа с упругим полупространством // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых. 1965. № 3. С. 3–13.
18. *Сигалов Л.С.* Изгибные колебания штампа с плоским круговым основанием на упругом полупространстве // Изв. вузов. Строит. и архитект. 1966. № 6. С. 25–33.
19. *Gladwell C.M.L.* Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid // Int. J. Engng Sci. 1968. V. 6. № 10. P. 591–607.
20. *Ананьев И.В., Бабешко В.А.* Динамические контактные задачи для штампов с относительно малым радиусом // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 64–70.
21. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 61–67.
22. *Gavrilov S.N., Nerman G.C.* Oscillation of a punch moving on the free surface of an elastic half space // J. Elasticity. 2004. V. 75. P. 247–265.
23. *Абрамов В.М.* Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 8. С. 759–763.
24. *Довнорович В.И.* Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1959. 107 с.
25. *Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н.* Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.
26. *Леонов М.Я.* К теории расчета упругих оснований // ПММ. 1939. Вып. 2. С. 53–78.
27. *Schubert G.* Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken // Ing.-Archiv. 1942. Bd. 13. № 3. S. 132–147.
28. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.; Гостехиздат, 1949. 270 с.
29. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
30. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
31. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
32. *Аргатов И.И.* Емкостные характеристики штампа с плоским гладким основанием // Изв. вузов. Строительство. 2000. № 4. С. 26–32.
33. *Галин Л.А.* Оценка перемещений в пространственных контактных задачах теории упругости // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 241–250.
34. *Бородачев Н.М.* Об определении осадок жестких плит и массивов // Основания, фундаменты и мех. грунтов. 1964. № 4. С. 3–4.
35. *Fabrikant V.I.* Applications of Potential Theory in Mechanics. Dordrecht: Kluwer, 1989. 440 p.
36. *Моссаковский В.И.* Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 4. С. 477–482.
37. *Моссаковский В.И.* Зависимость между силой и осадкой для близкого к круговому в плане плоского штампа // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1972. Вып. 14. С. 93–102.
38. *Gladwell G.M.L.* The calculation of mechanical impedances relating to an indenter vibrating on the surface of a semi-infinite elastic body // J. Sound Vibrat. 1968. V. 8. № 2. P. 215–228.
39. *Аргатов И.И.* Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Ж. вычисл. математики и матем. физики. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
40. *Andrianov I.V., Awrejcewicz J.* New trends in asymptotic approaches: Summation and interpolation methods // Appl. Mech. Rev. 2001. V. 54. № 1. P. 69–92.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
11.11.2005