МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2007

УДК 539.3

© 2007 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, В.К. АНТОНОВ, В.Ю. САЛАМАТОВА

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЕФОРМИРУЕМОЙ НАКЛАДКИ С НАПРЯЖЕННЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Рассмотрены плоская и осесимметричная задачи о контактном взаимодействии упругой накладки с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, направленным параллельно границе полупространства. Предполагается, что накладка сопротивляется растяжению и не сопротивляется изгибу. Определены контактные касательные напряжения под накладкой, перемещения точек накладки, коэффициент искажения деформации поверхности полупространства.

Подобные задачи другим методом рассматривались ранее в [1].

1. Постановка плоской задачи. Пусть граница $y = 0$ упругой полуплоскости $|x| < \infty$, $y \le 0$ на интервале $|x| \le a$ усилена накладкой, жестко сцепленной с границей полуплоскости. Полуплоскость на бесконечности нагружена равномерным растягивающим усилием p. Предполагаем, что накладка сопротивляется растяжению и не сопротивляется изгибу, тогда ее деформация может быть описана уравнением [1]:

$$2\theta_2 h u_2''(x) = \tau(x), \quad u_2(0) = 0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях свободных краев

$$u_2'(\pm a) = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\theta_2 = G_2/(1-\nu_2)$; G_2 и ν_2 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона накладки, h – ее толщина, $u_2(x)$ – горизонтальное перемещение точек накладки, $\tau(x)$ – контактное касательное напряжение между нижней поверхностью накладки и поверхностью полуплоскости.

Граничные условия для полуплоскости имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_y^{(1)}(x,0) = 0 \ (|x| < \infty), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x,0) = 0 \ (|x| > a) \\ &u_1(x,0) = u_2(x) \ (|x| \le a) \end{aligned} \tag{1.3}$$

На бесконечности полуплоскость растянута

$$\sigma_x^{(1)}(x,y) = p \tag{1.4}$$

а остальные напряжения исчезают. Здесь $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$ и $\tau_{xy}^{(1)}$ – напряжения в полуплоскости, u_1 – горизонтальное перемещение точек полуплоскости. Очевидно также, что

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \tau(x) \ (|x| \le a) \tag{1.5}$$

Разыскивая решение уравнений Ламе при граничных условиях (1.3), (1.4) в форме

$$u_1(x,y) = \frac{(1-\nu_1)px}{2G_1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha,y)e^{-i\alpha x}d\alpha$$
$$\upsilon_1(x,y) = -\frac{\nu_1 py}{2G_1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha,y)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{1.6}$$

где G_1 и ν_1 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона полуплоскости, υ_1 – вертикальное перемещение точек полуплоскости, и применяя известную технику интегрального преобразования Фурье [2], сведем задачу (1.3), (1.4) к определению функции $\tau(x)$ из интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a}\frac{\tau(\xi)}{\xi - x}d\xi = -\frac{\pi p}{2} + \pi\theta_1 u_2'(x) \quad (|x| \le a)$$
$$\theta_1 = G_1/(1-\nu_1) \tag{1.7}$$

Итак, для определения функций $\tau(x)$ и $u_2(x)$ нужно совместно решить дифференциальное уравнение (1.1) при граничных условиях (1.2) и интегральное уравнение (1.7).

2. Сведение плоской задачи к бесконечной алгебраической системе. Обратим стоящий в левой части уравнения (1.7) сингулярный интегральный оператор [3], получим

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\left(-\frac{\pi px}{2} - \theta_1\int_{-a}^{a}\frac{u_2'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\right) \tag{2.1}$$

Заметим, что функции $\tau(x)$ и $u_2(x)$ в (2.1) являются нечетными по x.

Перейдем в (1.1), (1.2) и (2.1) к безразмерным переменным и обозначениям согласно формулам

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \tilde{\tau}(x') = \frac{2\tau(ax')}{p}, \quad \tilde{u}_2(x') = \frac{2\theta_1 u_2(ax')}{pa} \tag{2.2}$$

Опуская далее штрихи и тильды, будем иметь

$$u_2''(x) = k\tau(x), \quad u_2'(\pm 1) = 0, \quad k = a\theta_1/(2h\theta_2) \tag{2.3}$$

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left(-\pi x - \int_{-1}^{1}\frac{u_2'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\right) \tag{2.4}$$

Видно, что задача (2.3), (2.4) содержит один безразмерный физико-геометрический параметр k.

Построим систему ортонормированных нечетных по x полиномов таких, что

$$\int_{-1}^{1} Q_m'(x)Q_n'(x)dx = \begin{cases} 0 \ (m \ne n), \\ 1 \ (m = n), \end{cases} \quad Q_m'(x)|_{x=\pm 1} = 0 \tag{2.5}$$

Первые три полинома, удовлетворяющих условиям (2.5), имеют форму

$$Q_1(x) = \sqrt{15}\left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x\right), \quad Q_2(x) = \sqrt{5}\left(\frac{21}{40}x^5 - x^3 + \frac{3}{8}x\right)$$
$$Q_3(x) = \sqrt{2730}\left(\frac{33}{448}x^7 - \frac{51}{320}x^5 + \frac{19}{192}x^3 - \frac{1}{64}x\right) \tag{2.6}$$

Построение ортонормированных полиномов $Q_m(x)$, удовлетворяющих условиям (2.5), может быть продолжено с помощью процесса ортогонализации Шмидта; при этом система полиномов получается замкнутой [4] в пространстве квадратично суммируемых первых производных на отрезке [–1, 1].

Теперь решение задачи (2.3) можно представить в виде

$$u_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m Q_m(x), \quad a_n = -k\int_{-1}^{1}\tau(x)Q_n(x)dx \tag{2.7}$$

Подставим функцию $u_2(x)$ в форме (2.7) в формулу (2.4), а затем полученное выражение во второе соотношение (2.7). В результате придем к следующей бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов a_m разложения (2.7):

$$a_n = -k\int_{-1}^{1}\frac{Q_n(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[-\pi x - \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-1}^{1}\frac{Q'_m(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi\right]dx \tag{2.8}$$

Интегралы в (2.8) вычисляются по формулам [3]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2n+2}\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}d\xi = -\pi x P_n(x), \quad \int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}$$
$$P_{-1}(x) = 1, \quad P_n(x) = x^{2n+2} - \sum_{m=0}^{n}\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}x^{2n-2m} \quad (n \ge 0) \tag{2.9}$$

После нахождения приближенного решения алгебраической системы (2.8) (например, методом редукции [5], сходимость которого проверяется численно) перемещения точек накладки могут быть найдены по первой формуле (2.7), контактные касательные напряжения – по формуле (2.4), а коэффициент, показывающий во сколько раз наличие накладки искажает деформацию полуплоскости, – по формуле

$$\kappa = \left(\int_{-1}^{1}u'_2(x)dx\right)^{-1} = (2u_2(1))^{-1} \tag{2.10}$$

Ниже даны значения величины κ, подсчитанные по формуле (2.10) при различных значениях параметра k, определяемого последней формулой (2.3):

k	0.25	0.5	1	2	4
κ	16.642	8.593	4.568	2.555	1.547

3. Постановка осесимметричной задачи. Пусть граница $z = 0$ упругого полупространства $0 \le r < \infty$, $z \le 0$ на круге $r \le a$ усилена упругой накладкой, жестко сцепленной с границей полупространства. Полупространство на бесконечности нагружено равномерным растягивающим усилием p. Предполагается, что накладка сопротивляется растяжению и не сопротивляется изгибу, тогда ее деформация может быть описана уравнением [1]:

$$2\theta_2 h\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right)u_2(r) = \tau(r), \quad u_2(0) = 0 \tag{3.1}$$

при граничном условии свободного края

$$\left(\frac{du_2(r)}{dr} + \nu_2 \frac{u_2(r)}{r}\right) = 0 \ (r = a) \tag{3.2}$$

здесь, как и выше, $\theta_2 = G_2/1(1 - \nu_2)$, G_2, ν_2 и h определены ранее, $u_2(r)$ – горизонтальное перемещение точек накладки, $\tau(r)$ – контактное касательное напряжение между нижней поверхностью накладки и поверхностью полупространства.

Граничные условия для полупространства имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 \ (0 \le r < \infty), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0 \ (a < r < \infty) \\ &u_1(r, 0) = u_2(r) \ (0 \le r \le a) \end{aligned} \tag{3.3}$$

На бесконечности полупространство растянуто

$$\sigma_r^{(1)}(r, z) = p \tag{3.4}$$

а остальные напряжения исчезают. Здесь $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_z^{(1)}$ и $\tau_{rz}^{(1)}$ – напряжения в полупространстве, u_1 – горизонтальное перемещение точек полупространства. Очевидно также, что

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau(r) \ (0 \le r \le a) \tag{3.5}$$

Разыскивая решение уравнений Ламе при граничных условиях (3.3), (3.4) в форме

$$\begin{aligned} u_1(r, z) &= \frac{(1 - \nu_1)pr}{2G_1(1 + \nu_1)} + \int_0^\infty U(\gamma, z)\gamma J_1(\gamma r)d\gamma \\ w_1(r, z) &= -\frac{\nu_1 pz}{2G_1(1 + \nu_1)} + \int_0^\infty W(\gamma, z)\gamma J_0(\gamma r)d\gamma \end{aligned} \tag{3.6}$$

где G_1 и ν_1 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона полупространства, w_1 – вертикальное перемещение точек полупространства, $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя, и применяя известную технику интегрального преобразования Ханкеля [2], сведем задачу (3.3), (3.4) к определению функции $\tau(r)$ из интегрального уравнения

$$\int_0^a \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma\rho)J_1(\gamma r)d\gamma = -\frac{pr}{2(1 + \nu_1)} + \theta_1 u_2(r) \ (0 \le r \le a) \tag{3.7}$$

где, как и выше, $\theta_1 = G_1/(1 - \nu_1)$. Заметим, что функции $\tau(r)$ и $u_2(r)$ являются нечетными по r.

Итак, для определения функций $\tau(r)$ и $u_2(r)$ нужно совместно решить дифференциальное уравнение (3.1) при граничном условии (3.2) и интегральное уравнение (3.7).

Перейдем в (3.1), (3.2) и (3.7) к безразмерным переменным и обозначениям согласно формулам

$$\begin{aligned} &r' = \frac{r}{a}, \quad \rho' = \frac{\rho}{a}, \quad \gamma' = a\gamma, \quad \tilde{\tau}(r') = \frac{2(1 + \nu_1)\tau(ar')}{p} \\ &\tilde{u}_2(r') = \frac{2(1 + \nu_1)\theta_1 u_2(ar')}{pa} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Опуская далее штрихи и тильды, будем иметь

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[ru_2(r)]\right) = k\tau(r), \quad \left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu_2}{r}\right)u_2(r)\bigg|_{r=1} = 0 \tag{3.9}$$

$$\int_0^1 \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty J_1(\gamma\rho)J_1(\gamma r)d\gamma = \delta(r), \quad \delta(r) = -r+u_2(r) \ (0\le r\le 1) \tag{3.10}$$

где k имеет вид (2.3). Здесь задача (3.9), (3.10) содержит уже два безразмерных параметра k и ν_2.

4. Исследование интегрального уравнения (3.10). Покажем, что ядро интегрального уравнения (3.10):

$$K(\rho, r) = \int_0^\infty J_1(\gamma\rho)J_1(\gamma r)d\gamma \tag{4.1}$$

содержит логарифмическую особенность при $\rho = r$. Действительно, интеграл (4.1) можно вычислить и он равен [6]:

$$K(\rho, r) = \frac{2}{\pi(r+\rho)e^2}((2-e^2)K(e)-2E(e)), \quad e = \frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho} \tag{4.2}$$

где $K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы [7]. Функция $K(e)$ ведет себя логарифмическим образом при $e \to 1$ ($\rho \to r$). Таким образом ядро (4.1) является нерегулярным, поэтому решение интегрального уравнения (3.10) будет существовать в классе обычных (необобщенных) функций.

Заметим, что интегральное уравнение (3.10) эквивалентно парному интегральному уравнению

$$\begin{gathered}\int_0^\infty T(\gamma)J_1(\gamma r)d\gamma = \delta(r) \ (0\le r\le 1)\\ \int_0^\infty \gamma T(\gamma)J_1(\gamma r)d\gamma = 0 \ (1\le r<\infty)\end{gathered} \tag{4.3}$$

где трансформанта Ханкеля $T(\gamma)$ связана с оригиналом $\tau(r)$ выражениями

$$T(\gamma) = \int_0^1 \rho\tau(\rho)J_1(\gamma\rho)d\rho, \quad \tau(r) = \int_0^\infty \gamma T(\gamma)J_1(\gamma r)d\gamma \ (0\le r\le 1) \tag{4.4}$$

Для решения уравнения (4.3) воспользуемся формулами [7]:

$$\int_0^t \frac{J_1(\gamma r)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr = \frac{1-\cos\gamma t}{\gamma t}, \quad \int_t^\infty \frac{J_1(\gamma r)}{\sqrt{r^2-t^2}}dr = \frac{\sin\gamma t}{\gamma t} \tag{4.5}$$

Умножим первое соотношение (4.3) на $(t^2-r^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по r от 0 до t, а второе соотношение (4.3) умножим на $(r^2-t^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по r от t до ∞. Изменяя порядок интегрирования и используя формулы (4.5), получим

$$\begin{gathered}\int_0^\infty T(\gamma)\frac{1-\cos\gamma t}{\gamma t}d\gamma = \int_0^t \frac{\delta(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr \ (0\le t\le 1)\\ \int_0^\infty T(\gamma)\sin\gamma t d\gamma = 0 \ (1\le t<\infty)\end{gathered} \tag{4.6}$$

Умножим теперь на t и затем продифференцируем по t первое соотношение (4.6). В результате имеем

$$\int_0^\infty T(\gamma)\sin\gamma t d\gamma = \begin{cases} p(t) \ (0 \le t \le 1) \\ 0 \ (1 \le t < \infty) \end{cases} \tag{4.7}$$

$$p(t) = \frac{d}{dt} t \int_0^t \frac{\delta(r)dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{4.8}$$

Из формулы (4.7) с помощью синус-интегрального преобразования Фурье, найдем

$$T(\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 p(t)\sin\gamma t dt \tag{4.9}$$

Наконец, подставляя выражение (4.9) во второе соотношение (4.4), меняя порядок интегрирования и используя разрывной интеграл Сонина [7]:

$$\int_0^\infty \sin\gamma t J_0(\gamma r)d\gamma = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \ (0 < r < t) \\ 0 \ (0 < t < r) \end{cases} \tag{4.10}$$

получим для функции $\tau(r)$ следующее выражение:

$$\tau(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^1 \frac{p(t)dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{4.11}$$

Итак, решение интегрального уравнения (3.10) дается формулами (4.8) и (4.11).

5. Сведение осесимметричной задачи к бесконечной алгебраической системе. Построим систему ортонормированных нечетных по r полиномов, таких что

$$Q_m(1)Q_n(1)(1 - \nu_2) - \int_0^1 \frac{d}{dr}[rQ_m(r)]\frac{d}{dr}[rQ_n(r)]\frac{dr}{r} = \begin{cases} 0 \ (m \ne n) \\ 1 \ (m \ne n) \end{cases}$$

$$\left.\frac{dQ_m(r)}{dr}\right|_{r=1} + \nu_2 Q_m(1) = 0 \tag{5.1}$$

Первые три полинома, удовлетворяющих условиям (5.1), имеют вид

$$Q_1(r) = \sqrt{\frac{3 + 3\nu_2}{14 + 2\nu_2}}\left(r^3 - \frac{3 + \nu_2}{1 + \nu_2}r\right)$$

$$Q_2(r) = \sqrt{\frac{70 + 10\nu_2}{17 + \nu_2}}\left(r^5 - \frac{3}{2}\frac{9 + \nu_2}{7 + \nu_2}r^3 + \frac{1}{2}\frac{11 + \nu_2}{7 + \nu_2}r\right) \tag{5.2}$$

$$Q_3(r) = \sqrt{\frac{2975 + 175\nu_2}{62 + 2\nu_2}}\left(r^7 - 2\frac{19 + \nu_2}{17 + \nu_2}r^5 + \frac{6}{5}\frac{21 + \nu_2}{17 + \nu_2}r^3 - \frac{1}{5}\frac{23 + \nu_2}{17 + \nu_2}r\right)$$

Построение ортономированных полиномов $Q_m(r)$, удовлетворяющих условиям (5.1), может быть продолжено с помощью процесса ортогонализации Шмидта; при этом система полиномов получится замкнутой [4] в пространстве с нормой, вытекающей из первого соотношения (5.1).

Теперь решение задачи (3.9) можно представить в виде

$$u_2(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m Q_m(r), \quad a_n = k\int_0^1 \tau(r) Q_n(r) r dr \tag{5.3}$$

Подставим функцию $u_2(r)$ в форме (5.3) во вторую формулу (3.10) и затем полученное для $\delta(r)$ выражение в формулу (4.8). В результате будем иметь

$$p(t) = -2t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m p_m(t), \quad p_m(t) = \frac{d}{dt} t\int_0^t \frac{Q_m(r)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \tag{5.4}$$

Здесь интеграл вычисляется по формуле

$$\int_0^t \frac{r^{2n+1} dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} t^{2n+1} \tag{5.5}$$

Подставим теперь выражение (5.4) для $p(t)$ в формулу (4.11) и затем полученное для $\tau(r)$ выражение во вторую формулу (5.3). В результате после некоторых преобразований придем к следующей бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов a_m разложения (5.3):

$$a_n = \frac{2}{\pi} k \int_0^1 \left[-2t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m p_m(t)\right] dt \int_0^t \frac{d}{dr}[r Q_n(r)] \frac{dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \tag{5.6}$$

Здесь внутренний интеграл вновь вычисляется по формуле (5.5), затем легко вычисляется и внешний интеграл.

После нахождения приближенного решения алгебраической системы (5.6) (например, методом редукции [5], сходимость которого проверяется численно) перемещения точек накладки могут быть найдены по первой формуле (5.3), контактные касательные напряжения с помощью второй формулы (3.10) и формулам (4.8), (4.11), а коэффициент, показывающий во сколько раз наличие накладки искажает деформацию полупространства, по формуле

$$\kappa = \left(2\int_0^1 u_2'(r) r dr\right)^{-1} = \left(2u_2(1) - 2\int_0^1 u_2(r) dr\right)^{-1} \tag{5.7}$$

Ниже даны значения величины κ, подсчитанные по формуле (5.7) при $\nu_2 = 0.3$ и различных значениях параметра k, определяемого последней формулой (2.3):

k	0.25	0.5	1	2	4
κ	8.941	5.099	3.167	2.184	1.674

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00002, 06-01-00022, 06-08-01595).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 403 с.
3. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 335 с.
4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
5. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 696 с.
6. *Александров В.М.* Взаимодействие плоского наклонного кольцевого штампа с упругим полупространством // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 132–139.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.10.2006