

УДК 539.3

© 2007 г. В.А. БАБЕШКО, С.В. РАТНЕР, П.В. СЫРОМЯТНИКОВ

**АНИЗОТРОПНЫЕ ТЕЛА С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ.
СЛУЧАЙ СОВОКУПНОСТИ ТРЕЩИН**

На основании теоремы Бетти получены интегральные уравнения динамической теории упругости для многослойного выпуклого тела с произвольной упругой анизотропией слоев, содержащих плоские бесконечно тонкие трещины. Системы интегральных уравнений связывают скачки перемещений и напряжений на берегах трещин и формулируются в образах Фурье численно. Для случая плоскопараллельных слоев с совокупностью плоских трещин на границах между слоями предлагается простой численно-аналитический метод построения символа Фурье-матрицы ядра системы интегральных уравнений. Метод устойчив и требует решения линейных систем только шестого порядка при любом количестве слоев и произвольной комбинации непрерывных и разрывных условий на границах слоев. Численные примеры приводятся для пакета из четырех разнородных анизотропных слоев.

Одиночные неоднородности различной природы и их совокупности являются частым объектом задач механики, теории разрушения, сейсмологии, электроники. Дефекты в форме трещин или включений возникают в элементах конструкций, в геологических структурах и являются сильными концентраторами напряжений и одним из предвестников начала хрупкого разрушения. Проблемы с единичной неоднородностью исследованы на сегодняшний день достаточно полно, а в случае совокупностей – весьма слабо, что вполне объясняется сложностями математического характера.

Для множественных неоднородностей специального вида – так называемых “вирусов” вибропрочности [1, 2] – был предложен существенно модифицированный в этих целях метод факторизации [3], применимый к краевым задачам для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами любого конечного порядка и сред различной физической природы, обязательно деформируемых, в произвольных областях с кусочно-гладкими границами [4, 5].

В данной работе развивается более частный, чем метод факторизации, но и более простой подход, основанный на обобщении теоремы Бетти на случай анизотропных и электроупругих сред [6], первоначально предложенный в [1, 2] для изотропных сред. Другой подход к задачам в сходной постановке для полостей-трещин в слоисто-неоднородных упругих средах предложен в [7].

Рассматривается выпуклое упругое анизотропное тело, разделенное на N параллельных сечений. В ограниченном теле слои ограничены и, если исходное тело не является слоем, верхняя граница самого верхнего слоя и нижняя граница самого нижнего слоя уже не будут являться плоскостями. В случае неограниченного тела появляются два разделенных полуограниченных тела типа полупространств.

Расположив плоскость $x_1o_1x_2$ параллельно плоскостям неоднородностей, приходим к задаче, когда внутри упругого ограниченного тела в сечении $x_3 = h_n$ имеются неоднородности с носителями S_n ($n = 1, 2, \dots, N$), объединения которых может представлять собой совокупность одно- или многосвязных областей. Согласно принятым в [1] обозначениям такая совокупность неоднородностей обозначается $V(S_n)$ ($n < N$) и называется N -уровне-

вым “вирусом” вибропрочности класса 2 вида S . Неоднородности – трещины или включения – описываются теорией Гриффитса [8].

Для вывода интегральных уравнений применим метод, основанный на теореме Бетти и развитый в [9]. Обозначим через h_0 и h_{N+1} соответственно вертикальную координату самой нижней и самой верхней точек тела. Пусть S_0 – полная поверхность тела, представляющая собой объединение внешних областей, занятых неоднородностями; u_{ns}^\pm , τ_{ns}^\pm – перемещения и напряжения, действующие в сечениях $x_3 = h_n$ при $x_3 \rightarrow h_n \pm 0$; u_{ns} – перемещения на поверхности тела, причем на куполе тела – для самого верхнего слоя, на донной части тела – для нижнего, для промежуточных слоев – на их боковых поверхностях и в сечениях; $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S рассматриваемого тела с сечениями $x_3 = h_n$:

$$\tau_{ns} = \begin{cases} \tau_{ns}^+, & x_3 = h_n + 0 \\ \tau_{ns}^-, & x_3 = h_n - 0 \end{cases}, \quad u_{ns} = \begin{cases} u_{ns}^+, & x_3 = h_n + 0 \\ u_{ns}^-, & x_3 = h_n - 0 \end{cases}$$

При сделанных предположениях краевая задача эквивалентна системе интегральных уравнений (СИУ) следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{m=1}^3 \iint_{S_n} L_{km}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa, \mathbf{l}) u_{nm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)) dS = \\ & = \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{m=1}^3 \iint_{S_n} D_{km}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa) \tau_{nm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)) dS \quad (1) \\ & |\alpha_1| \leq \infty, \quad |\alpha_2| \leq \infty, \quad \alpha_3 = \sigma_k^\pm(\alpha_1, \alpha_2, \kappa) \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Поясним смысл входящих в уравнение (1) величин. Введем матрицу \mathbf{Y} с элементами Y_{nm} :

$$Y_{nm} = - \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^3 C_{mjnp} \alpha_j \alpha_p + \delta_{nm} \kappa^2, \quad \kappa^2 = \rho \omega^2 \quad (n, m = 1, 2, 3) \quad (2)$$

где C_{mjnp} – тензор коэффициентов упругости тела; ω – круговая частота; ρ – плотность; κ – приведенная частота; δ_{nm} – символ Кронекера; α_j – параметры преобразования Фурье.

Запишем элементы матрицы \mathbf{Y} в виде квадратных многочленов от α_3 , коэффициенты $b_{nm}^{(1)}$ которых зависят от $\alpha_1, \alpha_2, \kappa$:

$$Y_{nm} = b_{nm}^{(2)} \alpha_3^2 + b_{nm}^{(1)} \alpha_3 + b_{nm}^{(0)}, \quad b_{nm}^{(2)} = -C_{m3n3} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} b_{nm}^{(1)} &= b_{nm}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) = -(C_{m1n3} + C_{m3n1})\alpha_1 - (C_{m2n3} + C_{m3n2})\alpha_2 \\ b_{nm}^{(0)} &= b_{nm}^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2, \kappa) = -C_{m1n1}\alpha_1^2 - (C_{m1n2} + C_{m2n1})\alpha_1\alpha_2 - C_{m2n2}\alpha_2^2 + \delta_{mn}\kappa^2 \end{aligned}$$

Обозначим определитель матрицы \mathbf{Y} через V :

$$V = \det \mathbf{Y} = Y_{11}Y_{22}Y_{33} + Y_{31}Y_{12}Y_{21} + Y_{13}Y_{21}Y_{12} - Y_{13}Y_{22}Y_{31} - Y_{11}Y_{21}Y_{32} - Y_{33}Y_{12}Y_{21} \quad (4)$$

Как видно из (3), (4) определитель V является многочленом шестой степени относительно α_3 :

$$V = \sum_{r=0}^6 P_r \alpha_3^r \quad (5)$$

Используя формулы (3), (4) коэффициенты P_r многочлена (5), в принципе, можно получить явно. Из-за громоздкости конечных выражений укажем только способ их вывода. Каждому произведению вида $Y_{ij} Y_{kl} Y_{nm}$ в формуле (4) соответствуют коэффициенты при α_3^r , которые обозначим $P_{ij,kl,nm}^{(r)}$:

$$P_{ij,kl,nm}^{(6)} = b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(2)}, \quad P_{ij,kl,nm}^{(5)} = b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(1)}$$

$$P_{ij,kl,nm}^{(4)} = b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(0)}$$

$$P_{ij,kl,nm}^{(3)} = b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(0)} + b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(0)}$$

$$P_{ij,kl,nm}^{(2)} = b_{ij}^{(2)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(0)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(2)} b_{nm}^{(0)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(2)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(1)} + b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(0)}$$

$$P_{ij,kl,nm}^{(1)} = b_{ij}^{(1)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(0)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(1)} b_{nm}^{(0)} + b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(1)}, \quad P_{ij,kl,nm}^{(0)} = b_{ij}^{(0)} b_{kl}^{(0)} b_{nm}^{(0)}$$

Окончательно коэффициенты P_r многочлена (5) теперь можно записать следующим образом

$$P_r = P_{11,22,33}^{(r)} + P_{31,12,21}^{(r)} + P_{13,21,12}^{(r)} - P_{13,22,31}^{(r)} - P_{11,21,32}^{(r)} - P_{33,12,21}^{(r)}, \quad r = 0, 1, \dots, 6$$

Корни σ_n многочлена (5) разобьем на две равные группы и обозначим как σ_n^\pm ($n = 1, 2, 3$). Здесь σ_n^+ соответствуют $l_3 > 0$ и выбираются согласно условиям убывания или излучения при $x_3 \rightarrow +\infty$ [9]. В свою очередь, σ_n^- соответствуют $l_3 < 0$ и выбираются согласно условиям убывания или излучения при $x_3 \rightarrow -\infty$ (предполагается, что l_3 может обращаться в ноль лишь на бесконечности).

Величины σ_n^\pm входят в матрицы \mathbf{L} , \mathbf{D} (1) в составе экспонент $\exp(i\sigma_n^\pm x_3)$. Несложно показать, что σ_n^+ с положительной мнимой частью удовлетворяет условию убывания при $x_3 \rightarrow +\infty$, а σ_n^- с отрицательной мнимой частью – соответственно при $x_3 \rightarrow -\infty$. Кратко условия убывания при $x_3 \rightarrow \pm\infty$, когда $\text{Im} \sigma_n^\pm \neq 0$, можно сформулировать следующим образом: $\text{Im} \sigma_n^+ > 0 \leftrightarrow x_3 \rightarrow +\infty$, $\text{Im} \sigma_n^- < 0 \leftrightarrow x_3 \rightarrow -\infty$.

Для отбора чисто действительных σ_m^\pm можно дополнительно использовать принцип предельного поглощения [9]: введение комплексной частоты $\omega_\varepsilon = \omega^2 + i\varepsilon\omega/\rho$ ($\varepsilon > 0$), соот-

ответствующей малому внутреннему трению, придает всем возмущенным $\sigma_m(\varepsilon)$ ненулевую мнимую часть для любых α_1, α_2 ($\omega \neq 0$). Причем в любом наборе $\sigma_m(\varepsilon)$ число величин с положительной мнимой частью равно числу $\sigma_m(\varepsilon)$ с отрицательной мнимой частью. В окончательное разбиение попадают величины σ_m^\pm , являющиеся соответствующими пределами $\sigma_m(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Разбиение самих $\sigma_m(\varepsilon)$ не представляет труда, так как $\text{Im}\sigma_m(\varepsilon) \neq 0$. Таким образом, согласно принципу предельного поглощения и условиям убывания значения σ_m^\pm отбираются по следующему правилу:

$$\sigma_m^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_m(\varepsilon)), \quad \text{Im}\sigma_m(\varepsilon) < 0; \quad \sigma_m^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_m(\varepsilon)), \quad \text{Im}\sigma_m(\varepsilon) > 0$$

В частности, в изотропном случае $\sigma_n^\pm = \pm\sigma_n$. Для анизотропных материалов более подробно способы выбора σ_n^\pm описаны в [10].

Далее, введем матрицу $\mathbf{c} = \mathbf{Y}^{-1}$ и выпишем в явном виде матрицу \mathbf{c}^0 , являющуюся соединенной к матрице \mathbf{c} :

$$\mathbf{c}^0 = \mathbf{Vc} \begin{pmatrix} (Y_{22}Y_{33} - Y_{23}Y_{32}) & (Y_{13}Y_{32} - Y_{12}Y_{33}) & (Y_{12}Y_{23} - Y_{13}Y_{22}) \\ (Y_{23}Y_{31} - Y_{21}Y_{33}) & (Y_{11}Y_{33} - Y_{13}Y_{31}) & (Y_{13}Y_{21} - Y_{11}Y_{23}) \\ (Y_{21}Y_{32} - Y_{22}Y_{31}) & (Y_{12}Y_{31} - Y_{11}Y_{32}) & (Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Как видно из (3),(6), элементы матрицы \mathbf{c}^0 являются многочленами четвертой степени относительно α_3 :

$$c_{ij}^0 = \sum_{r=0}^4 P_{ij}^{(r)} \alpha_3^r \quad (7)$$

Коэффициенты $P_{ij}^{(r)}$, соответствующие произведению вида $Y_{ab}Y_{cd} - Y_{ef}Y_{gh}$ в (6), можно получить явно:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(4)} &= b_{ab}^{(2)}b_{cd}^{(2)} - b_{ef}^{(2)}b_{gh}^{(2)}, & P_{ij}^{(3)} &= b_{ab}^{(2)}b_{cd}^{(1)} + b_{ab}^{(1)}b_{cd}^{(2)} - b_{ef}^{(2)}b_{gh}^{(1)} - b_{ef}^{(1)}b_{gh}^{(2)} \\ P_{ij}^{(2)} &= b_{ab}^{(2)}b_{cd}^{(0)} + b_{ab}^{(1)}b_{cd}^{(1)} + b_{ab}^{(0)}b_{cd}^{(2)} - b_{ef}^{(2)}b_{gh}^{(0)} - b_{ef}^{(1)}b_{gh}^{(1)} - b_{ef}^{(0)}b_{gh}^{(2)} \\ P_{ij}^{(1)} &= b_{ab}^{(1)}b_{cd}^{(0)} + b_{ab}^{(0)}b_{cd}^{(1)} - b_{ef}^{(0)}b_{gh}^{(0)} - b_{ef}^{(0)}b_{gh}^{(1)}, & P_{ij}^{(0)} &= b_{ab}^{(0)}b_{cd}^{(0)} - b_{ef}^{(0)}b_{gh}^{(0)} \end{aligned}$$

В изотропном случае при вычислении $c^0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa)$, когда корень $\alpha_3 = \sigma_0$ многочлена (5) соответствует скорости поперечной волны, все элементы матрицы \mathbf{c}^0 приобретают нулевой множитель $(\alpha_3 - \sigma_0)$. Чтобы выделить ненулевую составляющую c_{ij}^0 , необходимо многочлены (7) поделить на $(\alpha_3 - \sigma_0)$. После сокращений c_{ij}^0 будут являться мно-

гочленами третьего порядка $c_{ij}^0 = \sum_{r=0}^3 \tilde{P}_{ij}^{(r)} \alpha_3^r$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ij}^{(3)} &= P_{ij}^{(4)}, & \tilde{P}_{ij}^{(2)} &= P_{ij}^{(3)} + \sigma_0 P_{ij}^{(4)} \\ \tilde{P}_{ij}^{(1)} &= P_{ij}^{(2)} + \sigma_0 P_{ij}^{(3)} + \sigma_0^2 P_{ij}^{(4)}, & \tilde{P}_{ij}^{(0)} &= P_{ij}^{(1)} + \sigma_0 P_{ij}^{(2)} + \sigma_0^2 P_{ij}^{(3)} + \sigma_0^3 P_{ij}^{(4)} \end{aligned}$$

Нельзя исключить возможность возникновения аналогичной ситуации и в общем анизотропном случае.

Далее, матрицы \mathbf{L} , \mathbf{D} формируются следующим образом. Если σ_n^\pm является простым корнем (5), то, выбрав любую ненулевую строку p матрицы $c_{pm}^0 = f_m$, можно положить

$$L_{ni} = L_{ni}^\pm = \sum_{m=1}^3 f_m(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n^\pm, \kappa) t_{mi}(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n^\pm, \kappa, 1)$$

$$D_{nm} = D_{nm}^\pm = f_m(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n^\pm, \kappa) \quad (i, m = 1, 2, 3)$$

$$t_{km} = i \sum_{n=1}^3 \sum_{j=1}^3 C_{njkm} \alpha_n l_j \quad (m, k = 1, 2, 3)$$

Если σ_n^\pm является двукратным корнем (5), то, выбрав две линейно независимые строки p , r матрицы \mathbf{c}^0 и положив $c_{pm}^0 = f_m^{(1)}$, $c_{rm}^0 = f_m^{(2)}$, можно записать

$$L_{ji} = L_{ji}^\pm = \sum_{m=1}^3 f_m^{(j)} t_{mi}, \quad D_{jm} = D_{jm}^\pm = f_m^{(j)} \quad (j = 1, 2, i, m = 1, 2, 3)$$

Необходимо заметить, что в случае изотропных материалов предпочтительнее использовать явные выражения для матриц \mathbf{L} , \mathbf{D} [2]:

В формулах (1) в случае, если боковые стороны каждого ограниченного слоя уходят на бесконечность, получается неограниченный слой, содержащий плоские, параллельные границам слоя трещины. При этом верхняя и нижняя границы слоя рельефные. Уравнения (1) значительно упрощаются в случае плоских верхних и нижних границ, так как $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = \pm 1$. Обозначим через U_{nm} , T_{nk} двумерное преобразование Фурье функций u_{nm} , τ_{nk} и положим

$$U_{nm}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_3 h_n) = \iint_{S_n} u_{nm}(\xi_1, \xi_2, h_n) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2$$

$$T_{nk}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_3 h_n) = \iint_{S_n} \tau_{nk}(\xi_1, \xi_2, h_n) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2$$

После преобразований и упрощений получим в матричной форме соотношения

$$\begin{aligned} L_n^\pm U_n^\pm - L_{n+1}^\pm U_{n+1}^\pm &= D_n^\pm T_n^\pm - D_{n+1}^\pm T_{n+1}^\pm \\ L_n^\pm &= \mathbf{E}^{(n)\pm} L_n^\pm, \quad D_n^\pm = \mathbf{E}^{(n)\pm} D_n^\pm, \quad E_{km}^{(n)\pm} = \delta_{km} \exp(i\sigma_k^\pm h_n) \quad (k, m = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношения (8) позволяют получить СИУ для слоя с плоскими неоднородностями. Для построения СИУ в случае полупространства $x_3 \geq h_0$ необходимо в выражениях (8) формулы, соответствующие $n = 0$, заменить одним уравнением $L_0^- U_0^- = D_0^- T_0^-$. В случае пространства $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$ дополнительно к этому группу формул, соответствующих $n = N + 1$, также необходимо заменить уравнением $L_{N+1}^+ U_{N+1}^+ = D_{N+1}^+ T_{N+1}^+$. Ниже будем считать, что рассматривается упругий слой с N неоднородностями, т.е. случай

$h_{N+1} - h_0 < \infty$. Примем во внимание, что в случае трещин необходимо положить $\mathbf{T}_n^+ = \mathbf{T}_n^- = \mathbf{T}_n$.

Решение линейной системы уравнений (8) относительно ее правой или левой частей можно получить, обращая однотипные блоки матриц размерности 6, что в вычислительном отношении гораздо предпочтительнее, чем в общем случае обращать матрицу размерности $6(N+1)$. Обозначим через $\mathbf{F}^{(m,k)\pm}$, $\mathbf{G}^{(n)}$ следующие матрицы:

$$F_{pr}^{(m,k)\pm} = \delta_{pr} \exp(i\sigma_p^\pm(h_k - h_m)) \quad (p, r = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{G}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^- & -\mathbf{F}^{(n,n+1)-} & \mathbf{L}^- \\ \mathbf{L}^+ & -\mathbf{F}^{(n,n+1)+} & \mathbf{L}^+ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^- & -\mathbf{F}^{(n,n+1)-} & \mathbf{D}^- \\ \mathbf{D}^+ & -\mathbf{F}^{(n,n+1)+} & \mathbf{D}^+ \end{pmatrix} \quad (9)$$

С использованием матриц $\mathbf{G}^{(n)}$ систему (8) можно преобразовать к виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_0^+ \\ \mathbf{U}_1^- \\ \mathbf{U}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N^- \\ \mathbf{U}_N^+ \\ \mathbf{U}_{N+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{(0)} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^{(1)} & 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 0 & \mathbf{T}_N \\ \vdots & & & & 0 & \mathbf{G}^{(N-1)} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{G}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_N \\ \mathbf{T}_{N+1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Представим матрицы $\mathbf{G}^{(n)}$ в (9) состоящими из четырех блоков $\mathbf{G}_{ij}^{(n)}$:

$$\mathbf{G}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}^{(n)} & \mathbf{G}_{12}^{(n)} \\ \mathbf{G}_{21}^{(n)} & \mathbf{G}_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Теперь систему уравнений (10) перепишем в эквивалентном виде

$$\mathbf{U}_n^+ = \mathbf{G}_{11}^{(n)} \mathbf{T}_n + \mathbf{G}_{12}^{(n)} \mathbf{T}_{n+1}$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^- = \mathbf{G}_{21}^{(n)} \mathbf{T}_n + \mathbf{G}_{22}^{(n)} \mathbf{T}_{n+1} \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

Система (10) упрощается, если ввести новые неизвестные $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^+ - \mathbf{U}_n^-$, имеющие смысл скачков перемещений. Относительно векторов $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_0^+, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N, \mathbf{U}_{N+1}^-\}$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}\{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N, \mathbf{T}_{N+1}\}$ выпишем преобразованные уравнения

$$\mathbf{U}_0^+ = \mathbf{G}_{11}^{(0)} \mathbf{T}_0 + \mathbf{G}_{12}^{(0)} \mathbf{T}_1$$

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^+ - \mathbf{U}_n^- = -\mathbf{G}_{21}^{(n-1)} \mathbf{T}_{n-1} + (\mathbf{G}_{11}^{(n)} - \mathbf{G}_{22}^{(n-1)}) \mathbf{T}_n + \mathbf{G}_{12}^{(n)} \mathbf{T}_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

$$\mathbf{U}_{N+1}^- = \mathbf{G}_{21}^{(N)} \mathbf{T}_N + \mathbf{G}_{22}^{(N)} \mathbf{T}_{N+1}$$

Систему уравнений (11) запишем в матричном виде $U = \mathbf{K}T$. Здесь матрица \mathbf{K} имеет блочный вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}^{(0)} & \mathbf{G}_{12}^{(0)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{G}_{21}^{(0)} & \mathbf{G}_{11}^{(1)} - \mathbf{G}_{22}^{(0)} & \mathbf{G}_{12}^{(1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\mathbf{G}_{21}^{(0)} & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \mathbf{G}_{12}^{(N-2)} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\mathbf{G}_{21}^{(N-2)} & \mathbf{G}_{11}^{(N-1)} - \mathbf{G}_{22}^{(N-1)} & \mathbf{G}_{12}^{(N-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\mathbf{G}_{21}^{(N-1)} & \mathbf{G}_{11}^{(N)} - \mathbf{G}_{22}^{(N-1)} & \mathbf{G}_{12}^{(N)} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{G}_{21}^{(N)} & \mathbf{G}_{22}^{(N)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Представление матрицы \mathbf{K} (12) легко обобщается на случай, когда упругие свойства слоев различны. В этом случае достаточно вычислять матрицы $\mathbf{G}^{(n)}$ (9) для каждого слоя со своими материальными константами $\mathbf{G}^{(n)} = \mathbf{G}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \omega, C_{ijk}^{(n)}, \rho^{(n)}, h_{n+1} - h_n)$.

С учетом приведенных выше обозначений приходим к СИУ вида

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{s=1}^3 \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K_{ms}^{(p,n)} Q_s^{(n)} \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 = z_m^{(p)}(x_1, x_2) \quad (13)$$

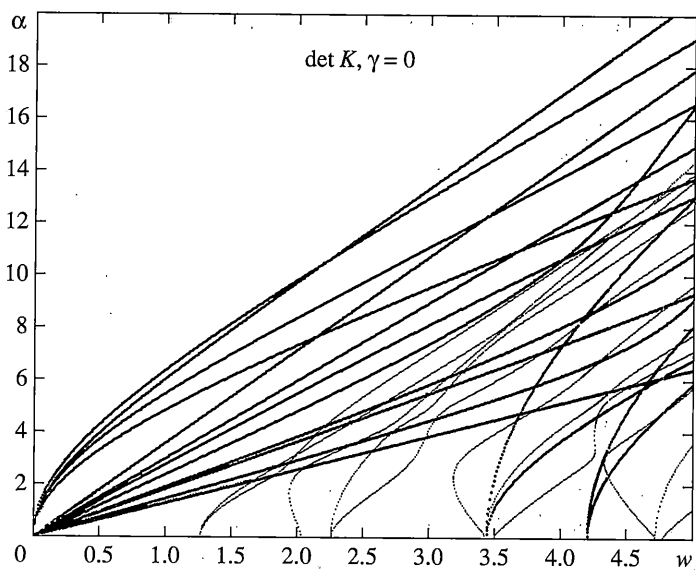
$$x_1, x_2 \in S_p \quad (m = 1, 2, 3, p = 0, 1, \dots, N+1)$$

Здесь матрицы $\mathbf{K}^{(p,n)}$ – соответствующие блоки матрицы \mathbf{K} (12):

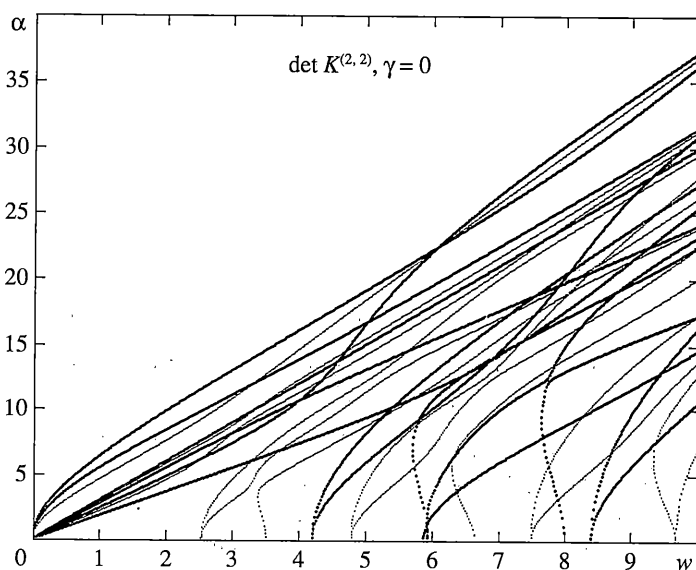
$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1,1)} &= \mathbf{G}_{11}^{(0)}, \quad \mathbf{K}^{(1,2)} = \mathbf{G}_{12}^{(0)}, \quad \mathbf{K}^{(N+2,N+1)} = \mathbf{G}_{21}^{(N)}, \quad \mathbf{K}^{(N+2,N+2)} = \mathbf{G}_{22}^{(N)} \\ \mathbf{K}^{(n+1,n)} &= -\mathbf{G}_{21}^{(n-1)}, \quad \mathbf{K}^{(n+1,n+1)} = \mathbf{G}_{11}^{(n)} - \mathbf{G}_{22}^{(n-1)}, \quad \mathbf{K}^{(n+1,n+2)} = \mathbf{G}_{12}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (14)$$

Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 выбираются в соответствии с принципом излучения на бесконечности [9]; $Q_s^{(n)}$ – образы Фурье функций $q_s^{(n)} = \tau_{ns}$; $z_m^{(p)} = u_{pm}^+ - u_{pm}^-$, $p = 1, 2, \dots, N$ – заданные амплитуды скачков перемещений, действующих на границах неоднородностей с частотой ω ; $z_m^{(0)} = u_{0m}^+$, $z_m^{(N+1)} = u_{(N+1)m}^+$ – заданные амплитуды перемещений на нижней и верхней границах слоя соответственно, также действующих с частотой ω . Как видно из формул (14), свойства внедиагональных матриц $\mathbf{K}^{(i,j)}$ ($i \neq j$) и матриц $\mathbf{K}^{(1,1)}, \mathbf{K}^{(N+2,N+2)}$ полностью определяются механическими и геометрическими свойствами одного слоя, свойства диагональных матриц $\mathbf{K}^{(j,j)}$ ($j = 2, 3, \dots, N+1$) определяются механическими и геометрическими свойствами соседних слоев.

В проведенных численных экспериментах рассматривался пакет из четырех различных анизотропных слоев. Слой 1 (нумерация снизу вверх) имеет упругие свойства арсенида галлия (GaAs, кубическая сингония, класс симметрии $\bar{4}3m$): $C_{11} = 1.188$, $C_{12} = 0.538$, $C_{44} = 0.594$ (общий множитель упругих модулей равен 10^{11} Н/м²), плотность кристалла $\rho = 5316$ кг/м³ [11]. Слой 2 имеет упругие свойства α -кварца (тригональная сингония, класс 32): $C_{11} = 0.8674$, $C_{12} = 0.0699$, $C_{13} = 0.1191$, $C_{14} = -0.1791$, $C_{33} = 1.072$, $C_{44} = 0.5794$, $\rho = 2650$ кг/м³ [12]. Слой 3 имеет упругие свойства тетрабората лития ($Li_2B_4O_7$, тетраго-



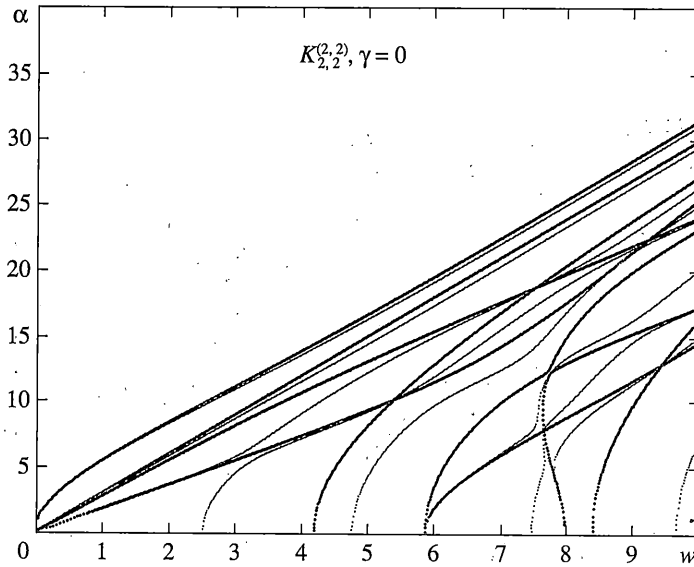
Фиг. 1



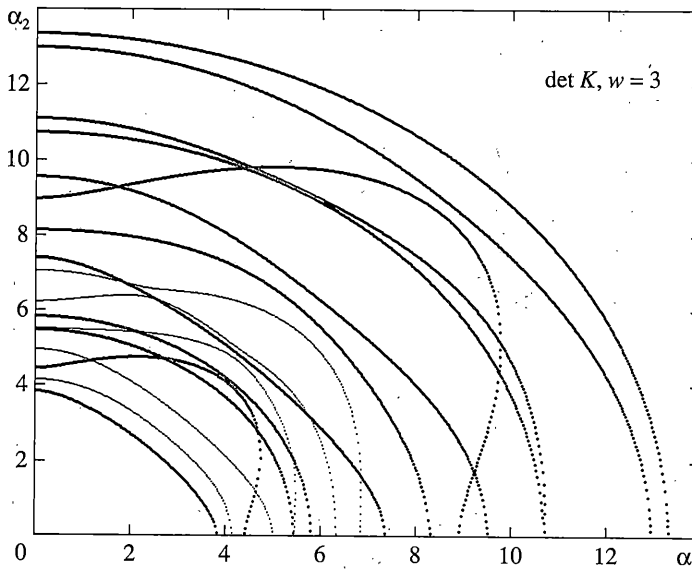
Фиг. 2

нальная сингония, класс 4 mm): $C_{11} = 1.35$, $C_{12} = 0.0357$, $C_{13} = 0.335$, $C_{33} = 0.568$, $C_{44} = 0.585$, $C_{66} = 1.467$, $\rho = 2439$ кг/м³ [12]. Слой 4 имеет упругие свойства оксида цинка (ZnO, гексагональная сингония, класс 6 mm): $C_{11} = 2.097$, $C_{12} = 1.211$, $C_{13} = 1.051$, $C_{33} = 2.109$, $C_{44} = 0.4244$, $\rho = 5676$ кг/м³ [12].

Формирование тензора коэффициентов упругости C_{ijmn} производится с учетом симметрии данного тензора из модулей упругости C_{ab} по известному правилу [11]: $C_{ijmn} = C_{ab}$



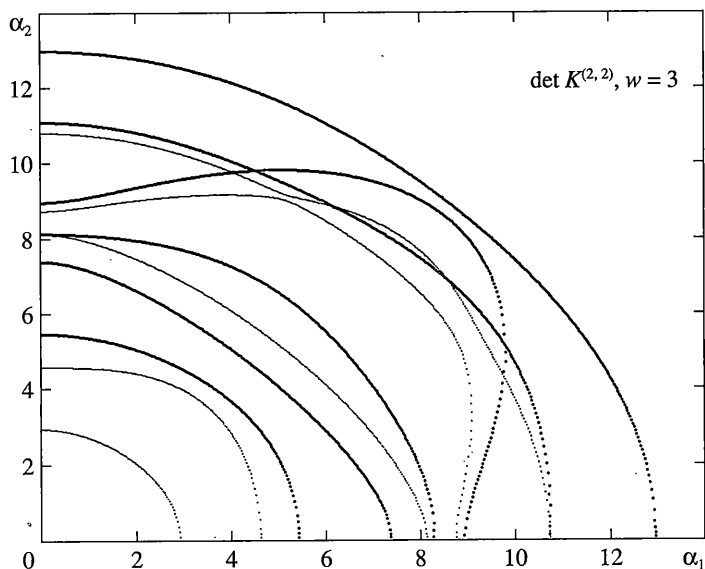
Фиг. 3



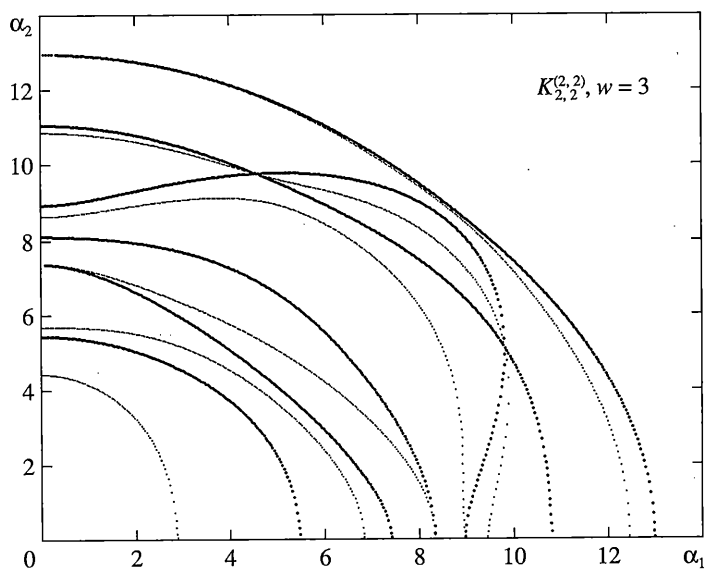
Фиг. 4

($i, j \leftrightarrow a = 1, 2, \dots, 6; n, m \leftrightarrow b = 1, 2, \dots, 6$), где соответствие единичных индексов a, b и пар индексов (ij), (nm) имеет вид $1 \leftrightarrow 11, 2 \leftrightarrow 22, 3 \leftrightarrow 33, 4 \leftrightarrow 23, 5 \leftrightarrow 31, 6 \leftrightarrow 12$.

Для построения решения систем интегральных уравнений (1), (13) методами, рассматриваемыми в [9], а также для определения условий локализации волнового процесса совокупностью неоднородностей необходимо знание вещественных особенностей элементов подинтегральных матриц-функций (12), (14) и их определителей. С этой целью про-



Фиг. 5



Фиг. 6

веден численный анализ нулей и полюсов элементов матриц $\mathbf{K}^{(i,j)}$ и определителей $\det \mathbf{K}$, $\det \mathbf{K}^{(i,j)}$ в зависимости от приведенной частоты $w = \omega/\omega_0$ и направления в плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$, определяемого величиной угла γ :

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma \leftrightarrow \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \gamma = \arctg(\alpha_2/\alpha_1) \quad (15)$$

При расчетах в качестве характерных величин были использованы следующие значения: $l_0 = 1$ м, $\omega_0 = 10^4$ Гц, $m_0 = 10^3$ кг. Безразмерная толщина всех слоев $h = 0.25$ одина-

кова. Для углов $\gamma_m = \pi m/8$ ($m = 0, 1, \dots, 4$) численно установлено, что свойством чередования нулей и полюсов обладают только диагональные элементы диагональных матриц $\mathbf{K}^{(i,j)}$, у определителей $\det \mathbf{K}$, $\det \mathbf{K}^{(i,j)}$ это свойство нарушается. В качестве примеров, на фиг. 1–3 изображены полюса (более жирные линии, составленные из плюсов) и нули (более тонкие линии, составленные из точек) соответственно определителей $\det \mathbf{K}$, $\det \mathbf{K}^{(2,2)}$ и диагонального элемента $K_{2,2}^{(2,2)}$ матрицы $\mathbf{K}^{(2,2)}$ как функции α (15) и w при $\gamma = 0$. На фиг. 4–6 приведены графики нулей и полюсов тех же величин соответственно как функций α_1 , α_2 при $w = 3$ в первом квадранте плоскости $\alpha_1 O \alpha_2$, отражающие влияние анизотропии слоев на их распределение. Кривые на фиг. 4–6 обладают симметрией относительно осей $O \alpha_1$, $O \alpha_2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-00902, 03-01-00694, 03-01-96537-р2003юг, 03-01-96662-р2003юг, 04-01-08101-офи-а), программы “Университеты России”, программ Президиума РАН и отделения ОЭММПУ, выполняемых Южным научным центром РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В.А. Тела с неоднородностями; случай совокупностей трещин // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 191–193.
2. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 473–477.
4. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Исследование краевых задач двойной факторизацией // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 1. С. 20–24.
5. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 748–751.
6. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
7. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
8. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
9. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука. 1989. 344 с.
10. Бабешко В.А., Сыромятников П.В. Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 35–47.
11. Акустические кристаллы. Справочник / Под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.
12. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах. М.: Мир, 1990. 582 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
26.05.2005