МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2007

УДК 539.3

© 2007 г. С.А. НАЗАРОВ

# ТОНКИЕ УПРУГИЕ ПОКРЫТИЯ И ПОВЕРХНОСТНАЯ ЭНТАЛЬПИЯ

Получены явные формулы для начальных членов асимптотики решения задачи о деформации тела с тонким упругим покрытием и на их основе предложены способы моделирования задачи при помощи краевых условий Вентцеля или регулярного возмущения границы. Указаны оценки асимптотических остатков в том числе и для формул, возникающих в результате моделирования.

**1. Массивное тело с тонким упругим покрытием.** Пусть $\Omega$ – плоское неоднородное анизотропное упругое тело, ограниченное простым гладким замкнутым контуром $\Gamma = \Gamma^0$. Масштабированием сведем его характерный размер к единичному и в $d$-окрестности $V_d$ контура определим естественные криволинейные ортогональные координаты: длину дуги $s$, отмеренную вдоль $\Gamma$, и ориентированное расстояние $n$ до $\Gamma$; здесь $n < 0$ внутри $\Omega$ и $d > 0$. Предположим, что тело $\Omega$ составное и содержит тонкое покрытие $\Omega_h^0$, заключенное между контурами $\Gamma$ и

$$\Gamma_h^1 = \{x \in V_d\colon n = -hH(s)\} \tag{1.1}$$

При этом $H$ – гладкая положительная функция переменной $s \in \Gamma$, а $h$ – малый положительный безразмерный параметр. Внутреннюю часть тела обозначим $\Omega_h^1 = \Omega \backslash \overline{\Omega_h^0}$.

Примем матричную запись определяющих соотношений линейной теории упругости (см., например, [1, 2]). Именно, образуем столбцы напряжений и деформаций

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sqrt{2}\sigma_{12})^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sqrt{2}\varepsilon_{12})^T \tag{1.2}$$

и положительно определенную симметрическую матрицу $A(x)$ упругих модулей, фигурирующую в законе Гука

$$\sigma(u; x) = A(x)\varepsilon(u; x) \tag{1.3}$$

Здесь $T$ – знак транспонирования, $\sigma_{jk}(u; x)$ и $\varepsilon_{jk}(u; x)$ – декартовы компоненты тензоров напряжений и деформаций, порожденные вектором (столбцом) смещений $u = (u_1, u_2)^T$, а множитель $\sqrt{2}$ введен в формулы (1.2) для того, чтобы уравнять натуральные нормы двухвалентных тензоров и имитирующих их столбцов высотой 3. Соотношения (1.2) и (1.3), разумеется, привязаны к зафиксированной системе декартовых координат $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, однако благодаря упомянутым множителям преобразования всех объектов при повороте декартовой системы осуществляются при помощи ортогональных матриц (см. [1, гл. 2] и [2], где множитель $\sqrt{2}$ отсутствует). Столбец $\varepsilon(u)$ рассчитывается по формулам

$$\varepsilon(u) = D(\nabla)u, \quad D(\nabla)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 \end{pmatrix}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

В соответствии с описанием свойств составного тела положим

$$A(x) = \begin{cases} A^1(x), & x \in \Omega_h^1 \\ A^0(\zeta, s), & x \in \Omega_h^0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Будем считать, что элементы матриц $A^1$ и $A^0$ суть гладкие функции переменных $x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ и $s \in \Gamma$, $\zeta := h^{-1}n \in \overline{\Upsilon(s)} := [-H(s), 0]$. Сужения полей на множества $\Omega_h^i$ помечаем верхним индексом $i = 0, 1$. Проекции вектора $u$ на оси $n$ и $s$ обозначаем $u_n$ и $u_s$.

Уравнения равновесия

$$\partial_1\sigma_{1k}(u; x) - \partial_2\sigma_{2k}(u; x) = f_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2 \tag{1.6}$$

которые из-за скачков упругих модулей (см. формулу (1.5)) включают условия сопряжения на контуре $\Gamma_h^1$, в матричной форме выглядят так:

$$D(-\nabla)^T A^i(x) D(\nabla) u^i(x) = f^i(x), \quad x \in \Omega_h^i, \quad i = 0, 1 \tag{1.7}$$

$$u^0(x) = u^1(x), \quad D(\nu(x))^T(A^0(\zeta, s)D(\nabla)u^0(x) - A^1(x)D(\nabla)u^1(x)) = 0, \quad x \in \Gamma_h^1 \tag{1.8}$$

Кроме того, $\nu = (\nu_1, \nu_2)^T$ – единичный вектор нормали к контуру $\Gamma_h^1$, внешней для области $\Omega_h^1$. Краевые условия

$$\sigma_{nn}^0(u^0; 0, s) = g_n(s), \quad \sigma_{sn}^0(u^0; 0, s) = g_s(s), \quad s \in \Gamma \tag{1.9}$$

принимают вид

$$D(n(x))^T A^0(0, s) D(\nabla) u^0(x) = g(s), \quad s \in \Gamma \tag{1.10}$$

Здесь $n = (n_1, n_2)^T$ – единичный вектор внешней нормали к границе тела $\Omega$; $\sigma_{nn}^0(u^0; n, s)$ и $\sigma_{sn}^0(u^0; n, s)$ – напряжения в криволинейных координатах. Массовые силы $f = (f_1, f_2)^T$ и поверхностные нагрузки $g = (g_1, g_2)^T$ предполагаются самоуравновешенными и гладко зависящими от переменных $x \in \overline{\Omega}$ и $s \in \Gamma$ соответственно.

В пп. 2–4 исследуется асимптотика при $h \to 0$ решения задачи (1.6), (1.9) о деформации составного тела, а в пп. 5 и 6 производится моделирование этой задачи: предлагаются более простые по постановке краевые задачи, решения которых доставляют двучленную асимптотику решения $u(x)$. Обоснованию асимптотических формул посвящен п. 7, в п. 8 обсуждаются возможные обобщения.

**2. Асимптотические конструкции.** Асимптотический анзац для решения задачи (1.7), (1.8), (1.10) (или, что то же, задачи (1.6), (1.9)) возьмем таким:

$$u^1(x) = v^0(x) + hv^1(x) + \ldots, \quad x \in \Omega_h^1 \tag{2.1}$$

$$u^0(x) = w^0(\zeta, s) + hw^1(\zeta, s) + h^2 w^2(\zeta, s) + \ldots, \quad x \in \Omega_h^0 \tag{2.2}$$

При этом $v^p$ и $w^q$ – гладкие вектор функции переменных $x \in \overline{\Omega}$ и $s \in \Gamma$, $\zeta \in \overline{\Upsilon(s)}$ соответственно. Изначально понятно, что члены разложения (2.1) регулярного типа следует искать как решения задач для не имеющего покрытия тела $\Omega$ с матрицей Гука $A^1(x)$:

$$D(-\nabla)^T A^1(x) D(\nabla) v^p(x) = \delta_{p,0} f(x), \quad x \in \Omega \tag{2.3}$$

$$D(n(x))^T A^1(x) D(\nabla) v^p(x) = t^p(s), \quad x \in \Gamma \tag{2.4}$$

В формуле (2.3) $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера. Массовые силы взяты из системы (1.6), но поверхностные нагрузки $t^p$ будут определены только после построения членов пограничного слоя (2.2), локализованного на тонкой полоске $\Omega_h^0$.

С целью указать задачи для определения вектор-функций $w^q$ перепишем уравнения равновесия (1.6) в криволинейных координатах

$$\begin{aligned} -\partial_n \sigma_{nn}(u) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{ns}(u) + \kappa(\sigma_{nn}(u) - \sigma_{ss}(u))) &= f_n \\ -\partial_n \sigma_{sn}(u) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{ss}(u) + 2\kappa \sigma_{sn}(u)) &= f_s \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\kappa(s)$ – кривизна контура $\Gamma$ в точке $s$ и $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ – якобиан. Закон Гука в координатах $n$, $s$:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{t}(\mathbf{u}) \tag{2.6}$$

содержит новые столбцы напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}(u) = (\sigma_{nn}(u), \sigma_{ss}(u), \sqrt{2}\sigma_{ns}(u))^T, \quad \mathbf{t}(u) = (\varepsilon_{nn}(u), \varepsilon_{ss}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{ns}(u))^T \\ &\varepsilon_{nn}(u) = \partial_n u_n, \quad \varepsilon_{ss}(u) = J^{-1}(\partial_s u_s + \kappa u_n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_{ns}(u) = \varepsilon_{sn}(u) = 1/2(\partial_n u_s + J^{-1}(\partial_s u_n - \kappa u_s)) \tag{2.8}$$

и новую матрицу $\mathbf{A}$. Примечательно то, что растяжение нормальной координаты $n \mapsto \zeta = h^{-1}n$, затребованное в анзаце (2.2), выделяет в соотношениях (2.5) и (2.8) асимптотически старшие (порядка $h^{-1}$) члены, принимающие вид

$$D(-\partial_\zeta, 0)^T \mathbf{s}^0(\mathbf{w}^0) = 0, \quad \mathbf{t}(\mathbf{w}^0) = D(\partial_\zeta, 0)\mathbf{w}^0$$

При этом $\mathbf{w}^q$ – столбец $(w_n^q, w_s^q)^T$. Таким образом, подставив формулу (2.2) в уравнения (2.5) и собрав множители при одинаковых степенях малого параметра $h$, приходим к системам обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке, зависящем от точки $s \in \Gamma$:

$$D(-\partial_\zeta, 0)^T \mathbf{A}^0(\zeta, s) D(\partial_\zeta, 0)\mathbf{w}^q(\zeta, s) = \mathbf{F}^q(\zeta, s), \quad \zeta \in \Upsilon(s) \tag{2.9}$$

Граничные условия для системы (2.9) проистекают от краевого условия (1.10) и первого условия сопряжения (1.8):

$$D(1, 0)^T \mathbf{A}^0(0, s) D(\partial_\zeta, 0)\mathbf{w}^q(0, s) = \mathbf{G}^q(s) \tag{2.10}$$

$$\mathbf{w}^q(-H(s), s) - \mathbf{u}^q(0, s) = \mathbf{K}^q(s) \tag{2.11}$$

Подчеркнем, что правая часть в соотношении (2.11) появляется при разложении полей $u^p$ в ряды Тейлора по переменной $n = h\zeta$.

Если $q = 0$, то правые части задачи (2.9)–(2.11) равны нулю, так как соответствующие члены служат множителями при $h^{-2}$ и $h^{-1}$ в соотношениях (2.5) и (1.10). Следовательно

$$\mathbf{w}^0(\zeta, s) = (w_n^0(\zeta, s), w_s^0(\zeta, s))^T = (v_n^0(0, s), v_s^0(0, s))^T = \mathbf{v}^0(0, s) \tag{2.12}$$

**3. Построение младших членов.** Поскольку главный член (2.12) пограничного слоя не зависит от быстрой переменной $\zeta$, имеем

$$\mathbf{F}^1(\zeta, s) = D(\partial_\zeta, 0)^T \mathbf{A}^0(0, s)\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0; s) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0; s) = (0, \partial_s v_s^0(0, s) + \kappa(s) v_n^0(0, s), 2^{-1/2}(\partial_s v_n^0(0, s) - \kappa(s) v_s^0(0, s)))^T \tag{3.2}$$

Отметим, что в формулу (3.1) помещен тот единственный член из системы (2.5), который приобретает порядок $h^{-1}$ при подстановке в нее анзаца (2.2), (2.12), а $\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0; s)$ – столбец (2.7) с компонентами, которые вычислены при помощи соотношений (2.8) по полю смещений $v^0(0, s)$, не зависящему от переменной $n$.

В правой части граничного условия (2.10), в частности, фигурирует нагрузка $\mathbf{g} = (g_n, g_s)^T$:

$$\mathbf{G}^1(s) = \mathbf{g}(s) - D(1, 0)^T \mathbf{A}^0(0, s)\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0; s)$$

Наконец, $\mathbf{K}^1(s) = -H(s)\partial_n \mathbf{v}^0(0, s)$, а значит,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^1(\zeta, s) &= \mathbf{v}^1(0, s) - H(s)\partial_n \mathbf{v}^0(0, s) + \\ &+ \int\limits_{-H(s)}^{\zeta} \mathbf{a}^0(\eta, s)^{-1}(\mathbf{g}(s) - D(1, 0)^T \mathbf{A}^0(\eta, s)\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0; s))d\eta\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{a}^0(\zeta, s)$ – матрица размером $2 \times 2$, симметрическая и положительно определенная

$$\mathbf{a}^0(\zeta, s) = D(1, 0)^T \mathbf{A}^0(\zeta, s) D(1, 0) \tag{3.4}$$

Вторые условия сопряжения (1.8) позволяют найти нагрузки $t^p$ в задачах (2.3), (2.4). Именно, подставив в эти условия анзацы (2.1), (2.2) и собрав члены порядка $1 = h^0$, обнаружим, что согласно соотношениям (2.12), (3.2) и (3.3) верны равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^0(s) &= (\sigma_{nn}^1(v^0; 0, s), \sigma_{sn}^1(v^0; 0, s))^T = D(1, 0)^T \mathbf{A}^0(-H(s), s) D(\partial_\zeta, 0)\mathbf{w}^1(-H(s), s) + \\ &+ D(1, 0)^T \mathbf{A}^0(-H(s), s)\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0; s) = \mathbf{g}(s)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Итак, $t^0(s) = g(s)$ и решение $v^0$ задачи (2.3), (2.4) определено.

Обратимся к членам $v^1$ и $w^2$ анзацев (2.1) и (2.2), которые сначала подставим во вторые условия сопряжения (1.8). При этом к функциям, зависящим от медленной переменной $n$, применим формулу Тейлора и положим $n = -hH(s)$. Проекции $\nu_n$ и $\nu_s$ вектора нормали $\nu$ к контуру (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned}\nu_n(n, s) &= (1 + h^2 J(n, s)^2 |\partial_s H(s)|^2)^{-1/2} = 1 + O(h^2) \\ \nu_s(n, s) &= \nu_n(n, s) h J(n, s)\partial_s H(s) = h\partial_s H(s) + O(h^2)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Поэтому после выделения членов порядка $h$ получим равенство

$$\begin{aligned}
&D(1,0)^T\mathbf{A}^0(-H(s),s)D(\partial_\zeta,0)\mathbf{w}^2(-H(s),s) = \mathbf{Q}^2(s) := \mathbf{t}^1(s)+\\
&+\partial_s H(s)(\sigma^1_{ns}(v^0;0,s)\sigma^1_{ss}(v^0;0,s))^T-\\
&-H(s)(\partial_n\sigma^1_{nn}(v^0;0,s),\partial_n\sigma^1_{ns}(v^0;0,s))^T-D(1,0)^T\mathbf{A}^0(-H(s),s)\mathbf{Y}(-H(s),s)-\\
&-\partial_s H(s)D(0,1)^T\mathbf{A}^0(-H(s),s)(D(\partial_\zeta,0)\mathbf{w}^1(-H(s),s)+\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0;s))
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь $\mathbf{Y}(\zeta,s)=\mathbf{t}^s(\mathbf{w}^1;\zeta,s)+H(s)\kappa(s)\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0;s)$. Отметим, что согласно уравнениям равновесия (2.5) для поля напряжений $\sigma(v^0)$ верны соотношения, помогающие обработать нормальные производные напряжений $\sigma^1_{nn}(v^0)$ и $\sigma^1_{ns}(v^0)$ на контуре $\Gamma$:

$$\begin{aligned}
-\partial_n\sigma^1_{nn}(v^0;0,s) &= f_n(0,s)+\partial_s\sigma^{-1}_{ns}(v^0;0,s)-\kappa(s)(\sigma^1_{ss}(v^0;0,s)-\sigma^1_{nn}(v^0;0,s))\\
-\partial_n\sigma^1_{ns}(v^0;0,s) &= f_s(0,s)+\partial_s\sigma^1_{ss}(v^0;0,s)+2\kappa(s)\sigma^1_{ns}(v^0;0,s)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Краевые условия (1.9) или (1.10) позволяют найти правую часть соотношения (2.10) при $q=2$, а именно

$$\mathbf{G}^2(s) = -D(1,0)^T\mathbf{A}^0(0,s)\mathbf{Y}(0,s)$$

Наконец, собрав слагаемые $O(1)$ в уравнениях равновесия (2.5) для поля смещения (2.2), вычислим правую часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.9) при $q=2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}^2(\zeta,s) = \mathbf{f}(0,s)+D(\partial_\zeta,0)^T\mathbf{A}^0(\zeta,s)\mathbf{Y}(\zeta,s)+\\
&+\left(D(0,\partial_s)^T+D(\kappa(s),0)^T-\kappa(s)\begin{pmatrix}\mathbf{e}^2\\-\mathbf{e}^3\end{pmatrix}\right)\mathbf{A}^0(\zeta,s)(D(\partial_\zeta,0)\mathbf{w}^1(\zeta,s)+\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0;s))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $\mathbf{e}^p=(\delta_{p,1},\delta_{p,2},\delta_{p,3})$ – строки длиной 3.

Граничное условие (3.9) при $q=2$ не понадобится, так как для определения нагрузки $t^1(s)$ достаточны условия разрешимости задачи Неймана (2.9), (2.10), (3.7):

$$\int_{-H(s)}^{0}\mathbf{F}^2(\zeta,s)d\zeta+\mathbf{G}^2(s)-\mathbf{Q}^2(s) = 0 \tag{3.10}$$

Найдем явное выражение для левой части равенства (3.10). Отметим, что в силу формулы интегрирования по частям все слагаемые, содержащие выражение $\mathbf{Y}$, взаимно сокращаются в этом равенстве и их рассматривать не нужно.

Учитывая соотношения (3.8), (3.5) и (2.4) при $p=0$, получим

$$\begin{aligned}
&\sigma^1_{ns}(v^0;0,s)\partial_s H(s)-H(s)\partial_n\sigma^1_{nn}(v^0;0,s) =\\
&= H(s)f_n(0,s)+\partial_s(H(s)g_s(s))-\kappa(s)H(s)g_n(s)+\kappa(s)H(s)\sigma^1_{ss}(v^0;0,s)\\
&\sigma^1_{ss}(v^0;0,s)\partial_s H(s)-H(s)\partial_n\sigma^1_{ns}(v^0;0,s) =\\
&= H(s)f_s(0,s)+2\kappa(s)H(s)g_s(s)+\partial_s(H(s)\sigma^1_{ss}(v^0;0,s))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Согласно равенствам (2.15) и (2.16) имеем

$$D(1,0)^T\int\limits_{-H(s)}^{0}\mathbf{A}^0(\zeta,s)(D(\partial_\zeta,0)\mathbf{w}^1(\zeta,s)+\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0;s))d\zeta = H(s)\mathbf{g}(s) \tag{3.12}$$

Рассмотрим столбец

$$\mathbf{X}(s) = D(0,1)^T\int\limits_{-H(s)}^{0}\mathbf{A}^0(\zeta,s)(D(\partial_\zeta,0)\mathbf{w}^1(\zeta,s)+\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0;s))d\zeta \tag{3.13}$$

Благодаря структуре матрицы $D$, указанной в формуле (1.4), первый элемент столбца (3.13) совпадает со вторым элементом столбца (3.12), т.е. $\mathbf{X}_1(s) = H(s)\mathbf{g}_2(s) = H(s)g_s(s)$. По определению матрицы (3.4) выполнено соотношение

$$D(1,0)(\mathbf{a}^0)^{-1}D(1,0)^T\mathbf{A}^0(\mathbf{e}^3)^T = D(1,0)(\mathbf{a}^0)^{-1}D(1,0)^T\mathbf{A}^0D(1,0)e^2 =$$
$$= D(1,0)\mathbf{e}^2 = (\mathbf{e}^3)^T,\quad \mathbf{e}^i = (\delta_{1,i},\delta_{2,i})^T,\quad i = 1,2$$

Таким образом, элемент $\mathbf{X}_2(s)$ не зависит от третьей компоненты столбца (3.2), и в силу формул (3.3) и (2.8), (3.2) справедливо представление

$$\mathbf{X}_2(s) = \mathbf{e}^2\int\limits_{-H(s)}^{0}\mathbf{A}^0(\zeta,s)(D(\partial_\zeta,0)\mathbf{w}^1(\zeta,s)+\mathbf{t}^s(\mathbf{v}^0;s))d\zeta = \mathbf{r}(s)^T\mathbf{g}(s)+q(s)\varepsilon_{ss}(\upsilon^0;0,s) \tag{3.14}$$

Столбец $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)^T$ и скаляр $q$ определены следующим образом:

$$\mathbf{r}(s)^T = \mathbf{e}^2\int\limits_{-H(s)}^{0}\mathbf{A}^0(\zeta,s)D(1,0)\mathbf{a}^0(\zeta,s)^{-1}d\zeta \tag{3.15}$$

$$q(s) = \mathbf{e}^2\int\limits_{-H(s)}^{0}(\mathbf{A}^0(\zeta,s)D(1,0)\mathbf{a}^0(\zeta,s)^{-1}D(1,0)^T\mathbf{A}^0(\zeta,s)-\mathbf{A}^0(\zeta,s))d\zeta(\mathbf{e}^2)^T \tag{3.16}$$

Соотношение (3.14) заканчивает подготовительные вычисления. Теперь при помощи формул (3.7), (3.9) и (3.11)–(3.14), часть которых используем несколько раз для обработки разных членов, преобразуем равенство (3.10) к виду

$$\begin{aligned} t_n^1(s) &= \mathbf{t}_1^1(s) = \kappa(s)(H(s)\sigma_{ss}^1(\upsilon^0;0,s)-q(s)\varepsilon_{ss}(\upsilon^0;0,s)-r(s)^Tg(s))\\ t_s^1(s) &= \mathbf{t}_2^1(s) = -\partial_s(H(s)\sigma_{ss}^1(\upsilon^0;0,s)-q(s)\varepsilon_{ss}(\upsilon^0;0,s)-r(s)^Tg(s)) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь $r(s)$ – вектор (столбец), проекции которого на оси $n$ и $s$ равны $r_n(s) = \mathbf{r}_1(s)$ и $r_s(s) = \mathbf{r}_2(s)$ соответственно. Отметим, что согласно формулам Френе нагрузка $t^1$ с компонентами (3.17) самоуравновешена.

**4. Упрощение формул.** Введем столбцы

$$\begin{aligned} \eta(\upsilon^0;0,s) &= (\sigma_{nn}^1(\upsilon^0;0,s),\varepsilon_{ss}(\upsilon^0;0,s),\sqrt{2}\sigma_{ns}^1(\upsilon^0;0,s))^T\\ \xi(\upsilon^0;0,s) &= (\varepsilon_{nn}(\upsilon^0;0,s),-\sigma_{ss}^1(\upsilon^0;0,s),\sqrt{2}\varepsilon_{ns}(\upsilon^0;0,s))^T \end{aligned} \tag{4.1}$$

Они получаются из столбцов напряжений и деформаций (2.7) в результате частичного преобразования Лежандра. При этом закон Гука (2.6) трансформируется в соотношение

$$\xi(\upsilon^0; 0, s) = \mathbf{Q}^1(0, s)\eta(\upsilon^0; 0, s) \tag{4.2}$$

Здесь $\mathbf{Q}^1$ – симметрическая $3 \times 3$ – матрица-функция, неособенная, но не положительно определенная. Потеря положительности вызвана тем, что при переходе от столбцов (2.7) к столбцам (3.1) происходит обмен вторыми компонентами. Все компоненты столбца $\eta(\upsilon^0; 0, s)$ могут быть измерены на поверхности однородного (без какого-либо покрытия) тела $\Omega$: напряжения $\eta_1(\upsilon^0; 0, s) = \sigma^1_{nn}(\upsilon^0; 0, s)$ и $2^{-1/2}\eta_3(\upsilon^0; 0, s) = \sigma^{-1}_{ns}(\upsilon^0; 0, s)$ заданы в краевых условиях (2.4) при $p = 0$ и в силу соотношений (2.8) деформация $\varepsilon_{ss}(\upsilon^0; 0, s)$ вычисляется по следу вектора смещений $\upsilon^0$ на Г. Интеграл

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma \xi(\upsilon^0; 0, s)^T \eta(\upsilon^0; 0, s) ds$$

называется поверхностной энтальпией [3].

Пусть $\mathbf{Q}^1_2 = (\mathbf{Q}^1_{21}, \mathbf{Q}^1_{22}, \mathbf{Q}^1_{23})$ – вторая строка матрицы $\mathbf{Q}$. При помощи равенства

$$\sigma^1_{ss}(\upsilon^0; 0, s) = -\mathbf{Q}^1_2(0, s)(g_n(s), \varepsilon_{ss}(\upsilon^0; 0, s), \sqrt{2}g_3(s))^T \tag{4.3}$$

преобразуем соотношения (3.17) к виду

$$\begin{aligned} t^1_n(s) &= -\kappa(s)(\alpha(s)\varepsilon_{ss}(\upsilon^0; 0, s) + k(s)^T g(s)) \\ t^1_s(s) &= \partial_s(\alpha(s)\varepsilon_{ss}(\upsilon^0; 0, s) + k(s)^T g(s)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(s) &= \mathbf{r}(s) + H(s)(\mathbf{Q}^1_{21}(0, s), \sqrt{2}\mathbf{Q}^1_{23}(0, s))^T \\ \alpha(s) &= q(s) + H(s)\mathbf{Q}^1_{22}(0, s) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Выполнив преобразование Лежандра, нетрудно вывести соотношение

$$\mathbf{Q}^1_{22} = -(\mathbf{B}^1_{22})^{-1} < 0 \tag{4.6}$$

Здесь $\mathbf{B}^1_{22}$ – элемент матрицы податливости $\mathbf{B}^1 = (\mathbf{A}^1)^{-1}$, обратной для матрицы Гука $\mathbf{A}^1$. Более того, совершив алгебраические операции, указанные в формуле (3.16), можно убедиться в том, что

$$q(s) = -\int_{-H(s)}^{0} \mathbf{Q}^0_{22}(\zeta, s) d\zeta \tag{4.7}$$

Вместо длинных выкладок приведем простое соображение: если $A^1(x) = A^0(x)$ и граница (1.1) раздела материалов введена искусственно, асимптотические формулы, разумеется, остаются в силе, однако по понятным причинам $\upsilon^1 = 0$, а значит, в частности, величина (4.5) равна нулю. Поскольку формула (3.16) содержит операции над матрицами с символьными элементами, произвольность "толщины" искусственного покрытия обеспечивает соотношение (4.7). Такое же рассуждение или равносильные ему алгебраические вычисления показывают, что согласно определению (3.15) справедливо представление

$$\mathbf{r}(s) = -\int_{-H(s)}^{0} (\mathbf{Q}_{21}^0(\zeta, s), \sqrt{2}\mathbf{Q}_{23}^0(\zeta, s))^T d\zeta$$

Итак, равенства (4.4) допускают следующую запись:

$$t_n^1(s) = -\kappa(s)T(s), \quad t_s^1(s) = \partial_s T(s)$$

$$T(s) = H(s)\mathbf{Q}_{22}^1(0, s)\xi^1(v^0; 0, s) - \int_{-H(s)}^{0} \mathbf{Q}_{22}^0(\zeta, s)d\zeta\xi^0(v^0; 0, s)$$

Отметим, что $3 \times 3$ – матрица, фигурирующая в подынтегральном выражении (3.16), вырожденная и не имеет физического смысла.

Для изотропного упругого материала с модулем сдвига $\mu > 0$ и коэффициентом Пуассона $\nu \in [0, 1/2)$ матрица $\mathbf{Q} = Q$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} (2\mu)^{-1}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} & -\nu(1-\nu)^{-1} & 0 \\ -\nu(1-\nu)^{-1} & -\mu(1-\nu)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (2\mu)^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

**5. Краевые условия Вентцеля.** В работах [4, 5], посвященных соответственно эффектам пограничного слоя в теории тонких пластин и различным сингулярно возмущенным краевым задачам для скалярного уравнения, был предложен прием объединения двух ($p = 0, 1$) предельных задач (2.3), (2.4) в общую, так называемую "результирующую", задачу, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} &-\partial_1\sigma_{1k}^1(v^m; x) - \partial_2\sigma_{2k}^1(v^m; x) = f(x), \quad x \in \Omega \\ &\sigma_{nn}^1(v^m; 0, s) + h\kappa(s)\alpha(s)\varepsilon_{ss}(v^m; 0, s) = g_n^w(s) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\sigma_{ns}^1(v^m; 0, s) - h\partial_s(\alpha(s)\varepsilon_{ss}(v^m; 0, s)) = g_s^w(s), \quad s \in \Gamma \tag{5.2}$$

Кроме того, согласно формулам (3.5) и (4.4) поверхностные нагрузки определены равенствами

$$g_n^w(s) = g_n(s) - \kappa(s)k(s)^T g(s), \quad g_s^w(s) = g_s(s) + \partial_s(k(s)^T g(s))$$

При определенных ограничениях на коэффициент (4.5) задача (5.1), (5.2) служит асимптотической моделью повышенной точности для задачи (1.6), (1.9) или (1.7), (1.8), (1.10) о деформации тела $\Omega_h^1$ с тонким покрытием $\Omega_h^0$. Действительно, в п. 7 будет показано, что решение $v^w$ доставляет двучленную асимптотику решения $u$, и оценены различные нормы разностей упругих полей.

Аналогичные наблюдения были сделаны в [6] для скалярной задачи Дирихле и в [7, 8] для задач гидромеханики в областях с мелкозернистыми и шероховатыми границами. В этих публикациях краевые условия, схожие с условиями (5.2), были названы "пристеночными" (wall–laws). Вообще же, они включают дифференциальный оператор –

$h\alpha(s)\partial_s^2 v_s^r$ второго порядка, и поэтому их следует интерпретировать как аналог скалярных условий Вентцеля (см., например, статью [9] и цитированную в ней литературу).

Краевой задаче (5.1), (5.2) отвечает функционал потенциальной энергии деформации

$$E^1(v^m;\, \Omega) + S(v^m;\, \Gamma) - W(v^m;\, \Omega, \Gamma) \tag{5.3}$$

Здесь $E^1$ и $S$ – упругая и поверхностная энергии, запасенные телом, а $W$ – работа внешних сил

$$E^1(v;\, \Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma^1(v;\, x)^T \varepsilon(v;\, x)dx, \quad S(v;\, \Gamma) = \frac{h}{2}\int_\Gamma \alpha(s)|\varepsilon_{ss}(v;\, 0, s)|^2 ds$$

$$W(v;\, \Omega, \Gamma) = \int_\Omega v(x)^T f(x)dx + \int_\Gamma v(0, s)^T g^r(s)ds$$

Пусть коэффициент (4.5) удовлетворяет ограничению

$$\alpha(s) > 0, \quad s \in \Gamma \tag{5.4}$$

Тогда решение $v^w$ задачи (5.1), (5.2), существующее ввиду самоуравновешенности нагрузки (5.3) и определенное с точностью до жестких смещений, доставляет глобальный минимум функционалу (5.3) (см. разд. 7). При нарушении требования (5.4) минимизационная задача для квадратичного функционала (5.3) перестает быть корректной. Более того, если $\alpha$ – отрицательная функция на контуре $\Gamma$, то найдется бесконечно малая последовательность $\{h_n\}$ положительных значений параметра $h$, при которых задача (5.1), (5.2) перестает быть разрешимой при естественных условиях (величины $(h_n)^{-1} > 0$ суть собственные числа соответствующей спектральной задачи Вентцеля).

Соотношения (4.5)–(4.7) позволяют дать такую формулировку требования (5.4), необходимого для применимости модели (5.1), (5.2) с краевыми условиями Вентцеля: в каждой точке $s \in \Gamma$ среднее по отрезку $(-hH(s), 0) \ni n$ величины $B_{ss}^{0ss}(h^{-1}n, s)^{-1}$, обратной для элемента $B_{ss}^{0ss}(h^{-1}n, s)$ тензора податливости материала покрытия, больше аналогичной величины $B_{ss}^{1ss}(0, s)^{-1}$ для материала самого тела. Если же всюду на контуре названные величины совпадают, то $\alpha(s) = 0$, а значит, сингулярное возмущение в краевом условии (5.2) и поверхностная энергия $S(v^w;\, \Gamma)$ в функционале (5.3) исчезают. В случае изотропных однородных материалов последнее требование эквивалентно равенству $\mu^0(1 - \nu^1) = \mu^1(1 - \nu^0)$ (напомним, что центральные элементы матрицы податливости $B$ и матрицы $Q$ из формул (4.2) и (4.8) различаются знаком).

**6. Асимптотически эквивалентное однородное тело.** Помимо ограничения (5.4) на коэффициент $\alpha$ модель (5.1), (5.2) обладает еще одним недостатком: второе краевое условие Вентцеля (5.2) содержит малый параметр $h$ при старшей производной $\alpha\partial_s^2$, что делает эту модель трудной для численной реализации. В статьях [4, 5, 10, 11] была выдвинута и разработана концепция гладкого изображения сингулярно возмущенной границы. Реализуем такой подход для задачи о деформации тела с тонким покрытием.

Рассмотрим тело $\Omega_{hr}$, ограниченное контуром

$$\Gamma_{hr} = \{x \in V_d\colon n = -hH_r(s)\} \tag{6.1}$$

и плоскую задачу теории упругости в матричной форме (см. соотношения (1.7) и (1.10)):

$$\begin{aligned} D(-\nabla)^T A^0(x) D(\nabla) v^r(x) &= f(x), \quad x \in \Omega_{hr} \\ D(n^r(x))^T A^0(x) D(\nabla) v^r(x) &= g^{hr}(x), \quad x \in \Gamma_{hr} \end{aligned} \qquad (6.2)$$

В краевом условии (6.2) фигурирует единичный вектор (столбец) $n^{hr}$ внешней нормали к границе $\partial\Omega_{hr} = \Gamma_{hr}$. Если функция $H_r$ в формуле (6.1) отрицательна, то регулярно возмущенная область $\Omega_{hr}$ содержит в себе исходную область $\Omega$, и поэтому предположим, что вектор-функция $f$ определена на множестве $\Omega \cup V_d \supset \Omega_{hr}$. Более того, все поля определенные в $\Omega$, считаются гладко продолженными вовне этой области. Поверхностные нагрузки допускают представление

$$g^{hr}(x) = g^0(s) + hg^1(s) + h^2\tilde{g}^{hr}(x) \qquad (6.3)$$

Асимптотику решения задачи (6.2) построить легко: члены $v^0$ и $v^1$ анзаца (2.1) являются решениями задач (2.3), (2.4), в которых нагрузки имеют вид

$$t^0(s) = g^0(s) \qquad (6.4)$$

$$\begin{aligned} t_n^1(s) &= g_n^1(s) - \partial_s H_r(s)\sigma_{ns}^1(v^0;\, 0, s) + H_r(s)\partial_n\sigma_{nn}^1(v^0;\, 0, s) \\ t_s^1(s) &= g_s^1(s) - \partial_s H_r(s)\sigma_{ss}^1(v^0;\, 0, s) + H_r(s)\partial_n\sigma_{ns}^1(v^0;\, 0, s) \end{aligned} \qquad (6.5)$$

Первые слагаемые в правых частях равенств (6.5) возникли из-за разложения (6.3); вторые – в связи с отклонением нормали $n^{hr}$ от нормали к контуру $\Gamma$ (см. соотношение (3.6), где произведена замена $H \mapsto H_r$), а третьи – при использовании формулы Тейлора для напряжений $\sigma(v^0;\, n, s)$ и переходе к $n = -hH_r(s)$. При помощи уравнений равновесия (3.8) и формулы (4.3) преобразуем выражения (6.5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} t_n^1(s) &= g_n^1(s) - g_n^{10}(s) - \kappa(s)\alpha_r(s)\sigma_{ss}^1(v^0;\, 0, s) \\ t_s^1(s) &= g_s^1(s) - g_s^{10}(s) + \partial_s(\alpha_r(s)\sigma_{ss}^1(v^0;\, 0, s)) \\ g_n^{10}(s) &= H_r(s)(f_n(0, s) - \kappa(s)g_n^0(s)) + \partial_s(H_r(s)g_s^0(s)) + k^r(s)^T g^0(s) \\ g_s^{10}(s) &= H_r(s)(f_s(0, s) - \kappa(s)g_s^0(s)) + \kappa(s)H_r(s)g_s^0(s) - \partial_s(k^r(s)^T g^0(s)) \\ \mathbf{k}^r(s) &= H_r(s)(\mathbf{Q}_{21}^1(0, s), \sqrt{2}\mathbf{Q}_{23}^1(0, s))^T, \quad \alpha_r(s) = H_r(s)\mathbf{Q}_{22}^1(0, s) \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Итак, для того чтобы нагрузки (6.4) и (6.6) не отличались от аналогичных нагрузок, указанных в формулах (3.5) и (4.4) соответственно, следует положить $\alpha_r(s) = \alpha(s)$ и

$$\begin{aligned} H_r(s) &= H(s) - \mathbf{Q}_{22}^1(0, s)^{-1} \int_{-H(s)}^{0} \mathbf{Q}_{22}^0(\zeta, s)\, d\zeta \\ g^0(s) &= g(s), \quad g_n^1(s) = g_n^{10}(s) - \kappa(s)k^r(s)^T g^0(s), \quad g_s^1(s) = g_s^{10}(s) + \partial_s(k^r(s)^T g^0(s)) \end{aligned} \qquad (6.7)$$

В результате поля $v^0$ и $v^1$, фигурирующее в асимптотическом разложении (2.1) двух решений $u$ и $u^r$, различаются разве лишь жесткими смещениями. Иными словами, задача (6.2) служит моделью повышенной точности для задачи (1.6), (1.9), так как решение $u^r$ дает двучленную асимптотику решения $u$.

Модель (6.2) в области $\Omega_{hr}$ формируется без каких-либо ограничений на физические и геометрические характеристики тонкого покрытия. Так, если величина (4.5) отрицательна и нарушено условие (5.4) применимости модели (5.1), (5.2), то попросту справедливы неравенство $H_r(s) > 0$ и включение $\overline{\Omega_{hr}} \subset \Omega$, т.е. асимптотически эквивалентное однородное тело $\overline{\Omega_{hr}}$ занимает меньший объем, чем тело $\overline{\Omega_h^1}$ вместе с покрытием $\overline{\Omega_h^0}$. При $\alpha(s) > 0$ согласно формулам (6.7) и (4.6) получаем, что $H_r(s) < 0$, т.е. тело $\Omega_{hr}$ занимает больший объем. В инженерных вопросах $h$ – малый, но фиксированный параметр, и поэтому понятие предельного положения $\Gamma^0$ границы $\Gamma_h^1$ раздела материалов весьма условно – правильно говорить об эталонной поверхности $\Gamma^*$ (the reference surface), выбор которой в значительно мере произволен: в [12] в качестве $\Gamma^*$ была взята линия раздела упругих материалов, а в п. 1 настоящей работы – внешняя поверхность $\Gamma^0$. В этом смысле метод моделирования при помощи регулярного возмущения границы [4, 5, 10, 11] заключается в обоснованном выборе эталонного контура (6.1): полное игнорирование покрытия вызывает погрешность $O(h^2)$, в то время как такое же действие в случае "неправильного" эталонного контура $\Gamma^0$ – бóльшую погрешность $O(h)$.

Самоуравновешенность нагрузок (6.4) и (6.6) обеспечена предположением о самоуравновешенности нагрузок $f$ и $g$ в исходной задаче (1.6), (1.9). Для нагрузок $f$ и $g^{hr}$ в задаче (6.2) такого свойства можно добиться путем подбора малого слагаемого $h^2\tilde{g}^{hr}(x)$ в представлении (6.3). Дополнительное слагаемое не нужно в модели (5.1), (5.2). Подчеркнем, что перенос нагрузок с одной поверхности на другую требует аккуратности, иначе появляются легко исправимые, но досадные опечатки [12].

**7. Обоснование асимптотических разложений.** Известно (см., например, [13, 14, 2]), что для поля смещений $u$, подчиненного условиям ортогональности

$$\int_\omega u_1(x)dx = \int_\omega u_2(x)dx = \int_\omega (x_2u_1(x) - x_1u_2(x))dx = 0 \tag{7.1}$$

где в качестве множества интегрирования возьмем $\omega = \Omega\backslash\overline{V_d} \subset \Omega_h^1$, справедливо неравенство Корна

$$\|u;\, H^1(\Omega)\| \le cE(u;\, \Omega) \tag{7.2}$$

При этом постоянная $c$ не зависит ни от параметра $h \in (0, h_0]$, ни от вектор-функции $u$. Далее считаем, что решения $u$ и $v^p$ задач (1.6), (1.9) и (2.3), (2.4), определенные с точностью до жестких смещений, удовлетворяют условию (7.1).

Обоснование асимптотики проводится по стандартной схеме: суммы из правых частей формул (2.1) и (2.2) подставляются в краевую задачу (1.7), (1.10) с условиями сопряжения (1.8), обрабатываются возникающие невязки и в соответствующем интегральном тождестве [15, 16] применяется неравенство Корна (7.2). На этом пути можно проверить оценку

$$\|u^1 - v^0 - hv^1;\, H^1(\Omega_h^1)\| + \|u^0 - w^0 - hw^1 - h^2w^2;\, H^1(\Omega_h^0)\| \le ch^2 \tag{7.3}$$

Отметим, что соболевская норма $\|h^2w^2;\, H^1(\Omega_h^0)\|$ решения типа пограничного слоя равна $O(h^{3/2})$, т.е. слагаемое $w^2$ помещено в соотношение (7.3) обосновано.

Столь же просто доказываются оценки остатков в асимптотических разложениях решений задач (5.1), (5.2) и (6.2):

$$\|v^m - v^0 - hv^1;\, H^1(\Omega)\| \le ch^2; \quad \|v^r - v^0 - hv^1;\, H^1(\Omega_{hr})\| \le ch^2 \tag{7.4}$$

Первая оценка (7.4), разумеется, верна только при условии (5.4).

Из соотношений (7.3), (7.4) и (2.12) вытекают неравенства

$$\begin{gathered}\|u - v^w;\, L_2(\Omega)\| + h\|u - v^m;\, H^1(\Omega)\| \le ch^{3/2}\\ \|u - v^r;\, L_2(\Omega)\| + h\|u - v^r;\, H^1(\Omega)\| \le ch^{3/2}\end{gathered} \tag{7.5}$$

Отметим, что в случае $\Omega \not\subset \Omega_{hr}$ поле $v^r$ гладко продолжено за пределы области $\Omega_{hr}$. При выводе неравенств (7.5) пришлось удалить слагаемые типа пограничного слоя из асимптотики (2.1), (2.2) решения задачи (1.6), (1.9). Формулы

$$\begin{gathered}\|v^0 - w^0;\, L_2(\Omega_h^0)\| \le ch^{3/2}; \quad \|\nabla_x(v^0 - w^0);\, L_2(\Omega_h^0)\| \le ch^{1/2}\\ \|h^q w^q;\, L_2(\Omega_h^0)\| \le ch^{q+1/2}, \quad \|\nabla_x h^q w^q;\, L_2(\Omega_h^0)\| \le ch^{q-1/2} \;(q = 1, 2)\end{gathered} \tag{7.6}$$

поясняют распределение степеней малого параметра в левых частях неравенств (7.5). В соотношениях (7.6) учтено, что $w^0(\eta, s) = v^0(0, s)$.

Согласно неравенствам (7.5) точность приближения по норме $L_2(\Omega)$ полей смещений $u$ и напряжений $\sigma(u)$ полями $v^w$ и $\sigma^1(v^w)$ или $v^r$ и $\sigma^1(v^r)$ составляет $O(h^{3/2})$ и $O(h^{1/2})$ соответственно. Таким образом, двучленная асимптотика оказывается оправданной лишь в слабой $L_2$-норме. Тем не менее, такая аппроксимация вполне достаточна для многих целей (см. работы [17, 18] и др.). Так, например, в случае отсутствия поверхностных нагрузок имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(u;x)^T\varepsilon(u;x)dx - \int_\Omega f(x)^T u(x)dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega f(x)^T u(x)dx =\\ = -\frac{1}{2}\int_\Omega f(x)^T v^m(x)dx + O(h^{3/2}) = E^1(v^m;\Omega) + S(v^m;\Gamma) - \int_\Omega f(x)^T v^m(x)dx + O(h^{3/2})\end{gathered} \tag{7.7}$$

Иными словами, потенциальная энергия деформации составного тела $\Omega_h^1 \cup \Omega_h^0$ лишь малой величиной $O(h^{3/2})$ отличается от потенциальной энергии деформации (5.3) в модели (5.1). Аналогичное заключение можно сделать о модели (6.2). Формула (7.7) позволяет моделировать развитие внутренней трещины на основе энергетического критерия разрушения. Кроме того, в силу результатов [5] имеется связь между частотами собственных колебаний составного тела и частотами искусственно введенных упругих тел – его моделей; согласование с асимптотическими формулами для упругих энергий обусловлено формулой Рэлея.

**8. Обобщения и следствия.** *8.1. Жесткие покрытия.* В предыдущих разделах предполагалось, что модули упругости тела $\Omega_h^1$ и покрытия $\Omega_h^0$ имеют один порядок в сравнении с малым параметром $h$. Проделанные вычисления позволяют найти асимптотику решения задачи (1.7), (1.8), (1.10) и в том случае, когда упругие свойства материалов контрастны. Например, если покрытие намного жестче и одинаковый порядок имеют элементы матриц $A^1(x)$ и $A^{00}(h^{-1}n, s) = hA^0(h^{-1}n, s)$ (см. формулы (1.5)), то в качестве предельной задачи выступает система уравнений равновесия (2.3) при $p = 0$, снабженная краевыми условиями Вентцеля

$$\begin{aligned} &\sigma^1_{nn}(v^0;\, 0, s) + \kappa(s)\alpha_0(s)\varepsilon_{ss}(v^0;\, 0, s) \;=\; g_n(s) \\ &\sigma^1_{ns}(v^0;\, 0, s) - \partial_s(\alpha_0(s)\varepsilon_{ss}(v^0;\, 0, s)) \;=\; g_s(s) \\ &\alpha_0(s) \;=\; \int\limits_{-H(s)}^{0} \mathbf{B}^{00}_{22}(\zeta, s)^{-1} d\zeta - H(s)\mathbf{B}^1_{22}(0, s)^{-1} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Здесь $\mathbf{B}^{00}_{22}(0, s)$ – элемент матрицы податливости, порожденной матрицей Гука $\mathbf{A}^{00}(0, s)$.

*8.2. Слоистые покрытия.* Явные формулы для упругих характеристик тонких пластин [2, гл. 4, § 2] показывают, что величина $hq(s)$, вычисленная согласно соотношениям (4.7) и (4.6), совпадает с модулем упругости пластины с толщиной $hH(s)$ и матрицей Гука $\mathbf{A}^0(h^{-1}n, s)$, отвечающим ее продольной деформации. Иными словами, краевые условия Вентцеля (5.2) и (8.1) учитывают сопротивление покрытия на продольное растяжение.

Правая часть равенства (4.5) содержит разность жесткостей на растяжение упомянутой пластины с матрицами Гука $\mathbf{A}^0(h^{-1}n, s)$ и $\mathbf{A}^1(0, s)$. Свойство аддитивности жесткостных характеристик пластин [2, гл. 4, §2] устанавливает, что в случае композитного слоистого покрытия коэффициент $\alpha(s)$ равен сумме таких коэффициентов для индивидуальных слоев.

*8.3. Тело с угловыми точками.* Если контур $\Gamma$ негладкий и имеет излом в точке $P$, то решения $v^0$ и $v^1$ могут приобрести особенности в этой точке, которые передаются членам пограничного слоя (2.2) и разрушают процедуру обоснования асимптотики, описанную в п. 7. Тем не менее, при отсутствии сингулярностей у поля напряжений $\sigma^1(v^0)$ (например, изотропное тело и угол раствором меньшим $\pi$) поля смещений $v^0$ и $v^1$ попадают в пространства Соболева $H^2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ соответственно, что сохраняет возможность оправдать асимптотику по изложенной схеме. При наличии сингулярностей у напряжений $\sigma^1(v^0)$ возникает проблема даже с нахождением второго члена $v^1$ асимптотического анзаца (2.1): определяющим вблизи угловой точки становится явление степенного пограничного слоя. Процедуры построения таких пограничных слоев разработаны в полной мере в монографии [19] (см. также статьи [10, 20, 21] по задачам теории упругости). Отметим, что для угла любого раствора решение $v^0$ задачи (2.3), (2.4) при $p = 0$ остается главным членом асимптотики решения $v^0$ задачи (1.7), (1.8), (1.10), но краевые условия Вентцеля становятся бесполезными для моделирования, так как из-за присутствия в них дифференциального оператора второго порядка искажается поведение поля напряжений $\sigma^1(v^w)$ около угловой точки.

*8.4. Жесткое защемление тела с тонким покрытием.* Рассмотрим уравнения равновесия (1.6) с краевыми условиями жесткого защемления внешней поверхности составного тела $\Omega^1_h \cup \Omega^0_h$:

$$u(x) \;=\; 0, \quad x \in \Gamma \tag{8.2}$$

Процедура построения асимптотики упрощается: по понятным причинам главный член $w^0$ пограничного слоя равен нулю, система уравнений (2.3) при $p = 0$ приобретает краевое условие

$$v^0(x) \;=\; 0, \quad x \in \Gamma \tag{8.3}$$

Кроме того, слагаемое $w^1$ является решением однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.9) с граничными условиями

$$D(1, 0)^T A^0(-H(s), s) D(\partial_\zeta, 0)\mathbf{w}^1(-H(s), s) \;=\; D(1, 0)^T \mathbf{s}^1(v^0;\, 0, s) \tag{8.4}$$

$$\mathbf{w}^1(0, s) = 0 \tag{8.5}$$

Решение задачи (2.9), (8.4), (8.5) определено равенством

$$\mathbf{w}^1(\zeta, s) = -\int_{\zeta}^{0} \mathbf{a}^0(\eta, s)^{-1} d\eta D(1, 0)^T \mathbf{s}^1(v^0; 0, s) \tag{8.6}$$

Отметим, что по сравнению с процедурой, описанной в п. 2 и относящейся к краевым условиям в напряжениях, условия сопряжения (1.8) обменялись ролями: второе отошло в задачу для нахождения вектор-функции (8.6), а первое породило краевое условие для члена разложения (2.1) регулярного типа

$$\mathbf{v}^1(0, s) = H(s)\partial_n \mathbf{v}^0(0, s) - H(s)\mathbf{b}^0(s)^{-1}(\sigma_{nn}^1(v^0; 0, s), \sigma_{ns}^1(v^0; 0, s))^T$$
$$\mathbf{b}^0(s) = H(s)^{-1} \int_{-H(s)}^{0} \mathbf{a}^0(\zeta, s)^{-1} d\zeta \tag{8.7}$$

Здесь, как и ранее в соотношении (2.11), учтена формула Тейлора для вектор-функции $n \mapsto \mathbf{v}^0(n, s)$.

В п. 4 для придания нагрузкам (3.17) правильной формы использовано понятие поверхностной энтальпии (см. соотношения (4.1) и (4.2)). Для обработки правой части условия (8.7) достаточно закона Гука (2.6), т.е. требуются только энергетические характеристики. В самом деле, согласно равенствам (2.8) и (8.3) деформации определены формулами

$$\varepsilon_{nn}(v^0; 0, s) = \partial_n v_n^0(0, s), \quad \varepsilon_{ss}(v^0; 0, s) = 0, \quad \varepsilon_{ns}(v^0; 0, s) = \frac{1}{2}\partial_n v_s^0(0, s)$$

Значит, условие (8.7) принимает вид

$$\mathbf{v}^1(0, s) = H(s)(\mathbf{b}^1(0, s)^{-1} - \mathbf{b}^0(s)^{-1})(\sigma_{nn}^1(v^0; 0, s), \sigma_{ns}^1(v^0; 0, s))^T$$

При этом симметрическая и положительно определенная $2 \times 2$-матрица $\mathbf{b}^1(0, s)^{-1} = \mathbf{a}^1(0, s)$ задана равенством (3.4). В изотропном случае матрица $\mathbf{b}^1 = b^1 = \mathrm{diag}([2\mu(1-\nu)]^{-1}(1-2\nu), \mu^{-1})$ является диагональной.

Моделирование задачи (1.6), (8.2) порождает краевое условие Робэна

$$(\sigma_{nn}^1(v^w; 0, s), \sigma_{ns}^1(v^w; 0, s))^T - h^{-1}H(s)^{-1}\mathbf{m}(s)^{-1}\mathbf{v}^w(0, s) = 0$$

Оно имеет смысл только в случае положительно определенной матрицы $\mathbf{m}(s) = \mathbf{b}^1(0, s)^{-1} - \mathbf{b}^0(s)^{-1}$. Если это требование нарушено, то модель в регулярно возмущенной области $\Omega_{hr}$, ограниченной контуром (6.1), строится, например, при помощи метода [4, 5, 11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-257) и гранта SFB TRR 30.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 418 с.
2. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2001. 408 с.
3. *Назаров С.А.* Квазистатическая модель эволюции межфазной поверхности внутри твердого деформированного тела // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 458–472.

4. *Зорин И.С., Назаров С.А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 642–650.
5. *Назаров С.А.* Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями // Матем. сборник. 1990. Т. 181. № 3. С. 291–320.
6. *Achdou Y., Pironneau O.* Domain decomposition and wall-laws // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. T. 320. P. 541–547.
7. *Mohammadi B., Pironneau O., Vallentin F.* Rough boundaries and wall-laws // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1998. V. 27. P. 169–177.
8. *Jäger W., Micelič A., Neuss N.* Asymptotic analysis of the laminar viscous flow over a porous bed // SIAM J. Sci. Comput. 2001. V. 22. № 6. P. 2006–2028.
9. *Лукьянов В.В., Назаров А.И.* Решение задачи Вентцеля для уравнений Лапласа и Гельмгольца с помощью итерированных потенциалов // Зап. научн. семинаров петербург. отд. матем. ин-та РАН. 1998. Т. 250. С. 203–218.
10. *Назаров С.А.* Об эффекте трехмерности вблизи вершины трещины в тонкой пластине // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 500–510.
11. *Назаров С.А.* Пограничные слои и условия шарнирного опирания для тонких пластин // Зап. научн. семинаров петербург. отд. матем. ин-та РАН. 1999. Т. 257. С. 228–287.
12. *Морозов Н.Ф., Назаров С.А., Проскура А.В.* Краевые задачи теории упругости для плоских областей с тонкими окаймлениями // Механика деформируемых тел. М.: Наука, 1986. С. 82–93.
13. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М: Наука, 1980. 384 с.
14. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна. // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
15. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
16. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 132 с.
17. *Назаров С.А.* Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений // Тр. Санкт-Петербург. матем. о-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
18. *Nazarov S.A., Sokolowski J.* Asymptotic analysis of shape functionals // J. Math. Pures Appl. 2003. V. 82. № 2. P. 125–196.
19. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981. 208 с.
20. *Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Трещины в композитных материалах. 1. Полубесконечная трещина в упругой плоскости с ортотропной композитной полосой // Механика композитных материалов. 1990. № 5. С. 842–851.
21. *Назаров С.А.* Проявление пространственной структуры поля напряжений в окрестности угловой точки тонкой пластины // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 653–661.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
14.12.2006