

УДК 519.7

© 2007 г. Ю.И. ВИНОГРАДОВ, Ю.А. ГУСЕВ, В.И. НИКИТЕНКО, В.И. ПЕТРОВ

## **ЛОКАЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Предлагаются эффективные методы исследования концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций. Приоритетность методов определяется существенными отличительными признаками при сравнении с известными. Решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений механики деформирования оболочек после разделения переменных определяется аналитически в виде матричного ряда Тейлора. Свойство решения удовлетворять произвольным начальным условиям позволило просто до счета привести краевые задачи к начальным. Другой метод для конструкций с произвольными параметрами оболочек предусматривает перенос краевых условий мультипликативным методом к месту концентрации напряжений и использование их как начальных при исследовании концентрации напряжений. Приводятся результаты исследования концентрации напряжений различными методами в транспортно пусковых стаканах летательных аппаратов.

**1. Введение.** Разрушение конструкций начинается, как правило, в местах концентрации напряжений с образования и катастрофического развития трещин в тонкостенных элементах: пластинах и оболочках. Из накопленного опыта испытаний и эксплуатации конструкций места концентрации напряжений известны. Они, как правило, обусловлены скачками жесткостей, изломами геометрии тонкостенных элементов и, главным образом, локальными воздействиями и локальной передачей усилий в конструкциях.

При проектировании тонкостенных конструкций в известных местах концентрации напряжений расчетами определяются их размеры, характер распределения напряжений и, что часто бывает самым главным, максимальные напряжения в этих местах. Для решения таких задач предложены теоретически обоснованные по существу аналитические методы и построены эффективные алгоритмы решения краевых задач.

Эффективность построенных методов исследования концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций в принятом понимании возрастает, если до счета краевые задачи приводятся к начальным или краевые задачи решаются как начальные с использованием краевых условий, перенесенных к местам концентрации напряжений.

В качестве примера решения прикладных краевых задач методом Коши, то есть как начальных, приводится исследование концентрации напряжений в распространенных на практике транспортно пусковых стаканах летательных аппаратов.

**2. Математические модели механики деформирования оболочек. Решение дифференциальных уравнений.** Математическая модель механики деформирования слоистых ортотропных оболочек в виде системы дифференциальных уравнений, каждое из которых первого порядка, в каноническом виде получены Я.М. Григоренко и А.Т. Василенко [1]. Они используются для расчета цилиндрической оболочки транспортно пускового стакана. В книге имеется несколько опечаток, которые до обнару-

жения не позволяли получить какие-либо результаты счета. После их исправления в обозначениях [1] имеем

$$\begin{aligned}
 b_{33}^{(1)} &= -\frac{1}{r^2}(d_{42}r + d_{52}\sin\varphi), & b_{12}^{(2)} &= \frac{d_{51}}{r^2}\sin^2\varphi, & b_{14}^{(2)} &= -\frac{d_{53}}{r^2}\sin\varphi \\
 b_{23}^{(2)} &= \frac{d_{52}}{r^2}\cos\varphi, & b_{28}^{(2)} &= \frac{1}{r^3}(2d_{66} + d_{55}\cos^2\varphi), & b_{47}^{(2)} &= -\frac{2}{r^3}(d_{64}r + d_{66}\sin\varphi) \\
 b_{16}^{(3)} &= \frac{d_{56}}{r^4}\sin\varphi, & b_{27}^{(3)} &= \frac{1}{r^4}(d_{54}r + d_{55}\sin\varphi)\cos\varphi \\
 b_{36}^{(3)} &= -\frac{1}{r^4}(d_{45}r + d_{55}\sin\varphi)\cos\varphi \\
 b_{37}^{(2)} &= -\frac{1}{r^4}[(d_{44}r + d_{45}\sin\varphi)r + (d_{54}r + d_{55}\sin\varphi)\sin\varphi]
 \end{aligned}$$

В формуле для вычисления вспомогательного коэффициента  $a_2$  вместо записанного в книге выражения  $a_2 = K_{16} + 2D_{66}\sin\varphi/r$  должно быть  $a_2 = K_{16} + 2D_{16}\sin\varphi/r$ .

Хорошо известно [2], что линейные обыкновенные дифференциальные уравнения всегда можно представить в виде системы дифференциальных уравнений, каждое из которых первого порядка, и записать в матричной форме.

$$Y'(s) = A(s)Y(s) + G(s), \quad (*)' = \frac{d}{ds}(*), \quad 0 \leq s \leq L \tag{2.1}$$

$$Y(s) = \|y_1(s), \dots, y_{16}(s)\|^T = \|N_x, N_z, S, M_s, u_x, u_z, v, \vartheta_s, N'_x, N'_z, S', M'_s, u'_x, u'_z, v', \vartheta'_s\|^T$$

В данной работе решение матричного однородного дифференциального уравнения найдено, вероятно, впервые в виде матричного ряда Тейлора с одной лишь оговоркой, что в отличие от скалярного он не обладает перестановочным свойством матриц

$$K_{s_0}^{s_n}(A(s)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(B\Delta s_i)^m}{m!} \tag{2.2}$$

$$B = \sum_{i=1}^n A(\tau_i), \quad \Delta s = s_n - s_0, \quad \Delta s_i = \frac{\Delta s}{n}, \quad \tau_i \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Здесь текущему аргументу присвоено произвольное значение  $s = s_n$ . Очевидно, что формула получена делением интервала  $[s_0, s_n]$  промежуточными точками  $s_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на части с интервалами  $[s_{i-1}, s_i]$ , на которых переменные коэффициенты дифференциальных уравнений, являющиеся элементами матрицы  $A(s)$ , осредняются  $A(\tau_i)$ .

Если дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты, то формула решения однородного дифференциального уравнения (2.2) преобразуется к виду

$$K_{s_0}^{s_n}(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A\Delta s)^m}{m!}, \quad \Delta s = s_n - s_0 \tag{2.3}$$

Решение в виде ряда (2.2) справедливо, если элементами матрицы  $A(s)$  являются функции, непрерывные в некотором интервале  $[s_0, s_n]$  изменения аргумента  $s$ . Доказано, что ряды (2.2) и (2.3) сходятся.

Таким образом, получены формулы определения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с контролируемой погрешностью. Решения краевых задач на их основе можно считать аналитическими.

Решения матричного однородного дифференциального уравнения можно вычислять на основе определения матричного мультипликативного интеграла Вольтерра [2] по формуле

$$\mathbf{K}_{s_0}^{s_n}(\mathbf{A}(s)) = [\mathbf{E} + \mathbf{A}(\tau_n)\Delta s_n] \dots [\mathbf{E} + \mathbf{A}(\tau_i)\Delta s_i] \dots [\mathbf{E} + \mathbf{A}(\tau_1)\Delta s_1] \quad (2.4)$$

$$\Delta s = s_n - s_0, \quad \Delta s_i = \Delta s/n, \quad \tau_i \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $\mathbf{A}(s) = \mathbf{A}$  и выражение (2.4) превращается в матричный бином Ньютона, если интервалы  $\Delta s_i$  одинаковые:

$$\mathbf{K}_{s_0}^{s_n}(\mathbf{A}(s)) = (\mathbf{E} + \mathbf{A}\Delta s_n)^n, \quad \Delta s_n = (s_n - s_0)/n \quad (2.5)$$

Методы решения краевых задач с использованием формул (2.4) и (2.5) для вычисления решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений следует относить к численным, так как нет априорных средств контроля погрешностей численного определения решений дифференциальных уравнений.

Частное решение  $\mathbf{Y}^*(s_n)$  неоднородного дифференциального уравнения найдено методом вариации произвольных постоянных. Получена мультипликативная формула с использованием решения однородного дифференциального уравнения

$$\mathbf{Y}_{s_0}^{*s_n} = \mathbf{K}_n \mathbf{K}_{n-1} \dots \mathbf{K}_2 \mathbf{F}_1 + \mathbf{K}_n \mathbf{K}_{n-1} \dots \mathbf{K}_3 \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{K}_n \mathbf{K}_{n-1} \dots \mathbf{K}_{i+1} \mathbf{F}_i + \dots +$$

$$+ \mathbf{K}_n \mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{F}_n, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{G}_i \Delta s_i, \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{K}(\mathbf{A}(\tau_i^*)), \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{G}(\tau_i^*) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}(\tau_i^*)\Delta s_i}{2!} + \frac{(\mathbf{A}(\tau_i^*)\Delta s_i)^2}{3!} + \dots, \quad \tau_i^* \in [s_{i-1}, s_i]$$

Известно, что линейное обыкновенное дифференциальное уравнение или система уравнений имеет множество обладающих различными свойствами решений [3]. Полученные по формулам (2.2)–(2.5) решения, очевидно, обладают свойством удовлетворять произвольным начальным условиям, так как они при начальных значениях аргумента  $s$  образуют единичную матрицу. Таким образом, получено нормированное решение. Любое другое решение имеет вид  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}_{s_0}^{s_n}(\mathbf{A}(s))\mathbf{C}$ , где  $\mathbf{C}$  – произвольная постоянная матрица начальных условий. Из этого следует, что любое другое решение однозначно определяется своими значениями при начальном значении аргумента  $s = s_0$ .

**3. Приведение краевых задач к начальным.** С целью простоты реализации методов исследования концентрации напряжений и повышения эффективности решения прикладных задач предлагается приведение краевых задач к начальным до счета с использованием свойства решений (2.2)–(2.5) дифференциальных уравнений удовлетворять произвольным начальным условиям задач.

Допустим, что определено решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения аналитически или численно. Представим это решение в матричной форме

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}_{s_0}^{s_n}(\mathbf{A}(s))\mathbf{Y}(s_0) + \mathbf{Y}_{s_0}^{*s_n}(\mathbf{G}(s)) \quad (3.1)$$

Требуется краевую задачу привести до счета к начальной. Пусть  $s_0 = 0$ ,  $s_n = l$  и заданы краевые условия

$$\mathbf{Y}(0)_k = |y_1, y_2, \dots, y_k|^T = |b_1, b_2, \dots, b_k|^T = \mathbf{B}_1 \text{ при } s = 0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Y}(l)_{n-k} = |y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n|^T = |b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n|^T = \mathbf{B}_2 \text{ при } s = l$$

где  $n$  – порядок дифференциального уравнения. Перепишем решение (3.1) проще по форме  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(0) + \mathbf{Y}^*$  и представим как связь между краями  $\mathbf{Y}(l) = \mathbf{K}(l)\mathbf{Y}(0) + \mathbf{Y}^*$ , где  $\mathbf{Y}^*$  определяется на интервале  $[s_1, s_2]$  внешнего воздействия.

Связь между краями представим иначе

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Y}(l)_k \\ \mathbf{Y}(l)_{n-k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{Y}(0)_k \\ \mathbf{Y}(0)_{n-k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_k^* \\ \mathbf{Y}_{n-k}^* \end{vmatrix}$$

или

$$\mathbf{Y}(l)_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{Y}(0)_k + \mathbf{K}_{12}\mathbf{Y}(0)_{n-k} + \mathbf{Y}_k^* \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Y}(l)_{n-k} = \mathbf{K}_{21}\mathbf{Y}(0)_k + \mathbf{K}_{22}\mathbf{Y}(0)_{n-k} + \mathbf{Y}_{n-k}^*$$

Учитывая краевые условия (3.2) последнюю матричную систему уравнений перепишем в виде

$$\mathbf{Y}(l)_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{Y}(0)_{n-k} + \mathbf{Y}_k^*$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{K}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{Y}(0)_{n-k} + \mathbf{Y}_{n-k}^*$$

Из второго матричного уравнения последней системы определим начальные условия  $\mathbf{Y}(0)_{n-k}$  через краевые

$$\mathbf{Y}(0)_{n-k} = \mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{B}_1 - \mathbf{Y}_{n-k}^*)$$

Вместе с заданными краевыми условиями  $\mathbf{Y}(0)_k = \mathbf{B}_1$  они образуют необходимые начальные условия для заданной краевой задачи.

Таким образом, решение краевой задачи до счета приведено к решению на ЭВМ задачи Коши

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(0) + \mathbf{Y}^* \quad (3.4)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{Y}(0) = |\mathbf{Y}(0)_k, \mathbf{Y}(0)_{n-k}|^T \text{ или } \mathbf{Y}(0) = |\mathbf{B}_1, \mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{B}_1 - \mathbf{Y}_{n-k}^*)|^T$$

При исследовании концентрации напряжений по формуле (3.4) решение  $\mathbf{K}(s)$  для различных значений аргумента  $s$  определяется по одной из формул (2.2)–(2.5).

Начальные условия задачи Коши для других краевых задач определяются с помощью системы матричных уравнений. Действительно, если  $\mathbf{Y}(0)_k = \mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{Y}(l)_k = \mathbf{B}_2$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(0) &= |\mathbf{B}_1, \mathbf{K}_{12}^{-1}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}_{11}\mathbf{B}_1 - \mathbf{Y}_k^*)|^T. \text{ Если } \mathbf{Y}(0)_{n-k} = \mathbf{B}_1, \mathbf{Y}(l)_k = \mathbf{B}_2, \text{ то } \mathbf{Y}(0) = \\ &= |\mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{B}_1 - \mathbf{Y}_k^*, \mathbf{B}_1)|^T. \text{ Если } \mathbf{Y}(0)_{n-k} = \mathbf{B}_1, \mathbf{Y}(l)_{n-k} = \mathbf{B}_2, \text{ то } \mathbf{Y}(0) = \\ &= |\mathbf{K}_{21}^{-1}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{K}_{22}\mathbf{B}_1 - \mathbf{Y}_{n-k}^*, \mathbf{B}_1)|^T. \end{aligned}$$

Вычислительный эксперимент показал, что предложенный простейший алгоритм исследования концентрации напряжений не обеспечивает устойчивость счета для всего многообразия параметров тонкостенных элементов конструкции. Данную устойчивость обеспечивает другой алгоритм, который предусматривает перенос краевых условий к месту концентрации напряжений и использование перенесенных краевых условий как начальных при исследовании концентрации напряжений методом Коши. С целью переноса краевых условий мультипликативным методом [4] докажем теорему о том, что найденное мультипликативное решение краевой задачи является начальным при исследовании методом Коши.

*Теорема.* Если решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения удовлетворяет произвольным начальным условиям, то решение краевой задачи для произвольной точки интервала является начальным для соответствующей задачи Коши.

*Доказательство.* Пусть линейные обыкновенные дифференциальные уравнения представлены в виде системы, каждое уравнение которой первого порядка, и записаны в матричной форме

$$Y' = AY + G, \quad (*)' = \frac{d}{ds} (*) \quad (3.5)$$

Краевые условия записываются также в матричной форме

$$UY(0) = u, \quad VY(l) = v \quad (3.6)$$

где  $U$  и  $V$  – матрицы  $(m-r) \times m$  и  $r \times m$ ;  $u$  и  $v$  – столбцы  $(m-r)$  и  $r$  размерностей соответственно;  $m$  – порядок дифференциального уравнения.

Пусть решение дифференциального уравнения (3.5) определено в виде матрицы  $K_{s_0}^s(A)$ , элементы которой удовлетворяют произвольным начальным условиям, т.е.

$K_{s_0}^s(A) = E$  при  $s = s_0$ , где  $E$  – единичная матрица. Для произвольной точки  $s^*$  интервала решение задачи как начальной через условия  $Y(0)$  и  $Y(l)$  на краях запишем в виде

$$Y(s^*) = K_{s=0}^{s^*} Y(0) + Y_{s=0}^{*s^*}, \quad Y(s^*) = K_{s=l}^{s^*} Y(l) + Y_{s=l}^{*s^*}$$

Отсюда следует, что

$$Y(0) = [K_{s=0}^{s^*}]^{-1} Y(s^*) + [K_{s=0}^{s^*}]^{-1} Y_{s=l}^{*s^*}$$

$$Y(l) = [K_{s=l}^{s^*}]^{-1} Y(s^*) - [K_{s=l}^{s^*}]^{-1} Y_{s=l}^{*s^*}$$

Используя краевые условия (3.6), получим

$$\begin{aligned} \bar{U}Y(s^*) &= \bar{u}, \quad \bar{V}Y(s^*) = \bar{v} \\ \bar{U} &= U[K_{s=0}^{s^*}]^{-1}, \quad \bar{V} = V[K_{s=l}^{s^*}]^{-1}, \quad \bar{u} = u + [K_{s=0}^{s^*}]^{-1} Y_{s=0}^{*s^*}, \quad \bar{v} = (v + [K_{s=l}^{s^*}]^{-1} Y_{s=l}^{*s^*}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.6) и (3.7), заметим, что соотношения (3.7) – краевые условия (3.6), перенесенные в произвольно выбранную точку  $s^*$  решениями уравнения (3.5) в различных направлениях.

Объединим краевые условия (3.7) в одно матричное равенство относительно  $Y(s^*)$ :

$$DY(s^*) = L, \quad D = [\bar{U}, \bar{V}]^T, \quad L = [\bar{u}, \bar{v}]^T$$

Отсюда  $Y(s^*) = D^{-1}L$ .

Таким образом, столбец  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}$  представляет собой краевые условия, перенесенные в произвольную точку  $s^* \in (s_0, l)$ . Он является начальным для соответствующей краевой задачи. Отсюда следует, что и численное решение  $\mathbf{Y}(s^*)$  краевой задачи является начальным условием для соответствующей задачи Коши.

Исследование концентрации напряжений осуществляется решением начальной задачи для различных значений аргумента  $s^*$  с начальными условиями, полученными решением краевой задачи для точки  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s^*) + \mathbf{Y}^*$ , аналогичной (3.4).

**4. Краевая задача.** Пусть система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений приведена к канонической и представлена в матричной форме

$$\mathbf{Y}'(s) = \mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s) + \mathbf{G}(s), \quad (*)' = \frac{d}{ds} (*) \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{Y}(s) = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  транспонированный вектор-столбец искомых величин;  $\mathbf{A}(s) = \|a_{ij}\|_1^n$  – матрица, элементами  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) которой являются коэффициенты системы дифференциальных уравнений;  $\mathbf{G}(s)$  – вектор-столбец параметров для неоднородного дифференциального уравнения.

Необходимо найти такое решение дифференциального уравнения (4.1), которое удовлетворяет известным краевым условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_l(0)\mathbf{Y}(0) &= \mathbf{R}_l(0), \quad \mathbf{H}_r(l)\mathbf{Y}(l) = \mathbf{R}_r(l) \\ \mathbf{H}_l(0) &= \|h_{i,j}\|_{s=0} \quad (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{H}_r(l) = \|h_{i,j}\|_{s=l} \\ &(i = 1, 2, \dots, n - k; j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.2)$$

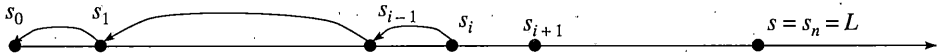
где  $k$  – число условий при  $s = 0$ ;  $n$  – порядок дифференциального уравнения (4.1) или  $n = r$  – ранг матрицы  $\|a_{ij}\|_1^n$ ;  $\mathbf{H}_l(0)$  и  $\mathbf{H}_r(l)$  – прямоугольные матрицы, ненулевые элементы которых в виде единиц заносятся для выбора величин из векторов-столбцов  $\mathbf{Y}|_{s=0, s=l} = [y_1, y_2, \dots, y_n]_{s=0, s=l}^T$  искомых величин;  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s)|_{s=0} = [y_1, y_2, \dots, y_n]_{s=0}^T$  и  $\mathbf{Y}(l) = \mathbf{Y}(s)|_{s=l} = [y_1, y_2, \dots, y_n]_{s=l}^T$  – векторы-столбцы искомых величин на краях;  $\mathbf{R}_l(0) = [r_1, r_2, \dots, r_k]_{s=0}^T$  и  $\mathbf{R}_r(l) = [r_1, r_2, \dots, r_{n-k}]_{s=l}^T$  – векторы-столбцы, ненулевыми элементами которых являются известные значения физических величин на краях.

Рассмотрим лишь один алгоритм переноса краевых условий при вычислении значений функций, удовлетворяющих произвольным начальным условиям в направлениях от произвольно выбранной точки интервала.

Свойства функций позволяют записать решение уравнения (4.1) в виде  $\mathbf{Y}(s_{i-1}) = \mathbf{K}_{s_i}^{s_{i-1}} \mathbf{Y}(s_i) + \mathbf{Y}_{s_i}^{*s_{i-1}}$ , где  $(*)_{s_i}^{*s_{i-1}}$  указывает, что вычисления значений функции, которые будем называть функциями Коши–Крылова, однородного дифференциального уравнения и частного решения  $\mathbf{Y}_{s_i}^{*s_{i-1}}$  выполняются в направлении от произвольно выбранной точки  $s_i$  к левому краю, т.е. от точки  $s_i$  к точке  $s_{i-1}$  (фиг. 1).

Для интервала  $[s_0, s_1]$  решение принимает вид  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{K}_{s_1}^{s_0} \mathbf{Y}(s_1) + \mathbf{Y}_{s_1}^{*s_0}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{H}_l(s_1)\mathbf{Y}(s_1) = \mathbf{R}_l(s_1)$ , где  $\mathbf{H}_l(s_1) = \mathbf{H}_l(s_0)\mathbf{K}_{s_1}^{s_0}$ ,  $\mathbf{R}_l(s_1) = \mathbf{R}_l(s_0) - \mathbf{H}_l(s_0)\mathbf{Y}_{s_1}^{*s_0}$ . Продолжая итерации, левые краевые условия мультипликативно переносятся в произвольную точку  $s^*$ :

$$\mathbf{H}_l(s^*)\mathbf{Y}(s^*) = \mathbf{R}_l(s^*) \quad (4.3)$$



Фиг. 1

Для последнего интервала  $[s_{n-1}, s_n]$ ,  $s_n = l$ , прилегающего к правому краю, решение дифференциального уравнения принимает вид  $\mathbf{Y}(l) = \mathbf{K}_{s_{n-1}}^{s_n} \mathbf{Y}(s_{n-1}) + \mathbf{Y}_{s_{n-1}}^{*s_n}$ .

Используя условия (4.2), получим  $\mathbf{H}_r(s_{n-1})\mathbf{Y}(s_{n-1}) = \mathbf{R}_r(s_{n-1})$ , где  $\mathbf{H}_r(s_{n-1}) = \mathbf{H}_r(l)\mathbf{K}_{s_{n-1}}^{s_n}$ ,  $\mathbf{R}_r(s_{n-1}) = \mathbf{R}_r(l) - \mathbf{H}_r(l)\mathbf{Y}_{s_{n-1}}^{*s_n}$ . Аналогично краевые условия из точки  $s_{n-1}$  переносятся в точку  $s_{n-2}$ . Продолжая итерации, правые краевые условия переносятся в точку  $s^*$ .

Объединяя краевые условия, перенесенные в точку  $s^*$ , получим систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{D}(s^*)\mathbf{Y}(s^*) = \mathbf{R}(s^*), \quad \mathbf{D}(s^*) = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_l(s^*) \\ \mathbf{H}_r(s^*) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}(s^*) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_l(s^*) \\ \mathbf{R}_r(s^*) \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Решение краевой задачи заканчивается решением системы алгебраических уравнений (4.4) и, следовательно, определением столбца  $\mathbf{Y}^*$  значений краевых условий, перенесенных в точку  $s^*$ , например, у места концентрации напряжений

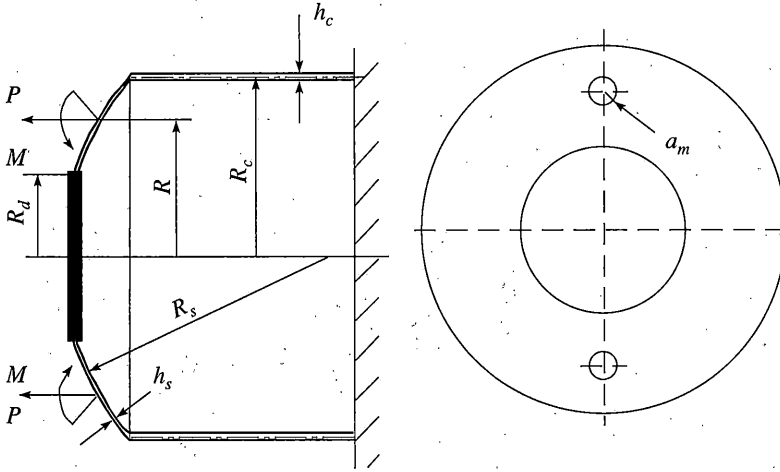
$$\mathbf{Y}(s^*) = [\mathbf{D}(s^*)]^{-1}\mathbf{R}(s^*) \quad (4.5)$$

Исследование концентрации напряжений осуществляется методом Коши по формуле (3.4), где вместо  $\mathbf{Y}(0)$  следует использовать  $\mathbf{Y}(s^*)$ .

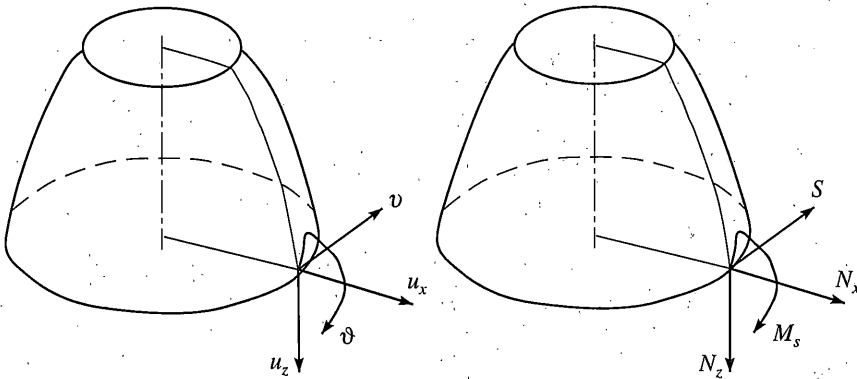
Вычисление частного решения  $\mathbf{Y}^*$  имеет следующие особенности. На текущем участке по формуле (2.6) вычисляем матрицу  $\mathbf{T}_r$ . Значение длины  $\Delta s$ , текущего участка при переносе левых краевых условий и вычислении значений элементов матрицы функций Коши–Крылова в сторону, противоположную принятому положительному направлению аргумента  $s$ , имеет отрицательный знак. Значения элементов матрицы  $\mathbf{A}(s)$  дифференциального уравнения (2.1) определяются в конце участков. Это необходимо для стыковки участков без нарушения границ площадки нагружения при переносе краевых условий в точку с разных краев, так как частное решение определяется в пределах границ площадки. Аналогично вычисляется частное решение при переносе правых краевых условий, а значение длины  $\Delta s$  текущего участка положительное.

**5. Исследование концентрации напряжений в транспортно-пусковом стакане.** При вычислениях принимались следующие безразмерные параметры стакана:  $l_c/R_c = 1.6$ ;  $R_c/h_c = 25.92$ ;  $R_s/h_s = 86$ ;  $R_d/R_c = 0.46$  и локального воздействия:  $R/R_c = 0.765$ ,  $a_m/R_a = 0.167$ , где  $l_c$ ,  $R_c$ ,  $h_c$  – длина, радиус и толщина цилиндрической оболочки стакана;  $R_s$  и  $h_s$  – радиус и толщина сферической оболочки днища стакана;  $R_d$  – радиус абсолютно жесткого диска у полюса днища;  $R$  – расстояние от оси цилиндра до центра площадок внешнего локального воздействия;  $a_m$  – радиус круга площадки равномерно распределенного внешнего локального воздействия на днище силами  $\mathbf{P}$ , направленными вдоль оси стакана, и моментами  $\mathbf{M}$ , действующими в меридиональной плоскости днища (фиг. 2).

Приведенные на фиг. 3 кинематические и силовые параметры (обозначения, принятые в [1]) образуют вектор-столбец состояния сечения оболочки  $\mathbf{Y} = \|N_x, N_z, S, M_s, u_x,$



Фиг. 2



Фиг. 3

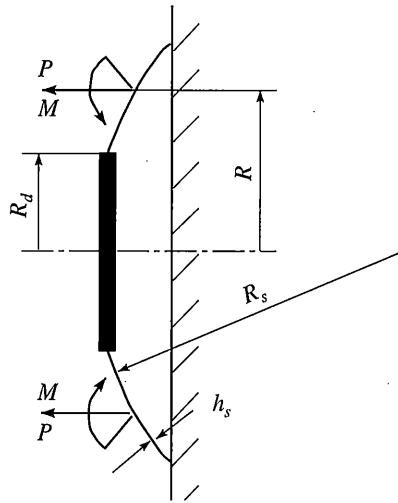
$u_z, v, \vartheta\|T$ . На левом краю имеется абсолютно жесткий диск:  $N_z = 0, u_x = 0, v = 0, \vartheta = 0$ . На правом краю заделка:  $u_x = 0, u_z = 0, v = 0, \vartheta = 0$ .

Расчеты выполнялись для ТПС, цилиндрическая оболочка которого выполнена из ортотропного слоистого материала с интегральными опытно полученными механическими характеристиками, а сферическое днище титановое, а также для ТПС, выполненного из титана. Результаты получены при действии по площадкам одновременно сил и моментов, а также при действии только сил и только моментов. Результаты зависят от величины площадки локального воздействия на днище ТПС.

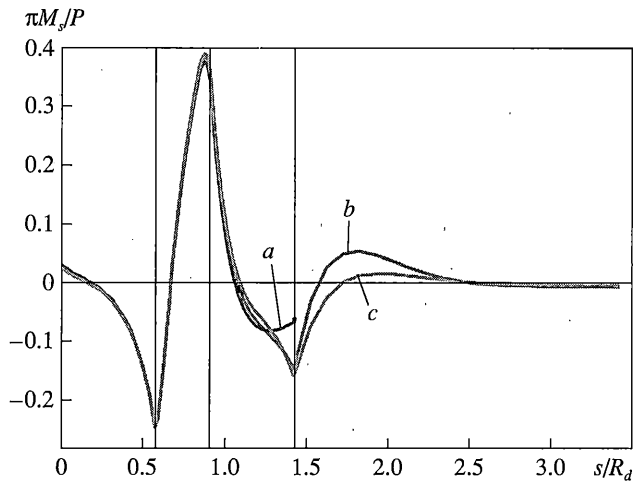
Концентрация напряжений исследовалась различными методами: мультипликативным методом решения краевых задач; методом Коши при переносе краевых условий к месту концентрации напряжений; методом Коши только в днище ТПС, которое в сечении сопряжения с цилиндром считалось заделанным (фиг. 4).

Результаты для внутренних силовых факторов и кинематических параметров получены в виде графиков, начало координат которых совпадает с местом сопряжения сферической оболочки и жесткого диска днища. Вертикальными линиями на графич-





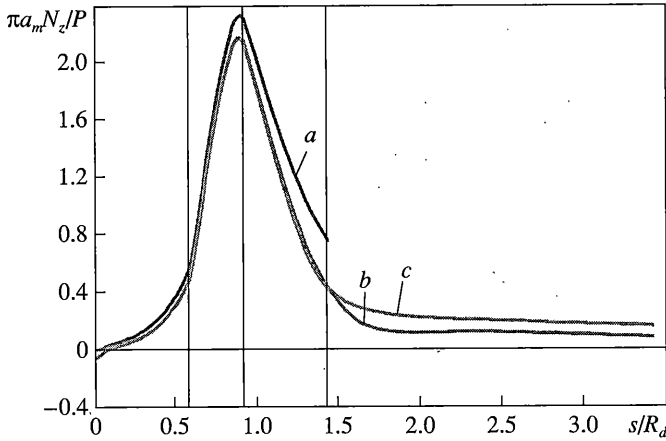
Фиг. 4



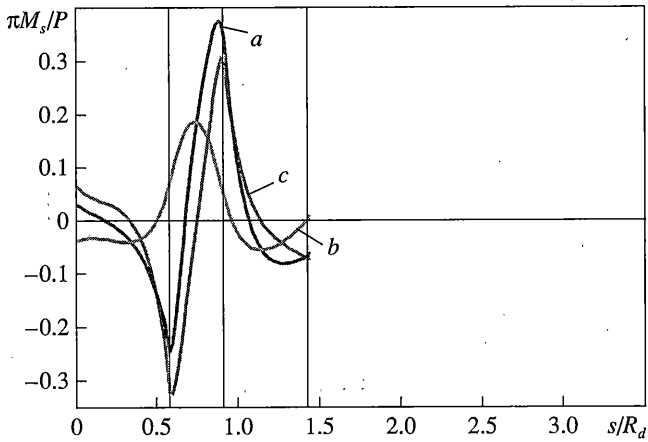
Фиг. 5

ках ограничены размеры площадки локального воздействия на днище и показано сечение сопряжения его с цилиндрической оболочкой. Показано изменение величины максимального напряжения в зависимости от величины площадки воздействия на оболочку. Некоторые из полученных результатов для  $a_m/R_d = 0.167$  показаны на фиг. 5 и 6. На фиг. 5 показано изменение безразмерного погонного изгибающего меридиального момента  $\pi M_s/P$  в оболочке. Кривая *a* соответствует расчетной схеме на фиг. 4 (днище ТПС из титана); кривая *b* – расчетной схеме на фиг. 2 (ТПС из титана); *c* – расчетной схеме на фиг. 2 (цилиндрическая часть ТПС из композиционного материала).

На фиг. 6 показано изменение безразмерной погонной силы  $\pi a_m N_z/P$  в оболочке. Через *a–c* обозначены расчетные схемы и материалы, для которых определялся безразмерный момент  $\pi M_z/P$ , изменение которого показано на фиг. 5. На фиг. 5 и 6 получены результаты при действии на днище ТПС сил  $P$  и моментов  $M$ .



Фиг. 6

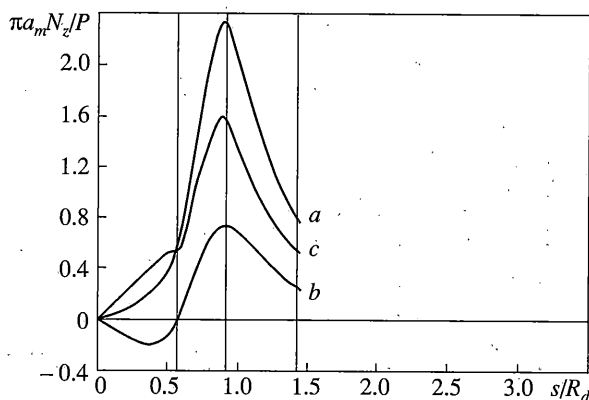


Фиг. 7

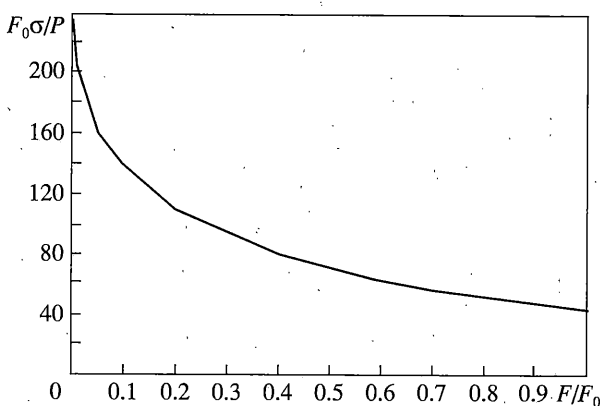
В виде графиков приводятся изменения погонных безразмерных изгибающего момента и погонной силы, т.к. они определяют изменение вдоль меридиана максимального напряжения. Приведенные на фиг. 5 и 6 результаты показывают концентрацию внутренних силовых факторов у площадки внешнего воздействия. Они показывают, что полученные различными методами результаты отличаются мало и с уменьшением величины площадки внешнего воздействия практически совпадают.

На фиг. 7 показано изменение безразмерного погонного изгибающего меридиального момента  $\pi M_s / P$  в оболочке, найденного методом Коши по расчетной схеме фиг. 4: *a* – при одновременном воздействии на днище ТПС сил  $P$  и моментов  $M$ ; *b* – при воздействии на днище ТПС только сил  $P$ ; *c* – при воздействии на днище ТПС только моментов  $M$ .

На фиг. 8 показано изменение безразмерной погонной силы  $\pi a_m N_z / P$  в оболочке при тех же условиях, что и безразмерный момент  $\pi M_s / P$  на фиг. 7.



Фиг. 8



Фиг. 9

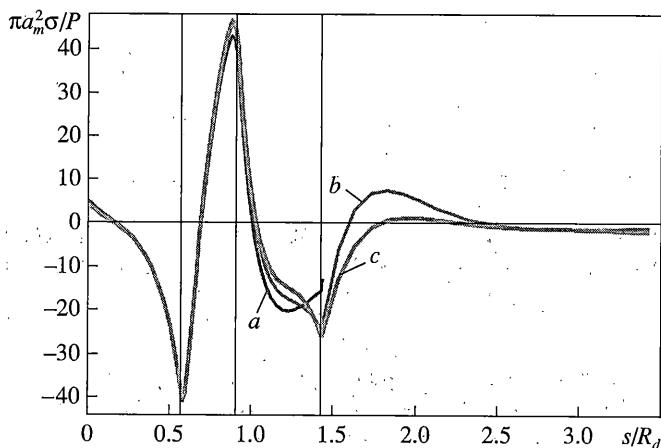
Результаты, приведенные на фиг. 7 и 8 показывают существенное влияние внешнего момента на величину погонных сил и моментов возникающих в оболочке.

На фиг. 9 показана зависимость безразмерного максимального напряжения  $F_0 \sigma / P$  у внешней поверхности ТПС от величины  $F/F_0$ , где  $F_0$  – величина площадки внешнего воздействия на ТПС для параметра  $a_m/R_d = 0.167$ .

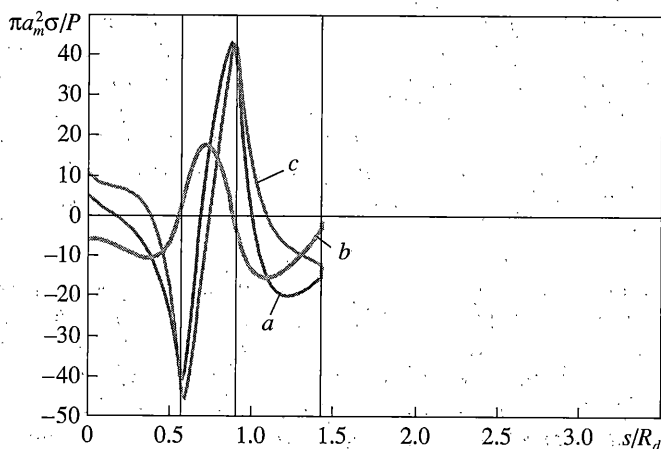
На фиг. 10 показана концентрация максимальных безразмерных напряжений  $\pi a_m^2 \sigma / P$  у наружной поверхности ТПС. Через  $a-c$  обозначены те же расчетные схемы и материалы, для которых получены внутренние силовые факторы для оболочки днища на фиг. 5 и 6.

На фиг. 11 показана концентрация максимальных безразмерных напряжений  $\pi a_m^2 \sigma / P$  у наружной поверхности ТПС. Через  $a-c$  обозначены те же условия, при которых получены внутренние силовые факторы на фиг. 7 и 8.

Исследование концентрации напряжений выполнялось и для площадки внешнего воздействия на днище ТПС, ограниченной линиями главных кривизн, а по величине равной площадке очерченной окружностью. Результаты количественно мало отличаются и по этой причине не приводятся.



Фиг. 10



Фиг. 11

**Выводы.** Построены эффективные алгоритмы исследования концентрации напряжений с априорной заданной погрешностью в элементах тонкостенных конструкций. Алгоритмы эффективны простотой реализации и сокращением на порядок затрат машинного времени при сведении краевых задач к начальным. Исследование концентрации напряжений в днище транспортно пускового стакана подтверждает теоретически обоснованные результаты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 336 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
3. Стеклов В.А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1927. 419 с.
4. Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. Метод переноса краевых условий функциями Коши – Крылова для жестких линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2000. Том 373. № 4. С. 474–476.