

© 2007 г. Е.Н. ВИЛЬЧЕВСКАЯ, А.Б. ФРЕЙДИН

**О ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ В ОБЛАСТИ НЕОДНОРОДНОСТИ
МАТЕРИАЛА. Ч. 1. ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ
В ОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ**

Ставится и исследуется задача о включении, претерпевающем фазовое превращение в однородном внешнем поле напряжений, передаваемых матрицей. Матрица образована линейно-упругим материалом. Материал включения допускает при деформировании фазовые превращения, а переход из одного однофазного состояния в другое, как и двухфазные состояния, определяются соображениями энергетической предпочтительности и возможностью существования двухфазных состояний. В качестве простейшей рассматривается задача о фазовых превращениях в цилиндрическом включении в условиях однородной плоской деформации. В пространстве деформаций строятся области существования однофазных состояний включения и поверхности переключения однофазных состояний. Исследуется возможность двухфазных состояний включения. Доказываются характеристические свойства осесимметричных двухфазных деформаций и исследуется их устойчивость. Демонстрируется масштабный эффект – влияние относительного размера включения и тела на фазовое состояние включения. Во второй части статьи исследуется взаимодействие включения, претерпевающего фазовые превращения, и трещины.

Введение. Материалы могут содержать включения, которые при деформировании или изменении температуры способны претерпевать фазовые превращения. Структурно-чувствительные к воздействию напряжений и температуры неоднородности могут иметь технологическое происхождение. Также в качестве такого включения может рассматриваться “благоприятно” ориентированное зерно поликристаллического материала, в котором происходят мартенситные превращения. Это могут быть элементы структуры композитного материала, изменение свойств которого происходит при деформировании или температурном воздействии за счет фазовых превращений, причем эти изменения могут происходить целенаправленно (“smart” композиты).

При фазовых превращениях меняются модули упругости включения. Кроме того, фазовые переходы мартенситного типа обычно сопровождаются собственной деформацией превращения [1]. В результате, во включении и окружающем материале происходит перераспределение полей напряжений, которое может привести к пластическим деформациям, развитию или блокированию процессов разрушения. В свою очередь, поля напряжений, порождаемых концентраторами напряжений, например, трещинами или дислокациями, могут вызывать фазовые превращения и, как следствие, приводить к изменению характера взаимодействия развивающегося дефекта и включения.

Таким образом, исследования взаимосвязей фазовых превращений во включениях и процессов деформирования и разрушения необходимы как для прогнозирования деформационно-прочностных свойств конструкционных материалов, так и для создания материалов (в том числе композитных) с управляемыми физико-механическими свойствами.

В данной работе ставится и исследуется простейшая задача о цилиндрическом включении, претерпевающим фазовое превращение мартенситного типа в однородном внешнем поле напряжений, передаваемом линейно-упругой матрицей (случай плоской деформации), а затем исследуется взаимодействие трещины и структурно-чувствительного включения (рассмотрено в п. 2 публикуемой работы). Материалы матрицы и фаз включения предполагаются линейно-упругими.

В п. 1 рассматриваются фазовые превращения во включении, находящемся в однородном внешнем поле деформаций. Рассмотрение основано на предварительных результатах, приведенных в [2]. В пространстве внешних деформаций строятся области существования однофазных состояний включения. Необходимость такого построения связана со следующими обстоятельствами. Для того, чтобы материал включения допускал фазовые превращения, зависимость плотности его свободной энергии должна быть невыпуклой функцией деформаций, представимой в случае малых деформаций набором квадратичных зависимостей линейного тензора деформаций (в простейшем случае двумя [3–6]). При этом в каждом фазовом состоянии материал включения – линейно-упругий, но каждой квадратичной зависимости соответствует определенная область пространства деформаций – область определения фазы. Поэтому включение может существовать в данном фазовом состоянии только при тех внешних полях, при которых деформации внутри включения принадлежат области определения этой фазы.

Показывается, что области существования перекрывают друг друга, что означает возможность пребывания включения в разных фазовых состояниях при одних и тех же внешних деформациях. На основании принципа энергетической предпочтительности в пространстве внешних деформаций строится поверхность переключения – поверхность смены однофазных состояний включения.

Положение областей существования однофазных состояний и поверхности переключения относительно начала координат и их форма зависят от модулей упругости фаз включения и энергетического параметра, играющего роль температуры. Показывается, что поверхность переключения может быть замкнутой и незамкнутой, а в случае замкнутой поверхности начало координат может быть внутри или вне поверхности переключения. Это, в частности означает, невозможность фазового превращения включения на некоторых простых траекториях деформирования ни при каких, сколь угодно больших деформациях.

Затем исследуется возможность двухфазных состояний включения. Собственная деформация превращения и изменение модулей упругости приводят к тому, что на границе области новой фазы некоторые компоненты тензора деформаций претерпевают разрыв (при сохранении непрерывности перемещений). Принципиальным отличием двухфазного состояния от композитного материала является то, что равновесные межфазные границы – поверхности разрыва деформаций – являются, вообще говоря, неизвестными границами, которые существуют при определенных условиях, включающих обычные условия непрерывности перемещений и усилий и дополнительное термодинамическое условие равновесия (аналог равенства химических потенциалов в теории Гиббса), необходимое для нахождения этих границ [7–19]. Равновесные двухфазные состояния могут рассматриваться только при тех внешних условиях, при которых деформации на межфазной границе удовлетворяют термодинамическому условию.

Различные вопросы, связанные с определением геометрии двухфазных структур рассматривались во многих работах (см., например, статьи [20, 21] и приведенный в них список литературы). Была продемонстрирована неединственность решения краевой задачи описания равновесного двухфазного тела. Было показано, что в случаях центрально-симметричных двухфазных деформаций [4, 5, 21–23] и гетерогенного деформирования по механизму множественного развития слоев [24, 25] или эллипсоидальных зародышей [26] новой фазы равновесные двухфазные конфигурации тела яв-

ляются неустойчивыми по отношению к возмущениям межфазной границы, если на границе тела, претерпевающего фазовое превращение, заданы усилия или граничными условиями заданы средние по объему напряжения.

Если на границе тела задавались перемещения или граничными условиями предписывались средние деформации, то были найдены двухфазные состояния, неустойчивость которых не была обнаружена.

При исследовании центрально-симметричных двухфазных полей было также показано, что неединственность решения может быть связана с возможностью различного количества межфазных границ и различного чередования фаз, причем условия устойчивости могут быть выполнены только при определенном относительном расположении фаз, зависящим от их модулей упругости.

В данной статье в качестве простейшей и доступной для аналитического решения исследуется задача о двухфазных состояниях цилиндрического включения в неограниченной среде и в теле конечных размеров (цилиндре) в условиях плоского всестороннего растяжения. Эта задача имеет как самостоятельное значение, так и может быть использована как тестовая при отработке численных процедур.

Особенностью данной задачи является то, что напряжения передаются на границу тела (включения), претерпевающего фазовые превращения, через матрицу и зависят от свойств матрицы и текущего фазового состояния включения.

Показывается возможность развития новой фазы в виде кругового цилиндра, соосного с включением. Определяется зависимость радиуса равновесной межфазной границы от внешней деформации.

На классе осесимметричных двухфазных состояний исследуется неединственность решения. Доказывается характеристическое свойство осесимметричных двухфазных деформаций и демонстрируется, что наличие дополнительного термодинамического условия на межфазной границе приводит к тому, что краевая задача превращается в задачу Коши аналогично случаю центрально-симметричных деформаций произвольного нелинейно-упругого тела [27]. Показывается, что существует только два равновесных решения с одной границей фаз. Для обоих решений определяется зависимость радиуса равновесной границы фаз от внешней деформации. Исследуются энергетические изменения, сопутствующие развитию двухфазных состояний.

Исследуется влияние модулей сдвига матрицы и фаз на устойчивость осесимметричных двухфазных состояний. На примере цилиндрического включения в цилиндре конечного радиуса демонстрируется масштабный эффект, проявляющийся во влиянии на устойчивость относительного размера включения.

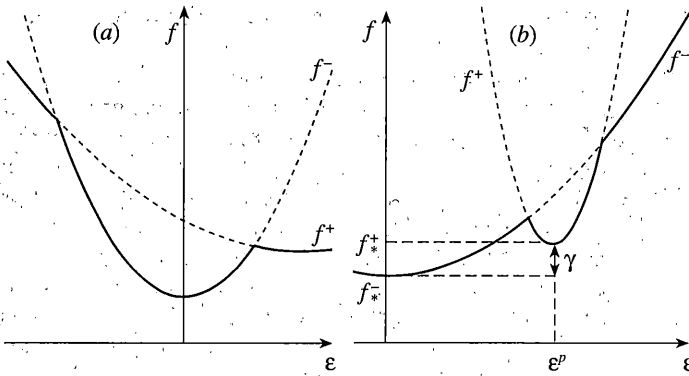
1. Области существования и поверхность переключения однофазных состояний включения. Рассмотрим линейно-упругое тело (матрицу), содержащее включение V из материала, допускающего фазовое превращение мартенситного типа. Зависимость объемной плотности свободной энергии f материала матрицы от деформаций ϵ имеет вид

$$f_0(\epsilon) = 1/2\epsilon : C_0 : \epsilon \quad (1.1)$$

где C_0 – тензор модулей упругости матрицы.

Для того, чтобы материал мог претерпевать фазовое превращение, необходимо, чтобы плотность его свободной энергии была невыпуклой функцией деформаций, представимой набором квадратичных зависимостей [3; 5, 6]. Далее ограничимся двумя ветвями, полагая, что зависимость объемной плотности свободной энергии материала включения имеет вид

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \theta) &= \min_{\pm} \{ f_{\pm}(\epsilon, \theta) \} \\ f_{\pm}(\epsilon, \theta) &= f_{*}^{\pm}(\theta) + 1/2(\epsilon - \epsilon_{\pm}^p) : C_{\pm} : (\epsilon - \epsilon_{\pm}^p) \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

где индексами (+) и (-) обозначены величины, относящиеся к новой и исходной фазам, соответственно, здесь и далее в равенствах подразумевается соответствие верхних и нижних индексов плюс или минус, C_{\pm} – положительно-определенные тензоры модулей упругости фаз, θ – температура, f_{*}^{\pm} и ϵ_{\pm}^p имеют смысл плотностей свободной энергии и тензоров деформации фаз в ненапряженном состоянии, $\epsilon^p = \epsilon_{+}^p - \epsilon_{-}^p$ – собственная деформация превращения. Термоупругие напряжения не учитываются. Если C_{\pm} и ϵ_{\pm}^p не зависят от температуры, то роль температуры играет параметр $\gamma(\theta) = f_{*}^{+}(\theta) - f_{*}^{-}(\theta)$. В зависимости от γ одно из ненапряженных фазовых состояний может быть только гипотетическим. Например, если $\min\{f_{-}(\epsilon_{+}^p, \theta), f_{+}(\epsilon_{-}^p, \theta)\} = f_{-}(\epsilon_{+}^p, \theta)$, то фаза плюс не существует при $\epsilon = \epsilon_{+}^p$. Одномерные аналоги зависимости свободной энергии от деформации приведены на фиг. 1.

Материалам матрицы и включения в фазовых состояниях (+) и (-) соответствуют определяющие соотношения

$$\sigma_0(\epsilon) = C_0 : \epsilon \quad \forall \epsilon, \quad \sigma_{\pm}(\epsilon) = C_{\pm} : (\epsilon - \epsilon_{\pm}^p), \quad \epsilon \in \mathcal{E}_{\pm} \quad (1.3)$$

где области определения фаз \mathcal{E}_{\pm} даны соотношениями

$$\mathcal{E}_{-} = \{\epsilon: \varphi(\epsilon) > 0\}, \quad \mathcal{E}_{+} = \{\epsilon: \varphi(\epsilon) < 0\}, \quad \varphi(\epsilon) = f_{+}(\epsilon) - f_{-}(\epsilon) \quad (1.4)$$

Полагаем вначале, что материал включения находится в одном из однофазных состояний: в том, которое при заданной температуре и граничных условиях соответствует меньшей энергии тела. Двухфазные состояния включения будут исследованы в следующих пунктах.

Соотношения (1.2), (1.3) описывают не два материала с различными зависимостями плотности свободной энергии, а один. Поэтому бессмысленно рассматривать, например, включение, находящееся в фазовом состоянии (+) при внешних деформациях ϵ_0 , при которых поле внутри включения не принадлежит области определения фазы (+).

В пространстве внешних деформаций области \mathcal{E}_{\pm}^0 существования включения в состояниях (+) и (-) определены соотношениями (ср. с (1.4)):

$$\mathcal{E}_{+}^0 = \{\epsilon_0: \varphi(\epsilon_{+}(\epsilon_0)) < 0\}, \quad \mathcal{E}_{-}^0 = \{\epsilon_0: \varphi(\epsilon_{-}(\epsilon_0)) > 0\}$$

где деформации $\epsilon_{\pm}(\epsilon_0)$ находятся из решения задачи Эшелби для включения в фазовом состоянии (+) или (-). Окончательный выбор между фазовыми состояниями включе-

ния определяется энергетической выгодностью того или иного фазового состояния для тела в целом.

Рассмотрим тело с включением, находящимся при одних и тех же граничных условиях и температуре в разных фазовых состояниях, и вычислим энергии взаимодействия $E_{\pm} = \Pi_{\pm} - \Pi_0$, где Π_0 , Π_+ и Π_- – свободные энергии Гиббса, равные суммам потенциальных энергий деформации и свободных энергий ненапряженных состояний тела без включения и с включением в фазовых состояниях (+) и (–) соответственно. Знак разности энергий Π_+ и Π_- определим, вычислив величину $F = E_+ - E_-$.

Отметим, что вклады включения конечного объема в энергию тела, равные энергии взаимодействия E_{\pm} , являются конечными величинами даже в случае неограниченного тела – в отличие от величин Π_{\pm} – в вычисляются как объемные интегралы по области включения от комбинации известных внешних и найденных внутренних полей.

Энергии взаимодействия E_{\pm} зависят от внешнего поля и фазового состояния включения. Уравнение $F = 0$ задает в пространстве параметров нагружения и “температуры” γ поверхность переключения – поверхность смены фазового состояния включения. В качестве параметров нагружения могут выступать деформации или напряжения, заданные на бесконечности в случае неограниченного тела с включением, а также, например, геометрические параметры, характеризующие относительное положение трещины и включения в случае тела с взаимодействующими трещиной и включением.

С учетом (1.2), (1.1) и условий непрерывности перемещений и усилий на границе включения энергии взаимодействия E_{\pm} могут быть выражены через деформации или напряжения (см., напр., [20, 28]):

$$E_{\pm} = \int_V \left(f_*^{\pm} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p : \mathbf{C}_{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon}_{\pm} : \mathbf{C}_1^{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_0 - (\boldsymbol{\epsilon}_{\pm} + \boldsymbol{\epsilon}_0) : \mathbf{C}_{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p) \right) dV \quad (1.5)$$

$$E_{\pm} = \int_V \left(f_*^{\pm} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{\pm} : \mathbf{B}_1^{\pm} : \boldsymbol{\sigma}_0 + (\boldsymbol{\sigma}_{\pm} + \boldsymbol{\sigma}_0) : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p) \right) dV$$

где $\mathbf{C}_1^{\pm} = \mathbf{C}_{\pm} - \mathbf{C}_0$, $\mathbf{B}_1^{\pm} = \mathbf{B}_{\pm} - \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$ – тензоры податливости. Если тензоры \mathbf{C}_1^{\pm} невырожденные, то E_{\pm} выражаются через тензоры \mathbf{q} или \mathbf{m} , являющиеся линейными преобразованиями деформаций и напряжений [4–6, 29]:

$$E_{\pm} = \int_V \left(\gamma_*^{\pm} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\pm} : (\mathbf{C}_1^{\pm})^{-1} : \mathbf{q}_0^{\pm} \right) dV = \int_V \left(\gamma_*^{\pm} - \frac{1}{2} \mathbf{m}_{\pm} : (\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} : \mathbf{m}_0^{\pm} \right) dV \quad (1.6)$$

$$\mathbf{q}_0^{\pm} = -\mathbf{C}_1^{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_0 + \mathbf{C}_{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p, \quad \mathbf{q}_{\pm} = -\mathbf{C}_1^{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm} + \mathbf{C}_{\pm} : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p \quad (1.7)$$

$$\mathbf{m}_0^{\pm} = \mathbf{B}_1^{\pm} : \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p, \quad \mathbf{m}_{\pm} = \mathbf{B}_1^{\pm} : \boldsymbol{\sigma}_{\pm} + \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p, \quad \gamma_*^{\pm} = f_*^{\pm} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p : (\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} : \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^p$$

Здесь $\boldsymbol{\epsilon}_0(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x})$ – деформации и напряжения, которые были бы при данных граничных условиях в точках \mathbf{x} области V , если бы тело было однородным, $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\sigma}_{\pm}(\mathbf{x})$ – деформации и напряжения внутри включения, находящегося в фазовых состояниях (\pm), определяются из решения соответствующей задачи Эшелби для точек внутри включения.

Если включение находится в однородном внешнем поле и имеет форму эллипсоида, то деформации и напряжения внутри включения определяются алгебраическими соотношениями [30, 31]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\pm} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \mathbf{A} : \mathbf{q}_{\pm}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{D} : \mathbf{m}_{\pm} \quad (1.8)$$

где тензоры четвертого ранга \mathbf{A} и \mathbf{D} , симметричные по перестановке первой и второй пар индексов и перестановке индексов внутри пар, зависят от отношения полуосей эл-

липсоида и упругих модулей окружающего материала и могут быть названы тензорами Эшелби для деформаций и напряжений.

Из (1.8) следует, что

$$\mathbf{q}_{\pm} = -((\mathbf{C}_1^{\pm})^{-1} + \mathbf{A})^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^*, \quad \mathbf{m}_{\pm} = ((\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^* \quad (1.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^* = -(\mathbf{C}_1^{\pm})^{-1} : \mathbf{q}_0^{\pm} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - (\mathbf{C}_1^{\pm})^{-1} : \mathbf{C}_{\pm} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^p$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\pm}^* = (\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} : \mathbf{m}_0^{\pm} = \boldsymbol{\sigma}_0 + (\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^p$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^*$ и $\boldsymbol{\sigma}_{\pm}^*$ – “эффективные” внешние деформации и напряжения [20, 29], отличающиеся от внешних полей сдвигом начала координат.

Формулы для энергий взаимодействия (1.6) принимают вид

$$E_{\pm} = V(\gamma_{\pm}^* + 1/2 \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^* : ((\mathbf{C}_1^{\pm})^{-1} + \mathbf{A})^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^*) =$$

$$= V(\gamma_{\pm}^* - 1/2 \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^* : ((\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} + \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{\pm}^*)$$

Тензоры $(\mathbf{C}_1^{\pm})^{-1} + \mathbf{A}$ и $(\mathbf{B}_1^{\pm})^{-1} + \mathbf{D}$ могут быть названы тензорами энергии [20] (ср. с [28, 32, 33]).

Далее рассматриваем случай плоской деформации неограниченной изотропной среды с включением в форме кругового цилиндра в однородном внешнем поле. Для бесконечного кругового цилиндра, находящегося в изотропной среде, тензор \mathbf{A} представим в P -базисе, состоящем из шести тензоров четвертого ранга, построенных из орта оси цилиндра \mathbf{m} и тензора $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{m}$ (проектора на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра) и образующих замкнутую алгебру относительно операции умножения [31]:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\mu_0} \left\{ (1 - \kappa_0) \mathbf{P}^2 - (2 - \kappa_0) \left(\mathbf{P}^1 - \frac{1}{2} \mathbf{P}^2 \right) + 2 \mathbf{P}^5 \right\} \quad (1.10)$$

$$P_{\alpha\beta\lambda\mu}^1 = E_{\alpha(\lambda}^2 E_{\mu)\beta}^2, \quad P_{\alpha\beta\lambda\mu}^2 = E_{\alpha\beta}^2 E_{\lambda\mu}^2, \quad P_{\alpha\beta\lambda\mu}^5 = m_{(\alpha} E_{\beta)(\lambda}^2 m_{\mu)}$$

где круглые скобки при индексах означают симметризацию, μ_0 и ν_0 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона матрицы, $\kappa_0 = \{2(1 - \nu_0)\}^{-1}$.

Выберем координатные оси $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ так, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{m}$. Полагаем, что

$$\boldsymbol{\varepsilon}_-^p = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_+^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p = (\vartheta^p/2) \mathbf{E}^2 \quad (1.11)$$

тензоры \mathbf{C}_{\pm} – изотропные. На бесконечности заданы деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_1^0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2^0 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2$.

Получим уравнение для построения на плоскости внешних параметров $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ линии переключения фазового состояния включения.

Так как все входящие в (1.5) тензоры деформации плоские, то тензоры $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_{\pm}$ могут быть заменены в (1.5) и, следовательно, в (1.6), (1.7) соответствующими тензорами модулей упругости $\tilde{\mathbf{C}}$ плоской задачи. В рассматриваемом случае тензоры модулей упругости, имеющие вид $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{I}$, где λ, μ – параметры Лямэ, заменяются

$$\tilde{\mathbf{C}} = \lambda \mathbf{P}^2 + 2\mu \mathbf{P}^1 = \tilde{k} \mathbf{P}^2 + 2\mu \left(\mathbf{P}^1 - \frac{1}{2} \mathbf{P}^2 \right); \quad \tilde{k} = \lambda + \mu \quad (1.12)$$

При этом тензоры q_0^\pm и q_\pm заменяются на тензоры вида

$$\tilde{q} = -\tilde{C}_1^\pm : \epsilon + \tilde{C}_\pm : \epsilon_\pm^p, \quad \tilde{C}_1^\pm = \tilde{C}_\pm - \tilde{C}_0 \quad (1.13)$$

а параметры γ_*^\pm заменяются на

$$\tilde{\gamma}_*^\pm = f_*^\pm + 1/2 \epsilon_\pm^p : (\tilde{B}_1^\pm)^{-1} : \epsilon_\pm^p, \quad \tilde{B}_1^\pm = (\tilde{C}_\pm)^{-1} - (\tilde{C}_0)^{-1}$$

Поскольку тензоры ϵ_0 и ϵ_\pm плоские, эта же замена тензоров q может быть сделана в первом уравнении (1.8), после чего первое уравнение (1.9) принимает вид

$$\tilde{q}_\pm = -((\tilde{C}_1^\pm)^{-1} + A)^{-1} : \tilde{\epsilon}_\pm^*, \quad \tilde{\epsilon}_\pm^* = \epsilon_0 - (\tilde{C}_1^\pm)^{-1} : \tilde{C}_\pm : \epsilon_\pm^p \quad (1.14)$$

В результате получаем выражения для энергий взаимодействия на единицу длины цилиндра

$$E_- = S \left\{ f_*^- + \frac{1}{2} (k_1^- - \mu_1^-) \text{tr} \epsilon_- \text{tr} \epsilon_0 + \mu_1^- \epsilon_- : \epsilon_0 \right\} \quad (1.15)$$

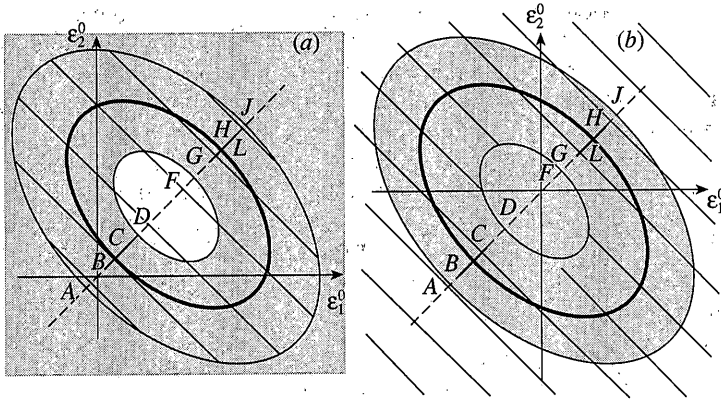
$$E_+ = S \left\{ f_*^+ + \tilde{\gamma}_*^+ + \frac{1}{2} \frac{(\tilde{k}_+ \vartheta^p)^2 - k_1^+ \tilde{k}_+ \vartheta^p (\text{tr} \epsilon_+ + \text{tr} \epsilon_0)}{k_1^+} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (k_1^+ - \mu_1^+) \text{tr} \epsilon_+ \text{tr} \epsilon_0 + \mu_1^+ \epsilon_+ : \epsilon_0 \right\} \quad (1.16)$$

$$\tilde{\gamma}_*^+ = \gamma - \frac{\tilde{k}_0 \tilde{k}^+}{2k_1^+} (\vartheta^p)^2, \quad \mu_1^\pm = \mu_\pm - \mu_0, \quad k_1^\pm = \tilde{k}_\pm - \tilde{k}_0$$

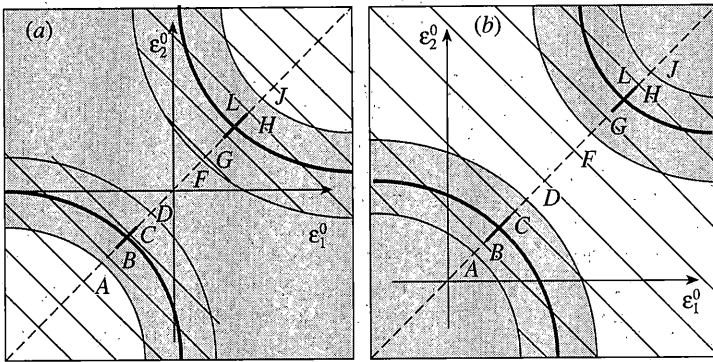
где S – площадь поперечного сечения цилиндра, зависимости $\epsilon_\pm(\epsilon_0)$ определены соотношениями (1.13), (1.14) и (1.10). Очевидно, что f_*^- не влияет на величину F .

Равенство энергий (1.15), (1.16) определяет на плоскости $\epsilon_1^0, \epsilon_2^0$ линию переключения – линию смены одного однофазного состояния включения другим. Примеры областей существования фазовых состояний и линий переключения для случая $\mu_\pm < \mu_0$ и различных соотношений между модулями упругости фаз приведены на фиг. 2 (а: $\tilde{k}_+ > \tilde{k}_-, \mu_+ > \mu_-$; б: $\tilde{k}_+ < \tilde{k}_-, \mu_+ < \mu_-$) и фиг. 3 (а: $\tilde{k}_+ < \tilde{k}_-, \mu_+ > \mu_-$; б: $\tilde{k}_+ > \tilde{k}_-, \mu_+ < \mu_-$). Закрашенные области соответствуют внешним деформациям, при которых может существовать фаза (+), заштрихованные области определяют деформации, при которых допустимо существование фазы (-). При некоторых внешних деформациях допустимо существование включения в обоих однофазных состояниях. Окончательный выбор делаем, исходя из энергетической предпочтительности того или иного однофазного состояния для системы в целом. На фиг. 2, 3 равенству энергий (1.15), (1.16) соответствует жирная линия – линия переключения, при пересечении которой телу с однофазным включением становится энергетически выгодным иметь включение в новом однофазном состоянии.

Например, согласно фиг. 2, б в недеформированном состоянии включение может быть только в фазовом состоянии (-). На указанной траектории деформирования с



Фиг. 2



Фиг. 3

увеличением внешних деформаций при достижении точки F становится возможным существование включения в однофазном состоянии (+). На отрезке FJ возможны оба однофазных состояния, а после точки J материал включения может находиться только в однофазном состоянии (+). Телу в целом – на классе однофазных состояний включения – выгоднее сохранять включение в фазовом состоянии – вплоть до достижения точки переключения L и перевести включение в состояние (+) после прохождения этой точки. Возможность и предпочтительность двухфазных состояний обсуждается в следующих пунктах.

Области определения фаз и поверхность переключения могут быть замкнутыми или разомкнутыми – в зависимости от знакоопределенности скачка тензора модулей упругости. Если $(\tilde{k}_+ - \tilde{k}_-)(\mu_+ - \mu_-) > 0$, то линия переключения и границы областей определения фаз являются эллипсами. Если $(\tilde{k}_+ - \tilde{k}_-)(\mu_+ - \mu_-) < 0$, то линии переключения и границы областей определения фаз являются гиперболами.

Положение и существование областей определения фаз и линии переключения относительно начала координат зависят также от величины собственной деформации превращения и “температуры” γ . При изменении γ поверхность переключения может пересечь начало координат, что означает возможность перехода включения из одного

однофазного состояния в другое в результате нагрева или охлаждения – при нулевом внешнем поле деформаций.

Отметим, что в зависимости от параметров материала и температуры фазовые превращения оказываются невозможными на некоторых траекториях деформирования.

2. Осесимметричные двухфазные состояния цилиндрического включения. 2.1. Условия на межфазной границе в случае линейно-упругих фаз. В случае малых деформаций задача о равновесных двухфазных конфигурациях упругого тела при бездиффузионных фазовых переходах приводится к задаче определения межфазной границы Γ и соответствующего поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, достаточно гладкого при $\mathbf{x} \notin \Gamma$, непрерывного на Γ и удовлетворяющего уравнениям равновесия и граничным условиям (см., напр., [3, 5, 29]):

$$\mathbf{x} \notin \Gamma: \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \theta = \text{const} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma: [\mathbf{u}] = 0, \quad [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [f] - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : [\boldsymbol{\varepsilon}] = 0 \quad (2.2)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к межфазной границе Γ , \mathbf{u} – вектор перемещений, фазы (–) и (+) плюс занимают области V_- и V_+ соответственно, квадратными скобками обозначен скачок величины при переходе от фазы минус к фазе плюс, $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-)/2$, массовые силы, термоупругие напряжения и поверхностная энергия межфазной границы не учитываются.

Уравнение (2.1) и первые два условия на скачке (2.2) – обычные условия равновесия составного тела. Третье из условий (2.2) – дополнительное условие термодинамического равновесия – связано с дополнительной степенью свободы, порождаемой неизвестной межфазной границей, и следует из условий равновесия фаз нелинейно-упругого тела (см. [7–9, 11, 13]). В силу непрерывности перемещений и усилий на межфазной границе $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : [\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\sigma}_+ : [\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\sigma}_- : [\boldsymbol{\varepsilon}]$.

Условие непрерывности усилий (2.2) с учетом непрерывности перемещений может быть записано в виде соотношения для скачка деформаций на границе в зависимости от деформаций на одной из сторон границы ((+) или (–)) [3, 29, 30]:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) : \hat{\mathbf{q}}_\pm \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = -[\mathbf{C}] : \boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p], \quad \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n} \mathbf{G}_\mp(\mathbf{n}) \mathbf{n}\}^s, \quad \mathbf{G}_\mp(\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_\mp \cdot \mathbf{n})^{-1} \quad (2.4)$$

где $[\tilde{\mathbf{C}}] = \tilde{\mathbf{C}}_+ - \tilde{\mathbf{C}}_-$, s означает симметризацию $K_{ijkl} = n_i G_{jkl}(n_j n_l)$.

С учетом определяющих соотношений (1.2), (1.3) и условия (2.4) термодинамическое условие может быть представлено в виде соотношения, задающего однопараметрическое семейство нормалей к межфазной границе в зависимости от деформаций на одной из сторон границы (см. [29, 34] или недавние работы [20, 21]):

$$\begin{aligned} \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\pm, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) &\triangleq \boldsymbol{\gamma} + 1/2[\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p] + 1/2\boldsymbol{\varepsilon}_\pm : [\mathbf{C}] : \boldsymbol{\varepsilon}_\pm - \\ &- \boldsymbol{\varepsilon}_\pm : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p] \pm 1/2\hat{\mathbf{q}}_\pm : \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) : \hat{\mathbf{q}}_\pm = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если тензор $[\mathbf{C}]$ скачка модулей упругости невырожденный, то термодинамическое условие (2.5) может быть записано в терминах тензоров $\hat{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \chi(\hat{\mathbf{q}}_\pm, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_*, \mathbf{n}) &\triangleq \hat{\boldsymbol{\gamma}}_* + 1/2\hat{\mathbf{q}}_\pm : ([\mathbf{C}]^{-1} \pm \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n})) + \hat{\mathbf{q}}_\pm = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_* &= \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}^p] : [\mathbf{B}]^{-1} : [\boldsymbol{\varepsilon}^p], \quad [\mathbf{B}] = \mathbf{C}_+^{-1} - \mathbf{C}_-^{-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

или в терминах напряжений или в терминах тензоров $\hat{\mathbf{m}} = [\mathbf{B}] : \boldsymbol{\sigma} + [\boldsymbol{\varepsilon}^p]$ на одной из сторон межфазной границы [3, 4, 20, 34].

При квазистатическом движении межфазной границы величина $\chi \neq 0$ является термодинамической (конфигурационной) силой. В приближении линейной термодинамики необратимых процессов нормальная составляющая скорости межфазной границы определяется кинетическим уравнением

$$v_n^\Gamma = -k\chi(\epsilon_\pm, \mathbf{n}) = -k\chi(\hat{\mathbf{q}}_\pm, \mathbf{n}), \quad k > 0 \quad (2.7)$$

где v_n^Γ – скорость движения границы Γ в направлении нормали, внешней к области, занятой фазой плюс, k – кинетический коэффициент [20–22]. Соотношение (2.7) будет использовано далее при анализе устойчивости двухфазных состояний.

Ниже, аналогично тому как это делалось для случая центрально-симметричных двухфазных деформаций [4, 5, 21, 22], исследуется возможность существования осесимметричных равновесных двухфазных состояний включения, неединственность решений и их устойчивость. Также анализируются энергетические изменения, связанные с формированием двухфазных состояний.

2.2. Равновесные межфазные границы в случае осесимметричных двухфазных деформаций. Задачи о двухфазных конфигурациях являются задачами с неизвестной границей. Для решения используется полуобратный метод: форма границы угадывается, а конкретные значения параметров определяются из условия термодинамического равновесия.

Рассмотрим неограниченное линейно-упругое изотропное тело с цилиндрическим включением V радиуса R в условиях плоской деформации. Включение сделано из изотропного материала (1.2), с модулями упругости \tilde{k}_\pm , μ_\pm и собственной деформацией превращения (1.11). С учетом того, что вектор нормали к межфазной границе лежит в плоскости деформации, тензоры модулей упругости фаз в условии на скачке (2.3) и термодинамическом условии, записанном как (2.5) или (2.6), могут быть заменены на тензоры модулей упругости плоской задачи (1.12). Тогда тензоры $\hat{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{K}(\mathbf{n})$ заменяются тензорами

$$\tilde{\mathbf{q}} = ((\mu_1 - k_1)\text{tr}\epsilon + \tilde{k}_+ \vartheta^p)\mathbf{E}^2 - 2\mu_1\epsilon, \quad k_1 = \tilde{k}_+ - \tilde{k}_-, \quad \mu_1 = \mu_+ - \mu_- \quad (2.8)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_\pm(\mathbf{n}) = \frac{1}{\mu_\pm} \left(\{ \mathbf{nE}^2 \mathbf{n} \}^s - \frac{\tilde{k}_\pm}{\tilde{k}_\pm + \mu_\pm} \mathbf{nnnn} \right) \quad (2.9)$$

Здесь и далее для упрощения обозначений под тензором $\tilde{\mathbf{q}}$ подразумевается тензор, характеризующий разницу фаз (+) и (–) в отличие от (1.13), где $\hat{\mathbf{q}}$ характеризует разницу однофазного включения и матрицы.

На бесконечности заданы постоянные радиальные деформации ϵ_0 . Предположим, что существуют двухфазные конфигурации включения с одной цилиндрической границей раздела фаз неизвестного радиуса R_Γ . Обозначим индексами 0, i и e величины, относящиеся к матрице, к внутренней области включения V_i ; $r < R_\Gamma$ и внешней области $V_e = V \setminus V_i$; r и φ – полярные координаты.

Исследуем возможность двухфазных состояний, для которых $V_+ = V_i$ (фаза (+) развивается из центра включения) или $V_+ = V_e$ (фаза (+) развивается с поверхности включения). Радиальные перемещения u в областях V_i , V_e и в матрице определяются формулами Ламе

$$u = Ar + B/r \quad (2.10)$$

где зависимости констант $A = \{A_0, A_i, A_e\}$ и $B = \{B_0, B_i, B_e\}$ от внешней деформации ϵ_0 и относительного радиуса межфазной границы $\rho = R_\Gamma/R$ определяются из усло-

вий: $r = R_\Gamma$, $r = R$: $[u] = 0$, $[\sigma_r] = 0$, $\varepsilon_r|_{r \rightarrow \infty} = \varepsilon_0$, $u|_{r=0}$ — конечное (σ_r , ε_r , ε_φ — компоненты тензора напряжений и деформаций в полярных координатах). Легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} B_i &= 0, \quad A_0 = \varepsilon_0 \\ A_1 &= \frac{2\varepsilon_0(\tilde{k}_0 + \mu_0)d_e + d_e\tilde{k}_i\vartheta_i + t(1 - \rho^2)}{2((\tilde{k}_e + \mu_0)d_i - (\mu_0 - \mu_e)(\tilde{k}_i - \tilde{k}_e)\rho^2)} \\ A_e &= \frac{2\varepsilon_0(\tilde{k}_0 + \mu_0)d_i + d_i\tilde{k}_e\vartheta_e + t\rho^2}{2((\tilde{k}_e + \mu_0)d_i - (\mu_0 - \mu_e)(\tilde{k}_i - \tilde{k}_e)\rho^2)} \\ B_e &= \frac{R_\Gamma^2(2\varepsilon_0(\tilde{k}_0 + \mu_0)(\tilde{k}_e - \tilde{k}_i) + \tilde{k}_i\vartheta_i(\tilde{k}_e + \mu_0) + \tilde{k}_e\vartheta_e(\tilde{k}_i + \mu_0))}{2((\tilde{k}_e + \mu_0)d_i - (\mu_0 - \mu_e)(\tilde{k}_i - \tilde{k}_e)\rho^2)} \\ B_0 &= \frac{R_\Gamma^2(2\varepsilon_0(\rho^2 d_i(\tilde{k}_0 - \tilde{k}_e) + (\tilde{k}_e - \tilde{k}_i)(\tilde{k}_0 + \mu_e)) + \rho^2 d_i\tilde{k}_e\vartheta_e + g)}{2((\tilde{k}_e + \mu_0)d_i - (\mu_0 - \mu_e)(\tilde{k}_i - \tilde{k}_e)\rho^2)} \\ d_{i,e} &= \tilde{k}_{i,e} + \mu_e, \quad t = (\mu_0 - \mu_e)(\tilde{k}_i\vartheta_i - \tilde{k}_e\vartheta_e), \quad g = (d_i\tilde{k}_e\vartheta_e - d_e\tilde{k}_i\vartheta_i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Радиус равновесной межфазной границы определяется термодинамическим условием равновесия. Так как $\varepsilon_r^i = \varepsilon_\varphi^i = A_i$, то

$$\tilde{q}_i = qE^2 \quad (2.12)$$

$$q = -2k_1 A_i + \tilde{k}_+ \vartheta^p \quad (2.13)$$

Рассматриваем случай $\mu_1 k_1 \neq 0$. Подставив (2.12) в термодинамическое условие (2.6), записанное со стороны области V_p , получим, что величина q (и, следовательно, величина A_i) должна зависеть исключительно от параметров материала:

$$q^2 = -2\hat{\gamma}_* \frac{d_e}{d_i} k_1, \quad \hat{\gamma}_* = \gamma - \frac{\tilde{k}_- \tilde{k}_+}{2k_1} (\vartheta^p)^2 \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует необходимое условие существования равновесных осесимметричных двухфазных деформаций при $k_1 \neq 0$, аналогичное условию существования центрально-симметричных деформаций [4, 5]:

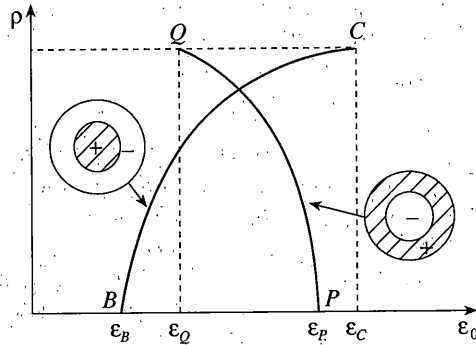
$$\hat{\gamma}_* k_1 < 0 \quad (2.15)$$

Подставив (2.11) и (2.13) в (2.14), получим зависимость радиуса равновесной границы от ε_0 :

$$\rho^2 = \frac{(\tilde{k}_e + \mu_0)d_i}{k_1(\mu_0 - \mu_e)} \pm \frac{d_e}{q(\mu_0 - \mu_e)} (2(\tilde{k}_0 + \mu_0)\varepsilon_0 - \vartheta_*) \quad (2.16)$$

$$\vartheta_* = (\tilde{k}_- + \mu_0)\tilde{k}_+ \vartheta^p / k_1$$

где знак (+) соответствует развитию новой фазы из центра включения ($V_+ = V_i$), а (-) — с границы включения ($V_- = V_e$), величина q определяется формулой (2.14), причем знак q выбирается так, что $\rho \in [0, 1]$.



Фиг. 4

Отрезки BC и GH на фиг. 2, 3 соответствуют внешним деформациям ϵ_0 , при которых допустимы осесимметричные равновесные двухфазные конфигурации (т.е. когда $\rho \in [0, 1]$), для которых фаза с большим модулем сдвига образует цилиндрическое ядро в центре включения. Второе решение, для которого фаза с большим модулем сдвига образует цилиндрическую оболочку, прилегающую к границе включения, существует при деформациях, соответствующих отрезкам, вложенным в отрезки BC и GH .

На фиг. 4 приведен пример зависимостей радиуса равновесной межфазной границы от деформации ϵ_0 для обоих решений при $\mu_0 > \mu_+ > \mu_-$. Отметим, что отрезки существования рассмотренных двухфазных решений вложены один в другой, если $\mu_{\pm} < \mu_0$ или $\mu_{\pm} > \mu_0$, и могут быть невложенными в противном случае. Устойчивость решений (2.16) будет исследована ниже.

Если $\mu_e = \mu_0$, то одно из решений вырождается, A_i не зависит от r :

$$A_i = \frac{2\epsilon_0(k_0 + \mu_0) + k_i \vartheta_i}{2(k_i + \mu_0)} \quad (2.17)$$

что соответствует величине A_i для цилиндра произвольного радиуса, находящегося в однофазном состоянии i . Подстановка (2.17) в (2.13) и (2.14) приводит к значениям ϵ_0 , которые соответствуют поверхности переключения однофазных состояний.

Пусть, например, $\mu_+ > \mu_-$ (фиг. 4). Решение, для которого фаза (+) расположена в центре включения, качественно не изменится при $\mu_+ \rightarrow \mu_0$. В то же время интервал $[\epsilon_0, \epsilon_P]$ существования второго решения при $\mu_+ \rightarrow \mu_0$ вырождается в точку переключения однофазных состояний, а линия PQ – в вертикальный отрезок.

В силу (2.13), (2.14) внутри области V_i :

$$\epsilon_r^i = \epsilon_\varphi^i = \frac{\tilde{k}_+ \vartheta^p - q}{2k_1} \triangleq \epsilon_* \quad (2.18)$$

Тогда из (2.9), (2.12) и условия (2.3) следует, что при $r = R_\Gamma$:

$$\epsilon_\varphi^e = \epsilon_*, \quad \epsilon_r^e = \frac{d_e \tilde{k}_+ \vartheta^p - q(k_1 + d_i)}{2k_1 d_e} \triangleq \epsilon_r^* \quad (2.19)$$

Следовательно, необходимость удовлетворить термодинамическому условию на межфазной границе R_Γ приводит к задаче Коши для уравнения Ламе, решаемого относи-

тельно радиальных перемещений независимо от существования второй межфазной границы в области $r \geq R_\Gamma$ с начальными условиями

$$r = R_\Gamma: u = \varepsilon^* R_\Gamma, \quad du/dr = \varepsilon_r^* \quad (2.20)$$

где ε^* и ε_r^* определяются параметрами материала в соответствии с (2.14), (2.18) и (2.19).

Замена краевой задачи теории упругости задачей Коши, решение которой предопределяет граничные условия, при которых возможно существование равновесной межфазной границы обсуждалось в [27] для общего случая центрально-симметричных двухфазных деформаций нелинейно-упругого тела. В рассматриваемом случае осесимметричных деформаций эта особенность позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема. Если материал (1.2) изотропный, то в случае сплошного тела на классе плоских осесимметричных равновесных двухфазных решений возможно существование только одной цилиндрической межфазной границы.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что область $V_1: 0 \leq r < R_1$, занятая фазой (+), область $V_2: R_1 < r < R_2 < R$ занята фазой (-) (R_1 и R_2 – межфазные границы). Радиальные перемещения в областях V_1, V_2 даны формулой (2.10) с соответствующими наборами констант $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$.

С учетом (2.8), (2.9) и (2.10) термодинамическое условие (2.6) в случае осесимметричных деформаций принимает вид

$$\hat{\gamma}^* + \frac{d_\pm^* (\tilde{k}_+ \vartheta^p - 2\tilde{k}_1 A_\pm)^2}{d_\mp \cdot 2\tilde{k}_1} + 2\mu_1 \frac{d_\mp^* B_\pm^2}{d_\mp R_\Gamma^4} \pm \frac{2\mu_1 (\tilde{k}_+ \vartheta^p - 2\tilde{k}_1 A_\pm) B_\pm}{d_\mp R_\Gamma^2} = 0 \quad (2.21)$$

$$d_\pm = \tilde{k}_\pm + \mu_\pm, \quad d_\pm^* = \tilde{k}_\pm + \mu_\mp$$

где знаки (\pm) соответствуют термодинамическому условию, записанному на границах $R_\Gamma = \{R_1, R_2\}$ со стороны фазы (+) и (-), соответственно.

Константы A_2 и B_2 для области V_2 могут быть найдены из условий (2.20), записанных при $R_\Gamma = R_1$:

$$A_2 = \frac{d_- \tilde{k}_+ \vartheta^p - q d_+^*}{2k_1 d_-}, \quad B_2 = \frac{q R_1^2}{2d_-} \quad (2.22)$$

Запишем теперь термодинамическое условие (2.21) на границе R_2 со стороны области V_2 , т.е. фазы (-). Подставив (2.22) в (2.21), взятое со знаком минус при $R_\Gamma = R_2$, получим после несложных алгебраических преобразований, что левая часть (2.21) принимает вид монотонной функции R_2 :

$$\tilde{\chi}(R_2) = -\frac{\mu_1 k_1 \hat{\gamma}^*}{d_+ d_-} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)^2$$

равной нулю только при $R_2 = R_1$, что означает невозможность второй равновесной межфазной границы.

Отметим, что в данной работе рассматривается сплошное цилиндрическое включение. Количество решений может измениться в случае полого цилиндрического включения, аналогично тому как это происходит в случае шара со сферической полостью [21, 22].

Таким образом, в зависимости от деформаций и параметров материала количество равновесных осесимметричных решений может меняться от одного до четырех (двух однофазных и двух двухфазных с одной межфазной границей). Выбор между однофазными состояниями определяется поверхностью переключения. Окончательный

выбор предлагается ниже делать на основе анализа энергетических изменений при возникновении двухфазных состояний и их локальной устойчивости.

2.3. *Энергетические изменения при развитии двухфазных состояний.* Энергию взаимодействия $E_{ie} = \Pi_{ie} - \Pi_0$ двухфазного включения $V = V_i \cup V_e$ с телом $V_0 \cup V$, где V_0 – внешняя к включению область тела, вычислим как

$$E_{ie} = \Pi_{ie} - \Pi_e + E_e \quad (2.23)$$

где Π_{ie} и Π_e – свободные энергии Гиббса тела с двухфазным включением и включением, находящимся в однофазном состоянии e , соответственно; $E_e = \Pi_e - \Pi_0$ – энергия взаимодействия с телом включения, находящегося в фазовом состоянии e определяется формулой (1.6), в которой индекс (+) или (–) соответствует фазовому состоянию e .

Представим разность энергий Π_{ie} и Π_e в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{ie} - \Pi_e &= \int_{V_0} (f_0(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) - f_0(\boldsymbol{\epsilon}_e^0)) dV + \int_{V_e} (f_e(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) - f_e(\boldsymbol{\epsilon}_e)) dV + \\ &+ \int_{V_i} (f_i(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) - f_e(\boldsymbol{\epsilon}_e)) dV \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}_{ie}$ – деформации в теле с двухфазным включением; $\boldsymbol{\epsilon}_e^0$ – деформации, которые были бы в области V_0 , если бы включение было в однофазном состоянии e ; $\boldsymbol{\epsilon}_e$ – деформации, которые были бы во включении, находящемся в однофазном состоянии e ; $f_i(\boldsymbol{\epsilon}, \theta)$ и $f_e(\boldsymbol{\epsilon}, \theta)$ – плотности свободных энергий фаз, расположенных в областях V_e и V_i соответственно.

Из (1.2) следует, что

$$\begin{aligned} f_0(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) - f_0(\boldsymbol{\epsilon}_e^0) &= 1/2(\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) + \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\epsilon}_e^0)) : (\boldsymbol{\epsilon}_{ie} - \boldsymbol{\epsilon}_e^0) \\ f_e(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) - f_e(\boldsymbol{\epsilon}_e) &= 1/2(\boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) + \boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\epsilon}_e)) : (\boldsymbol{\epsilon}_{ie} - \boldsymbol{\epsilon}_e) \\ f_i(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) - f_e(\boldsymbol{\epsilon}_e) &= \pm(\gamma_* + 1/2\mathbf{q}_{ie} : [\mathbf{C}]^{-1} : \mathbf{q}_e) + 1/2(\boldsymbol{\sigma}_i(\boldsymbol{\epsilon}_{ie}) + \boldsymbol{\sigma}_i(\boldsymbol{\epsilon}_e)) : (\boldsymbol{\epsilon}_{ie} - \boldsymbol{\epsilon}_e) \\ \mathbf{q}_{ie} &= -[\mathbf{C}] : \boldsymbol{\epsilon}_{ie} + [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^P], \quad \mathbf{q}_e = -[\mathbf{C}] : \boldsymbol{\epsilon}_e + [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^P] \\ \boldsymbol{\sigma}_0 &= \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_e^P), \quad \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C}_i : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_i^P) \end{aligned}$$

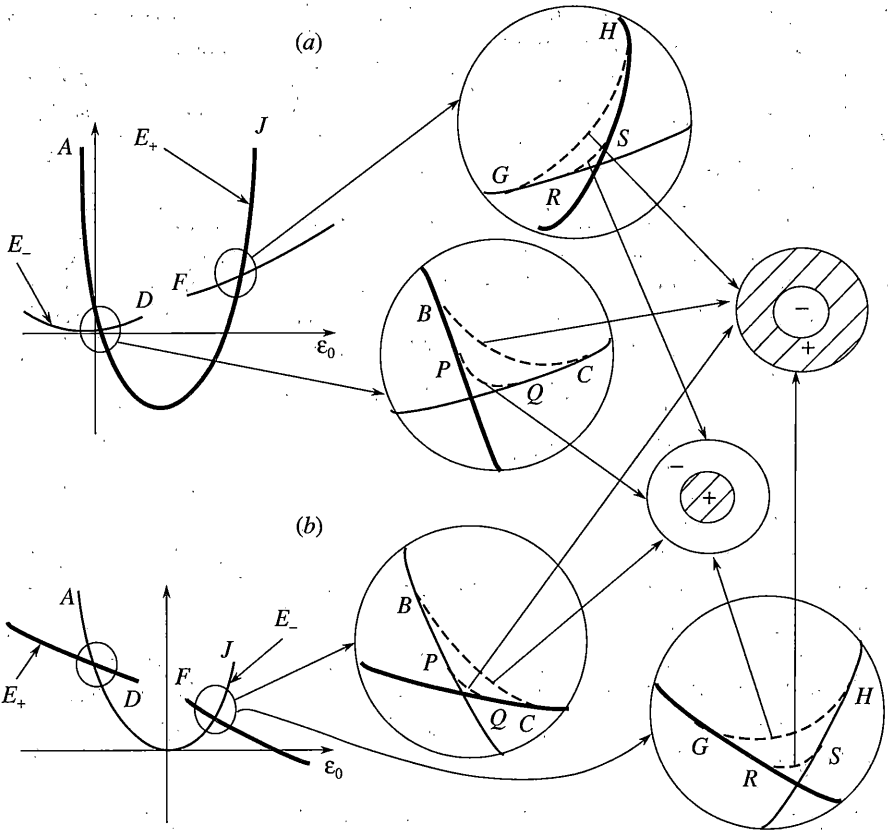
где знак (+) соответствует случаю $V_+ = V_i$, знак (–) – случаю $V_+ = V_e$.

Используя формулу Остроградского–Гаусса, окончательно получим

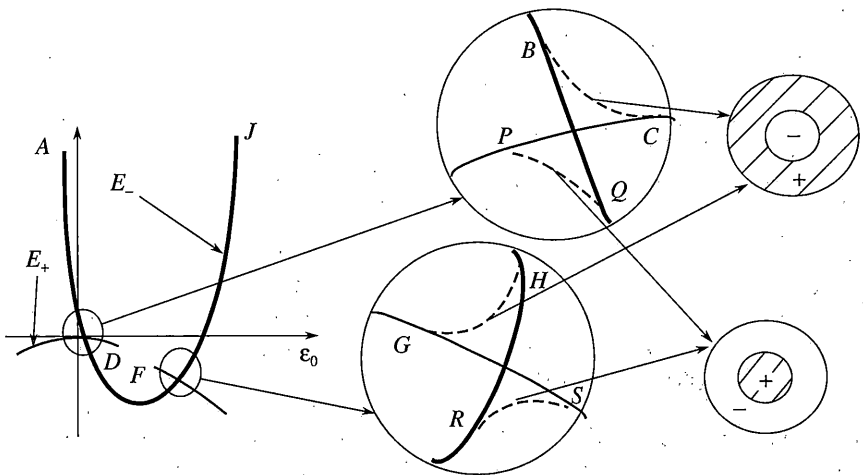
$$\Pi_{ie} - \Pi_e = \pm \int_{V_i} (\gamma_* + 1/2\mathbf{q}_{ie} : [\mathbf{C}]^{-1} : \mathbf{q}_e^0) dV \quad (2.24)$$

Примеры зависимости энергий взаимодействия E_- , E_+ для однофазного включения (сплошные линии) и E_{ie} для двух возможных двухфазных решений (пунктирные линии) от внешней деформации $\boldsymbol{\epsilon}_0$ приведены на фиг. 5 ($\mu_{\pm} > \mu_0$) и фиг. 6 ($\mu_+ > \mu_0 > \mu_-$). Кривые на фиг. 5, *a* соответствуют случаю $\mu_+ > \mu_-$, кривые на фиг. 5, *b* – случаю $\mu_- > \mu_+$.

Относительные значения энергий взаимодействия зависят от соотношения между модулями сдвига матрицы и фаз включения. На классе двухфазных состояний включения энергетически предпочтительным является расположение фазы с большим модулем сдвига в центре включения (ср. пунктиры *BC* и *PQ*, *GH* и *RS*). В то же время энергии тела с двухфазными включениями могут быть как меньше, так и больше энергий тела с однофазными включениями в области их существования.



Фиг. 5



Фиг. 6

В случае $\mu_{\pm} > \mu_0$ (фиг. 5) энергии тела с равновесными двухфазными включениями больше энергий тела с однофазными включениями. Если $\mu_{\pm} < \mu_0$, то энергии тела с двухфазными включениями меньше энергий тела с однофазными включениями.

Если $\mu_+ > \mu_0 > \mu_-$ (фиг. 6) или $\mu_- > \mu_0 > \mu_+$, то двухфазное решение с более жесткой фазой в центре является более предпочтительным, чем однофазные решения. Энергия, соответствующая второму двухфазному решению, больше энергии тела с однофазным включением.

Приведенные оценки энергий взаимодействия означают, что двухфазные состояния включения могут быть метастабильными или неустойчивыми.

2.4. Устойчивость равновесных двухфазных осесимметричных деформаций. При заданной внешней деформации ϵ_0 энергия взаимодействия E_{ie} является функцией $z = \rho^2 - \text{квадрата относительного радиуса межфазной границы}$. Можно убедиться в том, что равновесные решения (2.16) соответствуют выполнению условия $\partial E_{ie} / \partial z = 0$. Отметим, что это условие является необходимым условием равновесия, но, вообще говоря, недостаточным, так как условие термодинамического равновесия, из которого следует (2.16), означает стационарность функционала энергии по отношению к произвольным возмущениям межфазной границы.

Для исследования устойчивости по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы определим знак $\partial^2 E_{ie} / \partial z^2$. Дифференцируя (2.24) по z получим для равновесного двухфазного включения

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 E_{ie}}{\partial z^2} = \frac{2(\mu_e - \mu_0)\gamma_* k_1}{d_i(\tilde{k}_e + \mu_0)} \quad (2.25)$$

С учетом (2.15) из (2.25) следует, что осесимметричные двухфазные состояния, для которых $\mu_e > \mu_0$ неустойчивы. Согласно приведенным выше оценкам, энергия тела с такими двухфазными включениями больше энергии, соответствующей однофазным состояниям включения. Фазовое превращение включения происходит или “взрывообразно” при достижении поверхности переключения или на другом классе двухфазных деформаций.

Двухфазные решения устойчивы по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы, если $\mu_{\pm} < \mu_0$ (имеются два решения с различным упорядочением фаз) или $\mu_e < \mu_0 < \mu_i$ (фаза с большим модулем сдвига расположена в центре включения). Эти решения являются энергетически выгодными по сравнению с соответствующими однофазными решениями.

Прежде чем перейти к рассмотрению устойчивости этих решений относительно другого типа возмущений напомним, что как уже отмечалось во введении, устойчивость в задачах о фазовых переходах зависит от типа граничных условий. В обсуждаемой задаче нагрузка на поверхность цилиндрического включения передается через окружающую матрицу. До сих пор рассматривалось неограниченное тело. Исследуем, как влияет на устойчивость двухфазных состояний включения конечность размеров тела. Для этого рассмотрим цилиндрическое включение радиуса R в соосном цилиндрическом теле радиуса R_0 .

Пусть на поверхности тела задано радиальное перемещение u_0 . Повторяя описанную выше процедуру, найдем зависимость радиуса равновесной межфазной границы от $\vartheta_0 = 2u_0/R_0$:

$$\rho^2 = \frac{(\rho_0^2 \tilde{k}_0 + (1 - \rho_0^2) \tilde{k}_e + \mu_0) d_i \pm d_e q^{-1} (k_1 (\tilde{k}_0 + \mu_0) \vartheta_0 - \vartheta_*)}{(\rho_0^2 (\tilde{k}_0 + \mu_e) + \mu_0 - \mu_e) k_1} \quad (2.26)$$

$$\rho_0 = R/R_0, \quad \vartheta_* = (\tilde{k}_- + \mu_0 + \rho_0^2 (\tilde{k}_0 - \tilde{k}_-)) \tilde{k}_+ \vartheta^p$$

При $\rho_0 \rightarrow 0$ выражение для ρ совпадает с соответствующим выражением (2.16) для неограниченного тела. При $\rho_0 = 1$ формула (2.26) определяет радиусы равновесных межфазных границ, соответствующие двум решениям задачи о двухфазном цилиндре, на поверхности которого задано радиальное перемещение u_0 :

$$\rho = \frac{d_i}{k_1} \pm \frac{d_e}{q} \left(\vartheta_0 \pm \frac{\tilde{k}_+}{k_1} \vartheta^p \right) \quad (2.27)$$

Отметим, что (2.27) следует из (2.16) при $\mu_0 \rightarrow \infty$.

Для исследования устойчивости по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы находим, что в случае равновесного двухфазного включения

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 E_{ie}}{\partial z^2} = \frac{2(\mu_e - \mu_0 - \rho_0^2(\tilde{k}_0 + \mu_e))\gamma_* k_1}{d_i(\mu_0 + \rho_0^2 \tilde{k}_0 + \tilde{k}_e(1 - \rho_0^2))} \quad (2.28)$$

Если $\rho_0 = 1$, то из (2.28) с учетом (2.15) следует, что

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 E_{ie}}{\partial z^2} = \frac{2\gamma_* k_1}{d_i} > 0.$$

В случае цилиндра, претерпевающего фазовое превращение, оба решения (2.27) устойчивы по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы.

В случае цилиндрического включения в цилиндрическом теле двухфазное решение устойчиво по отношению к возмущению радиуса межфазной границы только, если

$$\mu_e - \mu_0 - \rho_0^2(\tilde{k}_0 + \mu_e) < 0. \quad (2.29)$$

Согласно (2.29) устойчивость двухфазных решений зависит не только от соотношения модулей сдвига μ_e и μ_0 , но и от масштабного фактора – относительного размера включения и тела. Если $\mu_e - \mu_0 > 0$, то, как показано выше, осесимметричная двухфазная деформация включения, помещенного в неограниченную матрицу, неустойчива. Для конечного тела необходимое условие устойчивости (2.29) нарушается только при $(\mu_e - \mu_0) > \rho_0^2(\tilde{k}_0 + \mu_e)$. Следовательно, внешняя граница тела, на которой заданы перемещения, может оказывать стабилизирующее воздействие на двухфазную деформацию включения.

Следуя [21, 22], исследуем теперь устойчивость найденных решений относительно другого класса возмущений. Введем вектор малых добавочных перемещений w и возмущение межфазной границы η в направлении нормали \mathbf{n} . Перемещения \mathbf{u} и радиус межфазной границы ρ_Γ в возмущенном состоянии представим в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(r) + w(r, \varphi), \quad \rho_\Gamma = \rho + \eta(\varphi) \quad (2.30)$$

$$w(r, \varphi) = u(r, \varphi)\mathbf{e}_r + v(r, \varphi)\mathbf{e}_\varphi \quad (2.31)$$

где $\mathbf{u}^0(r) = u^0(r)\mathbf{e}_r$ и ρ соответствуют равновесному решению, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ – базисные орты полярных координат.

Линеаризованные уравнения механического равновесия для возмущенной задачи принимают вид

$$\begin{aligned} (\tilde{k} + \mu) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} &= 0 \\ (\tilde{k} + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\Psi \triangleq \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(v - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \quad (2.33)$$

Из непрерывности перемещений и усилий на межфазной границе следует, что

$$[u] = -\eta \left[\frac{du}{dr} \right], \quad [v] = 0 \quad (2.34)$$

$$\left[(\tilde{k} - \mu)\Psi + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] = -\eta \left[\frac{d\sigma_r^0}{dr} \right], \quad \left[\mu \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \right\} \right] = \frac{d\eta}{d\varphi} [\sigma_\varphi] \quad (2.35)$$

Условия на границе матрицы и включения имеют вид (2.34), (2.35) при $\eta = 0$.

Ищем решение задачи для возмущений в виде:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} U_n(r) \cos(n\varphi), \quad v(r, \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n(r) \sin(n\varphi) \quad (2.36)$$

$$\eta(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \zeta_n(r) \cos(n\varphi)$$

Для нахождения $U_n(r)$ и $V_n(r)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\tilde{k} + \mu)r\Psi'_n(r) - \mu n\Omega'_n(r) &= 0 \\ (\tilde{k} + \mu)n\Psi_n(r) + \mu r\Omega'_n(r) &= 0 \\ \Psi_n(r) = U'_n(r) + \frac{1}{r}(U_n(r) + nV_n(r)), \quad \Omega_n(r) &= V'_n(r) + \frac{1}{r}(V_n(r) + nU_n(r)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} U_n(r) &= \frac{2\mu - n\tilde{k}}{4(n+1)\mu} r^{n+1} C_n^1 - \frac{2\mu + n\tilde{k}}{4(n-1)\mu} r^{1-n} C_n^2 + r^{n-1} D_n^1 + r^{-n-1} D_n^2 \\ V_n(r) &= \frac{n\tilde{k} + 2(\tilde{k} + \mu)}{4(n+1)\mu} r^{n+1} C_n^1 - \\ &- \frac{n\tilde{k} - 2(\tilde{k} + \mu)}{4(n-1)\mu} r^{1-n} C_n^2 + r^{n-1} D_n^1 + r^{-n-1} D_n^2 \end{aligned}$$

где C_n, D_n – постоянные интегрирования, которые находятся из соответствующих краевых условий как функции параметров начального (невозмущенного) состояния и амплитуды возмущения межфазной границы.

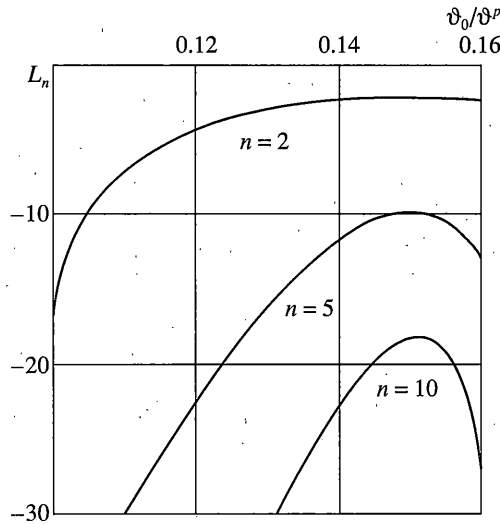
Кинетическое уравнение (2.7) описывает развитие начальных возмущений фазовой границы и может быть записано как

$$\frac{q}{d_e} \left((\tilde{k}_i + \mu_i) U'_n + \frac{1}{\rho} (\tilde{k}_i - \mu_i + 2\mu_e) (nV_n + U_n) \right) = \frac{1}{k} \frac{d\zeta_n}{dt} \quad (2.38)$$

Подстановка найденных зависимостей $U_n(r)$ и $V_n(r)$ в (2.38) приводит к уравнению для коэффициентов разложения функции η :

$$\frac{1}{k} \frac{d\zeta_n}{dt} = L_n(\vartheta_0) \zeta_n \quad (2.39)$$

Аналитическое выражение для $L_n(\vartheta_0)$ является весьма громоздким и здесь не приводится.



Фиг. 7

Исследование устойчивости равновесных решений сводится к нахождению точек бифуркации ϑ_0^* , определяемых из условия существования ненулевых решений уравнения $L_n(\vartheta_0) = 0$. Поведение малых возмущений в окрестности точек бифуркации зависит от знака коэффициента L_n в (2.39). Отрицательные значения допускают только убывающие со временем решения. В этом случае начальное двухфазное состояние устойчиво. Положительные значения L_n соответствуют росту возмущений. Номер n характеризует форму потери устойчивости.

Двухфазное состояние устойчиво по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы при выполнении условия (2.29). На фиг. 7 представлены результаты анализа устойчивости по отношению к возмущениям (2.36) для этого же случая при дополнительном условии $\mu_i > \mu_e$, соответствующим энергетически самому выгодному состоянию. В диапазоне величин ϑ_0 , при которых возможны двухфазные состояния, точек бифуркации нет, неустойчивости не обнаружена.

Аналогичный анализ показал, что осесимметричные двухфазные состояния, устойчивые по отношению к возмущению радиуса межфазной границы, неустойчивы по отношению к возмущениям (2.36), если $\mu_i < \mu_e$. Аналогичная неустойчивость двухфазных состояний с меньшим модулем сдвига внутренней фазы отмечалась при исследовании центрально-симметричных двухфазных деформаций [21, 22].

3. Заключение. Проведенное исследование продемонстрировало ряд особенностей краевой задачи для включения, претерпевающего фазовые превращения в процессе деформирования матрицы.

1. Из-за нелинейности, обусловленной неизвестной межфазной границей, краевая задача имеет неединственное решение даже в случае линейно-упругих фаз. Термодинамическое условие на межфазной границе приводит к замене краевой задачи задачей Коши, что, в свою очередь, в случае сплошного включения предопределяет на классе осесимметричных двухфазных деформаций возможность только одной равновесной межфазной границы и, следовательно, двух решений, различающихся упорядочением фаз.

2. Осесимметричные двухфазные деформации цилиндрического включения в неограниченной матрице могут терять устойчивость по отношению к различным типам

возмущений в зависимости от соотношения модулей сдвига матрицы и фаз включения. Сравнение энергетических изменений с результатами исследования устойчивости свидетельствует о том, что если энергия двухфазного состояния больше энергии соответствующего однофазного состояния, то двухфазное состояние неустойчиво по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы.

Если модуль сдвига матрицы меньше модулей сдвига фаз, то энергии обоих осесимметричных двухфазных состояний включения больше энергий соответствующих однофазных состояний. Двухфазные состояния включения неустойчивы по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы. На классе осесимметричных деформаций фазовое превращение включения происходит "взрывообразно" при достижении поверхности переключения фаз.

Если модуль сдвига матрицы имеет промежуточное значение по сравнению с модулями сдвига фаз, то решение, для которого фаза с большим модулем сдвига занимает внутреннюю область включения, является устойчивым по отношению к обоим рассмотренным типам возмущений. Это решение является энергетически предпочтительным по сравнению с однофазным решением. Второе двухфазное решение неустойчиво по отношению к возмущениям радиуса межфазной границы и имеет энергию большую, чем энергия однофазного состояния.

Если модуль сдвига матрицы больше модулей сдвига фаз, то оба двухфазных решения являются энергетически предпочтительными по сравнению с однофазными решениями и устойчивыми относительно возмущения радиуса межфазной границы. Относительно второго типа возмущений устойчивым является только решение, для которого внутренняя фаза включения имеет больший модуль сдвига.

3. В случае включения, находящегося в теле конечных размеров, устойчивость двухфазных состояний зависит от масштабного фактора, который определяется модулями упругости матрицы, модулем сдвига внешней фазы и относительным размером включения. Если на границе тела заданы перемещения, и модуль сдвига матрицы меньше модулей сдвига фаз, то увеличение относительного размера включения оказывает стабилизирующее действие на двухфазное состояние.

Авторы выражают признательность Н.Ф. Морозову, по чьей инициативе было начато данное исследование, за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Программ фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-4518.2006.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (07-01-00659, 07-01-00525).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойко В.С., Гарбер Р.И., Косевич А.М. Обратимая пластичность кристаллов. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Vilchevskaya E.N., Freidin A.B. On phase transformations of an inclusion in an external strain field // Proc. XXXII Summer School APM-2004. St. Petersburg. IPME RAS. 2004. P. 447–454.
3. Фрейдин А.Б. Приближение малых деформаций в теории фазовых превращений при деформировании упругих тел // Прочность и разрушение материалов и конструкций. Межвуз. сб. под ред. Н.Ф. Морозова. (Исследования по упругости и пластичности. Вып. 18.) СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1999. С. 266–290.
4. Морозов Н.Ф., Назыров И.Р., Фрейдин А.Б. Одномерная задача о фазовом превращении упругого шара // Докл. АН. 1996. Т. 346. № 2. С. 188–191.
5. Назыров И.Р., Фрейдин А.Б. Фазовые превращения при деформировании твердых тел в модельной задаче об упругом шаре // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 52–71.
6. Морозов Н.Ф., Фрейдин А.Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С. 220–232.

7. Гринфельд М.А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824–827.
8. James R.D. Finite deformation by mechanical twinning // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1981. V. 77. P. 143–177.
9. Трускиновский Л.М. Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 306–310.
10. Кондауров В.И., Никитин Л.В. О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348–1351.
11. Gurtin M.E. Two-phase deformations of elastic solids // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1983. V. 84. № 1. P. 1–29.
12. Fosdick R., Hertog B. The Maxwell relation and Eshelby's conservation law for minimizers in elasticity theory // J. Elasticity. 1989. V. 22. P. 193–200.
13. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
14. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Условия фазового равновесия в нелинейно-упругих средах с микроструктурой // Докл. АН. 1992. Т. 322. № 6. С. 1052–1056.
15. Фрейдin А.Б., Чискис А.М. Зоны фазовых переходов в нелинейно-упругих изотропных материалах. Ч. 1. Основные соотношения // Изв. АН. МТТ. 1994. № 4. С. 91–109.
16. Осмоловский В.Г. Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 262 с.
17. Фрейдin А.Б. О равновесии фаз изотропного нелинейно-упругого материала // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. С. 150–168.
18. Вакуленко А.А. О микро- и макрокинетике мартенситных превращений // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 43–62.
19. Freidin A.B., Vilchevskaya E.N., Sharipova L.L. Two-phase deformations within the framework of phase transition zones // Theoret. and Appl. Mech. 2002. V. 28–29. P. 149–172.
20. Freidin A.B. On new phase inclusions in elastic solids // ZAMM 2007. V. 87. № 2. P. 102–116.
21. Еремеев В.А., Фрейдin А.Б., Шарипова Л.Л. Об устойчивости равновесия двухфазных упругих тел // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 66–92.
22. Еремеев В.А., Фрейдin А.Б., Шарипова Л.Л. О неединственности и устойчивости в задачах равновесия упругих двухфазных тел // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 2. С. 189–193.
23. Еремеев В.А., Фрейдin А.Б., Шарипова Л.Л. О центрально-симметричных двухфазных полях деформаций // Пробл. мех. деформ. тв. тела. Межвуз. сб-к к 70-летию акад. Морозова Н.Ф. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2002. С. 111–122.
24. Фрейдin А.Б. Гетерогенное деформирование упругих тел вследствие множественного возникновения слоев новой фазы // Научн. тр. Междунар. семинара “Актуальные проблемы прочности” им. В.А. Лихачева. Новгород: 1997. Т. 1. Ч. 2. С. 236–240.
25. Freidin A.B., Sharipova L.L. On a model of heterogenous deformation of elastic bodies by the mechanism of multiple appearance of new phase layers // Meccanica. 2006. V. 41. P. 321–339.
26. Вильчевская Е.Н., Фрейдin А.Б. Множественное возникновение эллипсоидальных зародышей новой фазы // Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 6. С. 770–774.
27. Freidin A.B., Fu Y.B., Sharipova L.L., Vilchevskaya E.N. Spherically symmetric two-phase deformations and phase transition zones // Int. J. Solids and Struct. 2006. V. 43. P. 4484–4508.
28. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. Dordrecht: Kluwer Academic, 1987. 587 p.
29. Кубланов Л.Б., Фрейдin А.Б. Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 493–501.
30. Kunin I.A. Elastic media with Microstructure. II. Three Dimensional Models // Ser. Solid State Sci. V. 44. Berlin; N.-Y., etc.: Springer-Verlag, 1983. 272 p.
31. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов // Петрозаводск: Изд-во Петрозав. ун-та, 1993. 538 с.
32. Eshelby J.D. The determination of the elastic field on an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. Lond. 1957. A 241. P. 376–396.
33. Milgrom M., Shtrikman S. The energy of inclusions in linear media exact shape-independent relations // J. Mech. Phys. Solids. 1992. V. 40. № 5. P. 927–937.
34. Фрейдin А.Б. Трещины серебра и полосы сдвига в стеклообразных полимерах как слои новой фазы // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 3–10.