МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2007

УДК 539.1

© 2006 г. А.Г. БАГДОЕВ, А.В. ВАРДАНЯН, С.В. ВАРДАНЯН,
В.Н. КУКУДЖАНОВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

Задачи определения корней дисперсионных уравнений для свободных изгибных колебаний тонких магнитоупругих пластин и оболочек представляют как значительный теоретический, так и прикладной интерес, в частности, при изучении колебаний металлических конструкций применяемых в управляемых термоядерных реакторах. Эти задачи с использованием гипотезы Кирхгофа решались в [1–5]. В [6] был предложен точный пространственный подход для определения частот колебаний тонких пластин, и показано его полное соответствие с решением по гипотезе Кирхгофа. В [7–9] этот точный подход применен к задаче о колебаниях тонких магнитоупругих пластин и в результате громоздких выкладок показано, что решения по точной теории и по гипотезе Кирхгофа, кроме одного случая, существенно различаются. В [10] приводятся уравнения динамической теории упругости в осесимметрической задаче. В [11] получены в точной постановке уравнения для частот колебаний тонких ферромагнитных пластин с произвольной электропроводностью. В [12] с помощью гипотезы Кирхгофа получены дисперсионные соотношения для магнитоупругой тонкой оболочки. В [5, 13–16] приведены соотношения для тензора Максвелла и подеромоторной силы для магнитиков. В [17] аналитически и численно исследуются дисперсионные соотношения для тонких ферромагнитных пластин в поперечном поле в пространственной постановке.

В настоящей статье на основе точного подхода проведено исследование изгибных свободных колебаний тонкой ферромагнитной цилиндрической оболочки. Получено точное дисперсионное уравнение в виде детерминанта шестого порядка, которое для случая магнитоупругой тонкой оболочки решается численно. Результаты расчетов приведены в таблицах и сравниваются с расчетными по гипотезе Кирхгофа. Показано значительное количество различие результатов, даже для низшей частоты.

**1. Вывод уравнения движения и индукции для тонкой ферромагнитной цилиндрической оболочки.** Пусть цилиндрическая оболочка длины $l$ граничит извне с диэлектриком (воздухом), в котором на бесконечности задано осевое начальное магнитное поле.

Выберем ось $z$ вдоль оси оболочки, $r$ – радиальная координата. В литературе существуют разные подходы в определении тензора Максвелла и объемной силы для ферромагнетика. В [13] выводится тензор Максвелла для непроводящей среды в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu H_i H_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right) \tag{1.1}$$

где $H_i$ – компонента напряженности магнитного поля, $\delta_{ik}$ – символы Кронекера, $\mu$ – магнитная проницаемость. В дальнейшем для магнитомягких сред считается, что $\mu = \text{const}$. С учетом $\partial H_i/\partial x_i = 0$ из (1.1) получим для объемной силы

$$\chi = \mu - 1, \quad f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \bar{f} = \frac{\chi}{4\pi}(\bar{H} \cdot \nabla)\bar{H} + \frac{1}{4\pi}(\bar{H} \cdot \nabla)\bar{H} - \frac{1}{8\pi}\nabla H^2 \tag{1.2}$$

причем последние два слагаемых, соответствующие силе Лоренца для непроводящей среды, в сумме дают ноль. В [13] показано, что (1.1) и (1.2) имеют место и для проводящей среды, где при вычислении $f_i$, разумеется, сила Лоренца уже ненулевая. В [14] для магнитной непроводящей среды, в которой $\mu = \mu(\rho)$, где $\rho$ – плотность, выводится соотношение

$$\sigma_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left(\mu - \rho\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)H^2\delta_{ik} + \frac{1}{8\pi}\mu H_i H_k \tag{1.3}$$

В [15] указано, что приводимое в [14] для электрических сред соотношение для жидкостей и газов $\rho \cdot \partial\varepsilon/\partial\rho = \varepsilon - 1$, можно распространить и на магнитные среды и полагать $\rho \cdot \partial\mu/\partial\rho = \mu - 1$. Тогда (1.3) совпадает с (1.1). Далее в [14] считается что (1.3) может быть использовано и для проводящих сред, где при вычислении $f_i$ сила Лоренца уже ненулевая. Тогда имеет место формула (1.2). Таким образом, комбинируя результаты [14], [15], можно прийти к выводу, что и для магнитомягкой проводящей среды имеют место соотношения (1.1) и (1.2). Этот вывод фактически сделан в [5], где дается ссылка на [13], [14] без вышеприведенного анализа результатов, и приводятся, как и в [13], [14], равенства (1.1) и (1.2) сначала для непроводящей, а затем и для проводящей среды.

Данный подход кажется наиболее убедительным, поэтому как в [12], так и в настоящей статье используются формулы (1.1), (1.2) работы [5]. Следует отметить, что в [15], где изложение идет согласно [14] и делается указанное выше добавление насчет линейной зависимости $\mu$ и $\rho$, формула для $\bar{f}$ выписана не так, как в (1.2) и как должно быть, а с дополнительным множителем $\mu$. Это повторяет результат, полученный в [16] для магнетиков другим путем, по сравнению с [13], [14]. Трудно сказать, почему имеет место такой разнобой при различных выводах формулы для $\bar{f}$ в ферромагнетиках, но наиболее убедительной представляется формула (1.2), которая для непроводящей магнитной среды общепринята и выведена в [5], [13], [14] и принимается в настоящей работе. Для немагнитной жидкости $\mu = 1$ и все результаты совпадают, давая для $\bar{f}$ силу Лоренца. Основная часть данной статьи относится именно к этим волнам в магнитоупругой оболочке.

Начальное магнитное поле вне оболочки в диэлектрике обозначим через $H_{0z}^{(e)}$, $H_{0r}^{(e)}$, а в оболочке $H_{0z}$, $H_{0r}$. Условия на бесконечности, граничные условия на поверхностях и на торцах оболочки имеют вид:

$$H_{0z}^{(e)} = H_0, \quad H_{0r}^{(e)} = 0 \tag{1.4}$$

$$r = R \pm h, \quad H_{0z} = H_{0z}^{(e)}, \quad \mu H_{0r} = H_{0r}^{(e)} \tag{1.5}$$

$$z = 0, \quad z = l, \quad \mu H_{0z} = H_{0z}^{(e)}, \quad H_{0r} = H_{0r}^{(e)} \tag{1.6}$$

где $\mu$ – магнитная проницаемость. Полагаем всюду $H_{0z} = H_0 + H'_{0z}$, $H_{0z}^{(e)} = H_0 + H'^{(e)}_{0z}$, где штрих означает малое возмущение постоянного поля $H_0$ из (1.4). Тогда (1.5), (1.6) дают граничные условия

$$r = R \pm h, \quad H'_{0z} = H'^{(e)}_{0z}, \quad \mu H_{0z} = H^{(e)}_{0z} \tag{1.7}$$

$$z = 0, \quad z = l, \quad \chi H_0 + \mu H'_{0z} + \mu H^{(e)}_{0z}, \quad H_{0r} = H^{(e)}_{0r} \tag{1.8}$$

где $\chi = \mu - 1$. В случае магнитоупругой оболочки $\mu = 1$, $H'_{0z} = H'^{(e)}_{0z} = H_{0r} = H^{(e)}_{0z} = 0$, что удовлетворяет (1.7), (1.8).

Следует решать уравнения Лапласа для потенциальных функций $\Phi^{(e)}$, $\Phi$ вне и внутри оболочки, причем

$$H'^{(e)}_{0z} = \frac{\partial \Phi'}{\partial z}, \quad H'^{(e)}_{0r} = \frac{\partial \Phi'}{\partial r}, \quad H_{0z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad H_{0r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

при граничных условиях (1.7), (1.8). В силу того, что (1.8) выполняется в малой области по $r$ порядка $h$, соответствующие интегралы по этой области имеют порядок $h$ и решение задачи имеет порядок

$$H'^{(e)}_{0z} \approx H'_{0z} \approx hH_0/l, \quad H^{(e)}_{0r} \approx H_{0r} \approx hH_0/l$$

Таким образом, приближенно, кроме узкой области $h$ вне оболочки вблизи ее торцов можно всюду считать, что невозмущенное волной магнитное поле однородное, причем, как и для бесконечной оболочки

$$H^{(e)}_{0z} = H_{0z} = H_0, \quad H^{(e)}_{0r} = H_{0r} = 0 \tag{1.9}$$

на что впервые для пластин указано в [5], но с другой аргументацией. Следует отметить, что хотя указанные условия (1.8) на торцах оболочки при определении $\overline{H}^{(e)}_0$ в диэлектрике можно не учитывать, они влияют на начальные напряжения в оболочке. Тензор Максвелла для ферромагнитной оболочки имеет вид

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu H_i H_k - \frac{H^2}{2}\delta_{ik}\right) \tag{1.10}$$

Граничные условия на поверхностях $r = R \pm h$ в начальном состоянии, которое отмечено нуликом вверху, записываются следующим образом

$$\sigma^0_{ik} + \Pi^0_{ik} = \Pi^{0(e)}_{ik} \tag{1.11}$$

а в цилиндрических компонентах

$$\sigma^{(0)}_{rr} + \Pi^0_{rr} = \Pi^{0(e)}_{rr}, \quad \sigma^{(0)}_{rz} + \Pi^{(0)}_{rz} = \Pi^{0(e)}_{rz} \tag{1.12}$$

где согласно (1.9):

$$\begin{gathered} \Pi^0_{rr} = -\frac{1}{8\pi}H_0^2, \quad \Pi^{0(e)}_{rr} = -\frac{1}{8\pi}H_0^2, \quad \Pi^0_{rz} = 0, \quad \Pi^{0(e)}_{rr} = \Pi^{0(e)}_{rz} = 0, \\ \sigma^0_{rr} = 0, \quad \sigma^0_{rz} = 0 \end{gathered} \tag{1.13}$$

С другой стороны, левый и правый торец могут влиять на начальные напряжения в оболочке, при $z = 0$, $z = l$:

$$\Pi^0_{zz} = \frac{1}{4\pi}\left(\mu H_0^2 - \frac{H_0^2}{2}\right), \quad \Pi^{0(e)}_{zz} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mu^2 H_0^2}{2} \tag{1.14}$$

Из (1.11) получится

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{1}{8\pi}H_0^2(\mu-1)^2 \tag{1.15}$$

Используя закон Гука для начальных напряжений и деформаций, можно получить

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{zz}^0}{\rho_0} &= a^2\frac{\partial u_z^0}{\partial z} + (a^2-2b^2)\left(\frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \frac{u_r^0}{r}\right)\\ 0 &= a^2\frac{\partial u_r^0}{\partial r} + (a^2-2b^2)\left(\frac{\partial u_z^0}{\partial z} + \frac{u_r^0}{r}\right)\end{aligned} \tag{1.16}$$

и определить постоянные деформации $\partial u_z^0/\partial z$, $\partial u_r^0/\partial r = u_r^0/r$, причем

$$a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0},\quad \frac{\sigma_{zz}^0}{\rho_0} = \frac{a_1^2}{2}(\mu-1)^2,\quad \frac{\partial u_z^0}{\partial z} = \frac{\sigma_{zz}^0}{\rho_0 a^2}\frac{a^2}{b^2}\zeta\left(\zeta-4\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1} \tag{1.17}$$

где $a$ и $b$ – скорости упругих продольных и поперечных волн.

Таким образом, определено начальное напряженное и деформированное состояния оболочки (1.13), (1.16), (1.17). Положим начальные условия нулевыми: $\partial u_z^0/\partial z = 0$, $\partial u_r^0/\partial r = 0$, $u_r^0/r = 0$. Уравнения трехмерного движения ферромагнитной среды имеют вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma'_{ik} + \sigma'_{km}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\chi}{4\pi}(\bar{H}\cdot\nabla)\bar{H} + \frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\bar{H}x\bar{H}) \tag{1.18}$$

где $\chi = \mu - 1$, по повторяющимся индексам $k$, $m$ суммируется от 1 до 3 ($i = 1, 2, 3$), и для полных выражений напряжений и перемещений выполняются соотношения

$$\sigma'_{ik} = \sigma_{ik}^0 + \sigma_{ik},\quad u'_i = u_i^0 + u_i \tag{1.19}$$

Левые части (1.15) в первом порядке относительно возмущений имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{ik} + \sigma_{km}^0\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sigma_{km}\frac{\partial u_i^0}{\partial x_m}\right) \tag{1.20}$$

Пусть в пластине $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h}$, где $\bar{h}$ – индуцированное волной поле. Вычисляя компоненты магнитной силы и силы Лоренца, можно получить уравнения для ферромагнитной среды в невозмущенном магнитном поле $H_{0z} = H_0$ в случае осесимметричной задачи

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\frac{b^2}{a^2}+\beta\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \zeta\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_r = \left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{\chi}{4\pi\rho_0}\frac{H_0}{a^2}\frac{\partial h_r}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1} - \left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1}\frac{H_0}{4\pi\rho_0 a^2}\left(\frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + (1+\beta')\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \zeta\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} + \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\zeta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} =$$

$$= \left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1}\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\chi H_0}{4\pi\rho_0 a^2}\frac{\partial h_z}{\partial z}$$

$$\zeta = 1-\frac{b^2}{a^2},\quad \beta = \frac{\sigma_{zz}^0}{\rho_0}\left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1},\quad \beta' = \frac{\sigma_{zz}^0}{\rho_0}\left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1} \tag{1.21}$$

Величины $\partial u_r^0/\partial r$, $\partial u_z^0/\partial z$, $\sigma_{zz}^0/\rho_0$ даются формулами (1.14).

Уравнения электромагнитной индукции [5]: $\partial\bar{h}/\partial t = \mathrm{rot}(\partial\bar{u}/\partial t\times\bar{H}_0) + \nu_m\Delta\bar{h}$ в проекциях имеют вид

$$\frac{\partial h_r}{\partial t} = H_0\frac{\partial^2 u_r}{\partial t\partial z} + \nu_m\left(\frac{\partial^2 h_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_r}{\partial z^2} - \frac{h_r}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = -H_0\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right) + \nu_m\left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}\right) \tag{1.22}$$

$$\nu_m = c^2/4\pi\sigma\mu$$

где $\sigma$ – электропроводность, $c$ – скорость света.

**2. Точное решение задачи в пространственной постановке.** Уравнения (1.21), (1.22) отличаются от соответствующих уравнений движения бесконечной оболочки отсутствием $\sigma_{zz}^0$, $\partial u_r^0/\partial r$, $\partial u_z^0/\partial z$, заменой в первом уравнении (1.21) множителя $b^2/a^2$ при $\partial u_r^0/\partial z$ на $b^2/a^2+\beta$, умножением правой части на $(1+\partial u_r^0/\partial r)^{-1}$, а во втором умножением $\partial^2 u_z/\partial z^2$ на $1+\beta'$ и правой части на $(1+\partial u_z^0/\partial z)^{-1}$.

Ищем решение (1.21), (1.22) в виде стоячей в направлении оси $z$ плоской волны

$$\xi_j = r\nu_j,\quad j = 1,2,3$$

$$u_r = \mathrm{Re}[A_j I_1(\xi_1) i\sin kz e^{-i\omega t} + A'_j K_1(\xi_j) i\sin kz e^{-i\omega t}]$$

$$u_z = \mathrm{Re}[B_j I_0(\xi_j)\cos kz e^{-i\omega t} + B'_j K_0(\xi_j)\cos kz e^{-i\omega t}] \tag{2.1}$$

$$h_z = \mathrm{Re}[C_j H_0 I_0(\xi_j) i\sin kz e^{-i\omega t} + C'_j H_0 K_0(\xi_j) i\sin kz e^{-i\omega t}]$$

$$h_r = \mathrm{Re}[D_j H_0 I_1(\xi_j)\cos kz e^{-i\omega t} + D'_j H_0 K_1(\xi_j)\cos kz e^{-i\omega t}]$$

где $I_{0.1}(\zeta)$, $K_{0.1}(\zeta)$ – функции Бесселя мнимого аргумента, причем по $j$ суммируется от 1 до 3. Выкладки остаются в силе и для бесконечной оболочки, где в (2.1) при бесселевых функциях должен стоять множитель $e^{i(kz-\omega t)}$. Учитывая соотношения

$$I'_0(\xi) = I_1(\xi),\quad K'_0(\xi) = -K_1(\xi)$$

$$\frac{dI_1(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{\xi}I_1(\xi) = I_0(\xi),\quad \frac{dK_1(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{\xi}K_1(\xi) = -K_0(\xi) \tag{2.2}$$

где штрих обозначает производную по $\xi$, можно из (1.21), (1.22), принимая во внимание указанные выше замены множителей, получить

$$A_j\left\{\nu_j^2-\left(\frac{b^2}{a^2}+\beta\right)k^2+\frac{\omega^2}{a^2}\left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1}\right\}+\zeta ik\nu_jB_j =$$

$$= \left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1}\frac{a_1^2}{a^2}(\nu_jC_j-ikD_j)-\chi\frac{a_1^2}{a^2}ikD_j\left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1} \tag{2.3}$$

$$\left\{\frac{b^2}{a^2}\nu_j^2-(1+\beta')k^2+\frac{\omega^2}{a^2}\left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1}\right\}B_j+\zeta ik\nu_jA_j = -\left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1}\chi\frac{a_1^2}{a^2}ikC_j$$

$$C_j = \frac{i\omega\nu_j}{\chi_j}A_j,\quad D_j = \frac{\omega kA_j}{\chi_j},\quad \chi_j = -i\omega+\nu_mk^2-\nu_m\nu_j^2$$

и такие же соотношения для связи соответствующих постоянных $A_j'$, $-C_j'$, $D_j'$ с $-B_j'$.

Из (2.3) получается уравнение для $\bar\nu = \nu_j$:

$$\bar\nu^2-\left(\frac{b^2}{a^2}+\beta\right)k^2+\frac{\omega^2}{a^2}\left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1}+$$

$$+\left(\zeta^2\bar\nu^2k^2-\zeta\chi\frac{a_1^2}{a^2}\left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1}\cdot k^2\bar\nu^2\left(1+i\frac{k^2-\bar\nu^2}{\omega}\nu_m\right)^{-1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{b^2}{a^2}\bar\nu^2-(1+\beta')k^2+\frac{\omega^2}{a^2}\left(1+\frac{\partial u_z^0}{\partial z}\right)^{-1}\right) = \tag{2.4}$$

$$= -\left(1+\frac{\partial u_r^0}{\partial r}\right)^{-1}\frac{a_1^2}{a^2}((\bar\nu^2-k^2)-\chi k^2)\left(1+i\frac{k^2-\bar\nu^2}{\omega}\nu_m\right)^{-1}$$

Решение в виде (2.1) удовлетворяет условиям свободного опирания оболочки

$$z = 0,\quad z = l,\quad u_r = 0,\quad \partial^2u_r/\partial z^2 = 0 \tag{2.5}$$

при выборе волнового числа $k = \pi m/l$, $m = 1, 2, 3\ldots$ Эти условия можно заменить на пространственные условия

$$z = 0,\quad z = l,\quad \sigma_{zz} = 0,\quad u_r = 0,\quad \frac{\sigma_{zz}}{\rho} = a^2\frac{\partial u_z}{\partial z}+(a^2-2b^2)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right) \tag{2.6}$$

причем последнее условие в общем случае необходимо брать в виде

$$z = 0,\quad z = l,\quad \sigma_{zz}^0+\sigma_{zz}+\Pi_{zz} = \Pi_{zz}^{(e)}$$

$$\sigma_{zz}^0+\Pi_{zz}^0 = \Pi_{zz}^{(e)0},\quad H_z = H_0+h_z,\quad H_z^{(e)} = \mu H_0+\mu h_z,\quad h_z^{(e)} = \mu h_z$$

Для возмущений имеем

$$\sigma_{zz}+\frac{1}{4\pi}(2\mu H_0h_z-H_0h_z) = \frac{1}{4\pi}\mu^2H_0h_z$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{4\pi}H_0(\mu-1)^2h_z \tag{2.7}$$

поскольку в силу (2.1) при $z = 0$, $z = l$, $h_z = 0$ получится $\sigma_{zz} = 0$. Решение можно продолжить в общем виде для ферромагнитной оболочки.

В целях упрощения формул рассматривается случай магнитоупругой оболочки, в которой

$$\mu = 1, \quad \chi = 0, \quad \sigma_{zz}^0 = \beta = \beta' = \partial u_z^0/\partial z = \partial u_r^0/\partial r = 0 \tag{2.8}$$

Следует отметить, что (2.8) имеет место и в случае бесконечной ферромагнитной цилиндрической оболочки. Тогда (2.4) в случае $\mu = 1$ примет вид

$$\begin{aligned} &\bar{\upsilon}^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2\bar{\upsilon}^2k^2\left(\frac{b^2}{a^2}\bar{\upsilon}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)^{-1} = \\ &= -\frac{a_1^2}{a^2}(\bar{\upsilon}^2 - k^2)\left(1 + i\frac{k^2 - \bar{\upsilon}^2}{\omega}\upsilon_m\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Полученное уравнение такое же, как и для пластин [6], причем для малых $a_1^2/a^2$ и небольших $\upsilon_m$ получается

$$1 - \frac{k^2 - \upsilon_3^2}{\vartheta} = -\frac{a_1^2}{a^2}\left(\zeta\frac{a^2}{b^2}k^2 + \vartheta\right)/\vartheta \tag{2.10}$$

$$\upsilon_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} - \frac{a_1^2}{a^2}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2\vartheta}\right) \tag{2.11}$$

$$\upsilon_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} + \frac{a_1^2}{b^2}k^2 + \frac{\omega^2 a_1^2 k^2}{b^4\vartheta}, \quad \vartheta = i\frac{\omega}{\upsilon_m} \tag{2.12}$$

Таким образом, зависимости $A_j$, $C_j$, $D_j$ от $B_j$ и $A'_j$, $-C'_j$, $D'_j$ от $-B'_j$ такие же, как для пластины. Для завершения решения задачи следует написать граничные условия при $r = R - h$, $r = R + h$:

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad h_r = \tilde{h}_r, \quad h_z = \tilde{h}_z \tag{2.13}$$

где $\tilde{h}_r$, $\tilde{h}_z$ есть возмущенное магнитное поле вне оболочки. Первые два условия (2.13) дают на указанных границах

$$a^2\frac{\partial u_r}{\partial r} + (a^2 - 2b^2)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$$

Подставляя сюда (2.6), получим $\zeta' = \zeta - b^2/a^2$:

$$\begin{aligned} &A_j\upsilon_j I_1'(\xi_j^\pm) + \zeta' A_j \upsilon_j \frac{1}{\xi_j^\pm} I_1(\xi_j^\pm) + A'_j\upsilon_j K_1'(\xi_j^\pm) + \\ &+ \zeta' A'_j \upsilon_j \frac{1}{\xi_j^\pm} K_1(\xi_j^\pm) + \zeta' B_j ik I_0(\xi_j^\pm) + \zeta' B'_j ik K_0(\xi_j^\pm) = 0 \\ &ik A_j I_1(\xi_j^\pm) + ik A'_j K_1(\xi_j^\pm) + B_j I_1(\xi_j^\pm)\upsilon_j - B'_j K_1(\xi_j^\pm)\upsilon_j = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

где по $j$ суммируется от 1 до 3, $\xi_j^{\pm} = (R \pm h)\upsilon_j$. Производные бесселевых функций согласно (2.2) вычисляются по формуле

$$I_1'(\zeta_j^{\pm}) = I_0(\zeta_j^{\pm}) - \frac{1}{\zeta_j^{\pm}} I_1(\zeta_j^{\pm}), \quad K_1'(\zeta_j^{\pm}) = -K_0(\zeta_j^{\pm}) - \frac{1}{\zeta_j^{\pm}} K_1(\zeta_j^{\pm})$$

Осталось выполнить условия

$$r = R \pm h, \quad h_r = \tilde{h}_r, \quad h_z = \tilde{h}_z \tag{2.15}$$

Итак, имеют место четыре уравнения (2.14), к которым добавляется два уравнения, получаемые из последних соотношений исключением $\tilde{C}_j$, $\tilde{\tilde{C}}_j$:

$$\begin{gathered}
\frac{\omega k A_j}{\chi_j} I_1(\xi_j^+) + \frac{\omega k A_j'}{\chi_j} K_1(\xi_j^+) = i\frac{K_1\{(R+h)k\}}{K_0\{(R+h)k\}}\left\{\frac{i\omega\upsilon_j}{\chi_j} A_j I_0(\xi_j^+) - \frac{i\omega\upsilon_j}{\chi_j} A_j' K_0(\xi_j^+)\right\} \\
\frac{\omega k A_j}{\chi_j} I_1(\xi_j^-) + \frac{\omega k A_j'}{\chi_j} K_1(\xi_j^-) = i\frac{I_1\{(R-h)k\}}{I_0\{(R-h)k\}}\left\{\frac{i\omega\upsilon_j}{\chi_j} A_j I_0(\xi_j^-) - \frac{i\omega\upsilon_j}{\chi_j} A_j' K_0(\xi_j^-)\right\}
\end{gathered} \tag{2.16}$$

К (2.14) и (2.19) следует добавить

$$\begin{gathered}
A_j = -\frac{1}{\zeta i k \upsilon_j}\left(\frac{b^2}{a^2}\upsilon_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right) B_j \\
A_j' = -\frac{1}{\zeta i k \upsilon_j}\left(\frac{b^2}{a^2}\upsilon_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right) B_j'
\end{gathered} \tag{2.17}$$

где по $j$ не нужно суммировать. Система (2.14), (2.16) представляет систему шести однородных уравнений относительно, $A_{1,2,3}$, $A_{1,2,3}'$, для которой детерминантное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix}
\Pi_1^+ & \Pi_2^+ & \Pi_3^+ & M_1^+ & M_2^+ & M_3^+ \\
\Pi_1^- & \Pi_2^- & \Pi_3^- & M_1^- & M_2^- & M_3^- \\
P_1^+ & P_2^+ & P_3^+ & \Omega_1^+ & \Omega_2^+ & \Omega_3^+ \\
P_1^- & P_2^- & P_3^- & \Omega_1^- & \Omega_2^- & \Omega_3^- \\
N_1^+ & N_2^+ & N_3^+ & \Lambda_1^+ & \Lambda_2^+ & \Lambda_3^+ \\
N_1^- & N_2^- & N_3^- & \Lambda_1^- & \Lambda_2^- & \Lambda_3^-
\end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered}
\Pi_j^{\pm} = \upsilon_j I_1'(\xi_j^{\pm}) + \zeta'\upsilon_j \frac{I_1(\xi_j^{\pm})}{\xi_j^{\pm}} + \zeta'\frac{B_j}{A_j} ik I_0(\xi_j^{\pm}) \\
M_j^{\pm} = \upsilon_j K_1'(\xi_j^{\pm}) + \zeta'\upsilon_j \frac{K_1(\xi_j^{\pm})}{\xi_j^{\pm}} + \zeta'\frac{B_j'}{A_j'} ik K_0(\xi_j^{\pm})
\end{gathered} \tag{2.19}$$

$$P_j^{\pm} = ikI_1(\xi_j^{\pm}) + \frac{B_j}{A_j}\upsilon_j I_1(\xi_1^{\pm}), \quad \Omega_j^{\pm} = ikK_1(\xi_j^{\pm}) - \frac{B_j'}{A_j'}\upsilon_j K_1(\xi_j^{\pm})$$

$$\mathrm{N}_j^+ = \frac{\omega k}{\chi_j} I_1(\xi_j^+) + \frac{\omega \upsilon_j}{\chi_j} \frac{K_1\{(R+h)k\}}{K_0\{(R+h)k\}} I_0(\xi_j^+)$$

$$\mathrm{N}_j^- = \frac{\omega k}{\chi_j} I_1(\xi_j^-) - \frac{\omega \upsilon_j}{\chi_j} \frac{I_1\{(R+h)k\}}{I_0\{(R+h)k\}} I_0(\xi_j^-)$$

$$\Lambda_j^+ = \frac{\omega k}{\chi_j} K_1(\xi_j^+) - \frac{\omega \upsilon_j}{\chi_j} \frac{K_1\{(R+h)k\}}{K_0\{(R+h)k\}} K_0(\xi_j^+)$$

$$\Lambda_j^- = \frac{\omega k}{\chi_j} K_1(\xi_j^-) + \frac{\omega \upsilon_j}{\chi_j} \frac{I_1\{(R+h)k\}}{I_0\{(R+h)k\}} K_0(\xi_j^-)$$

Здесь $B_j/A_j$, $B'_j/A'_j$, $j = 1, 2, 3$ задаются (2.17), а $\chi_j = -i\omega(1 - (k^2 - \nu^2)/\vartheta)$. Детерминантное уравнение следует решать при следующих значениях параметров $b^2/a^2 = 1/3$, $\zeta = 2/3$, $a = 10^5$ см/сек, $b = 10^5/\sqrt{3}$ см/сек, $\upsilon_m = 10^3$ см$^2$/сек, $h' = 0.1$, 1 см, $R = 10^8$, $10^3$, $10^2$ см, $a_1/a = 0$; $5 \cdot 10^{-5}$; $10^{-4}$ и т.д., $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ см$^{-1}$. В качестве нулевого приближения берется значение $\omega(k) = \omega_{00}(k)$ для случая $a_1 = 0$, которое имеет вид $w_{00} = h'b\sqrt{\zeta/3}\sqrt{k^4 + 12(1-\nu^2)(R^2h'^2)^{-1}}$. Здесь $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\nu = 1/3$. Результаты численных расчетов приведены в табл. 1, 2.

По осредненной теории [10] получается дисперсионное уравнение для оболочек при условии $kR \gg 1$ в виде:

$$\bar{\omega}^2 = \omega_{00}^2 + \frac{a_1^2 \bar{\omega} k^2}{i\upsilon_m \lambda_1^2}\left(1 - \frac{2}{kh'}\frac{i\bar{\omega}}{\upsilon_m}\left(\mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{h'}{2}\right) + \frac{k}{\lambda_1}\mathrm{ch}\left(\lambda_1\frac{h'}{2}\right)\right)^{-1}\frac{1}{\lambda_1^2}\mathrm{sh}\left(\lambda_1\frac{h'}{2}\right)\right) \tag{2.20}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{k^2 - i\bar{\omega}/\upsilon_m}$$

Второе слагаемое в правой части (2.20) совпадает со значением для пластины [9].

Проведены расчеты для $h' = 0.1$ см, $R = 10^8$, $10^3$, $10^2$ см. Значения собственных частот определялись по точной теории решением трансцендентного уравнения (2.18), где $\upsilon_{1,2,3}(\omega, k)$ были взяты из (2.10)–(2.12). Было проверено, что последние упрощенные формулы дают почти полное совпадение с решениями $\upsilon_{1,2,3}(\omega, k)$, полученными из (2.4). Из многих возможных решений (2.18) были выбраны те, которые при малых $a_1/a$, например $a_1/a \approx 10^{-4}$, искались в окрестности упругого решения ($a_1/a = 0$), определяемого значением упругой частоты $\omega_{00}$. Было проверено, что решение соответствующего детерминантного уравнения четвертого порядка для упругого случая почти точно совпадает со значением $\omega_{00}$ по теории Кирхгофа. Расчеты Re$\omega$, Re$\bar{\omega}$ для вышеуказанных значений параметров $R = 10^3$, $10^8$ см даны в таблицах 1, 2 по (2.18), а по (2.20) приведены в табл. 3, 4. Как видно из табл. 2, для $R = 10^8$ см значения Re$\omega$ для малых $a_1/a$ совпадают с упругими, и даются значением $\omega_{00}$, а для последующих значений $a_1/a$ дают сначала уменьшение Re$\omega$, а затем возрастание, что по характеру кривых похоже на Re$\bar{\omega}$ в табл. 4, но количественное результаты сильно различаются, причем, как и должно быть, значения приведенные в табл. 2 совпадает с расчетами [17] для пластин. Расчеты Re$\omega$ для $R = 10^3$ см приведены в табл. 1, причем для малых $a_1/a \approx 10^{-4}$ значения Re$\omega$ для $k = 0.1$ см$^{-1}$; 0.2 см$^{-1}$ дают совпадение с $\omega_{00}$, но для $k = 0.3, 0.4, 0.5$ см$^{-1}$

Таблица 1 ($h' = 0.1, R = 10^3$)

| $a_1/a$ \ $k$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $5 \cdot 10^{-5}$ | 95.25 | 142.071 | 262.124 | 420.1452 | 620.0876 |
| $1 \cdot 10^{-4}$ | 94.9777 | 142.287 | 261.085 | 440.6969 | 640.2532 |
| $2 \cdot 10^{-4}$ | 95.335 | 141.868 | 260.906 | 444.768 | 680.989 |
| $1 \cdot 10^{-3}$ | 95.3561 | 141.834 | 261.411 | 445.1 | 686.297 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | 94.0374 | 140.728 | 261.772 | 445.556 | 687.275 |
| $3 \cdot 10^{-3}$ | 37.4045 | 90.4933 | 118.291 | 445.074 | 687.825 |
| $4 \cdot 10^{-3}$ | 56.4103 | 118.236 | 176.434 | 224.562 | 687.133 |
| $5 \cdot 10^{-3}$ | 71.5075 | 141.546 | 243.717 | 287.003 | 354.739 |
| $6 \cdot 10^{-3}$ | 85.3117 | 168.453 | 259.745 | 347.349 | 425.96 |
| $7 \cdot 10^{-3}$ | 99.7618 | 146.206 | 291.762 | 399.149 | 498.628 |
| $8 \cdot 10^{-3}$ | 113.443 | 227.273 | 341.19 | 450.481 | 568.145 |
| $9 \cdot 10^{-3}$ | 127.268 | 252.926 | 378.975 | 509.944 | 639.966 |
| $1 \cdot 10^{-2}$ | 141.459 | 276.627 | 425.007 | 563.777 | 686.181 |
| $2 \cdot 10^{-2}$ | 282.78 | 565.711 | 848.694 | 1131.47 | 1414.49 |
| $3 \cdot 10^{-2}$ | 424.182 | 848.397 | 1272.57 | 1696.54 | 2120.74 |
| $4 \cdot 10^{-2}$ | 565.45 | 1130.9 | 1696.36 | 2261.87 | 2827.22 |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | 706.671 | 1413.34 | 2119.97 | 2826.6 | 3533.28 |

Таблица 2 ($h' = 0.1, R = 10^8$)

| $a_1/a$ \ $k$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $5 \cdot 10^{-5}$ | 27.2162 | 108.861 | 244.912 | 435.349 | 680.126 |
| $1 \cdot 10^{-4}$ | 27.2167 | 108.863 | 244.912 | 435.350 | 680.131 |
| $2 \cdot 10^{-4}$ | 27.2181 | 108.865 | 244.92 | 435.358 | 680.139 |
| $1 \cdot 10^{-3}$ | 26.8179 | 108.876 | 245.064 | 435.587 | 680.444 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | 18.4247 | 107.53 | 244.906 | 435.966 | 681.169 |
| $3 \cdot 10^{-3}$ | 42.4263 | 100.05 | 242.527 | 435.449 | 681.675 |
| $4 \cdot 10^{-3}$ | 56.5683 | 113.137 | 234.337 | 432.191 | 680.819 |
| $5 \cdot 10^{-3}$ | 70.7102 | 141.42 | 213.726 | 423.299 | 676.911 |
| $6 \cdot 10^{-3}$ | 84.8521 | 169.704 | 254.556 | 339.408 | 424.260 |
| $7 \cdot 10^{-3}$ | 98.9937 | 197.987 | 296.981 | 395.975 | 494.969 |
| $8 \cdot 10^{-3}$ | 113.135 | 226.271 | 339.406 | 452.541 | 565.676 |
| $9 \cdot 10^{-3}$ | 127.277 | 254.553 | 381.83 | 509.107 | 636.383 |
| $1 \cdot 10^{-2}$ | 141.418 | 282.836 | 424.253 | 565.671 | 707.089 |
| $2 \cdot 10^{-2}$ | 282.814 | 565.629 | 848.443 | 1131.26 | 1414.07 |
| $3 \cdot 10^{-2}$ | 424.169 | 848.337 | 1272.51 | 1696.67 | 2120.84 |
| $4 \cdot 10^{-2}$ | 565.459 | 1130.92 | 1696.38 | 2261.835 | 2827.293 |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | 706.665 | 1413.33 | 2119.999 | 2826.657 | 3533.328 |

*Таблица 3* ($h' = 0.1, R = 10^3$)

| $a_1/a$ \ $k$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $5 \cdot 10^{-5}$ | 92.9628 | 140.546 | 260.579 | 444.445 | 686.196 |
| $1 \cdot 10^{-4}$ | 92.9645 | 140.547 | 260.581 | 444.447 | 686.199 |
| $2 \cdot 10^{-4}$ | 92.9713 | 140.553 | 260.587 | 444.455 | 686.209 |
| $1 \cdot 10^{-3}$ | 93.0612 | 140.633 | 260.748 | 444.694 | 686.519 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | 91.6883 | 139.811 | 260.682 | 445.111 | 687.28 |
| $3 \cdot 10^{-3}$ | 82.7625 | 134.544 | 258.591 | 444.678 | 687.835 |
| $4 \cdot 10^{-3}$ | 42.7145 | 116.885 | 251.144 | 441.597 | 687.068 |
| $5 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 57.2232 | 232.336 | 433.044 | 683.306 |
| $6 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 0 | 188.999 | 414.546 | 674.135 |
| $7 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 0 | 49.9928 | 378.297 | 656.017 |
| $8 \cdot 10^{-3}$ | 524.482 | 0 | 0 | 307.252 | 623.454 |
| $9 \cdot 10^{-3}$ | 786.114 | 0 | 0 | 125.186 | 566.883 |
| $1 \cdot 10^{-2}$ | 1000.01 | 0 | 0 | 0 | 465.801 |
| $2 \cdot 10^{-2}$ | 2646.98 | 3465.53 | 3875.19 | 4000.08 | 3857.77 |
| $3 \cdot 10^{-2}$ | 4124.04 | 5658.21 | 6711.58 | 7490.67 | 8075.34 |
| $4 \cdot 10^{-2}$ | 5568.49 | 7747.08 | 9330.34 | 10590 | 11632.9 |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | 7000.59 | 9798.89 | 11876.9 | 13570.8 | 15012.6 |

*Таблица 4* ($h' = 0.1, R = 10^8$)

| $a_1/a$ \ $k$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $5 \cdot 10^{-5}$ | 27.2167 | 108.867 | 244.949 | 435.466 | 680.415 |
| $1 \cdot 10^{-4}$ | 27.2172 | 108.868 | 244.951 | 435.468 | 680.417 |
| $2 \cdot 10^{-4}$ | 27.2185 | 108.871 | 244.957 | 435.476 | 680.427 |
| $1 \cdot 10^{-3}$ | 26.8186 | 108.888 | 245.102 | 435.708 | 680.735 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | 18.4253 | 107.541 | 244.95 | 436.1 | 681.485 |
| $3 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 100.064 | 242.581 | 435.599 | 682.014 |
| $4 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 73.5506 | 234.407 | 432.367 | 681.198 |
| $5 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 0 | 213.803 | 423.509 | 677.346 |
| $6 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 0 | 165.109 | 404.411 | 668.017 |
| $7 \cdot 10^{-3}$ | 0 | 0 | 0 | 366.929 | 649.631 |
| $8 \cdot 10^{-3}$ | 528.756 | 0 | 0 | 292.762 | 616.599 |
| $9 \cdot 10^{-3}$ | 787.29 | 0 | 0 | 81.7689 | 559.155 |
| $1 \cdot 10^{-2}$ | 1000.0 | 0 | 0 | 0 | 456.082 |
| $2 \cdot 10^{-2}$ | 2645.86 | 3464.96 | 3874.93 | 4000.07 | 3858.02 |
| $3 \cdot 10^{-2}$ | 4123.19 | 5657.67 | 6711.19 | 7490.37 | 8075.12 |
| $4 \cdot 10^{-2}$ | 5567.83 | 7746.64 | 9329.99 | 10589.7 | 11632.7 |
| $5 \cdot 10^{-2}$ | 7000.05 | 9798.52 | 11876.6 | 13570.5 | 15012.4 |

для малых $a_1/a$ значения Re$\omega$ получаются заниженные примерно в 10 раз по сравнению с $\omega_{00}$. Это несовпадение объясняется тем, что при $H_0 = 0$ детерминантное уравнение (2.18) магнитоупругой задачи, полученное из условий (2.16), которые следуют из (2.15) после сокращения на $H_0$, не равносильно уравнению упругой задачи с детерминантом четвертого порядка, решение которого есть $\omega_{00}$, этим объясняется расхождение в указанных строках. Для немалых $a_1/a$ ход кривых аналогичен табл. 2. Табл. 1 и 3 снова дают количественное различие.

Отсюда видно, что при изучении колебаний цилиндрической оболочки и пластины в продольном магнитном поле необходимо проводить расчет по теории, основанной на точном пространственном подходе.

Таким образом, сравнение табл. 1–2, полученных на основе точного пространственного решения задачи, и табл. 3–4, полученных по гипотезе Кирхгофа, показывает, что в отличие от упругого случая, где гипотеза Кирхгофа дает хорошее согласие с точным подходом [6], для магнитоупругих тонких цилиндрических оболочек получаются весьма существенные отличия. Полученное расхождение объясняется тем, что хотя магнитоупругие пластинки и оболочки тонкие, имеется взаимосвязь компонентов перемещений магнитных полей не только внутри оболочки, но вне нее. Магнитное поле во всем пространстве оказывает существенное влияние на распределение параметров внутри оболочки (вторые производные по поперечной координате от компонент магнитного поля входят в уравнение) и задача является существенно трехмерной. Результаты, полученные как в настоящей работе, а также и в исследованиях [7, 9] для магнитоупругих пластин, показывают неприменимость осредненного подхода, основанного на гипотезе Кирхгофа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Наука, 1996. 286 с.
3. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Колебания и устойчивость токонесущих пластин. Ереван: НАН Армении, 1992. 124 с.
4. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 25–30.
5. *Багдасарян Г.Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем ЕГУ. Ереван: Тигран Мец, 436 с.
6. *Новацки В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 863 с.
7. *Багдоев А.Г., Саакян С.Г.* Устойчивость нелинейных волн модуляции в магнитном поле для пространственной и осредненной задачи // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 35–42.
8. *Bagdoev A.G., Vantsyan A.A.* Theoretical and experimental investigations of waves in plate in magnetic field for space and averaged problems // Int. J. Solids and Struct. 2002. № 39. P. 851–859.
9. *Сафарян Ю.С.* Исследование колебаний магнитоупругих пластин в пространственном и осредненном подходе // Информационные технологии и управление. 2001. № 2. С. 17–19.
10. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. Москва: Физматлит, 1955. 192 с.
11. *Багдоев А.Г., Кевнаксзян Л.С.* Нелинейные волны модуляций в ферромагнитиных пластинах для произвольной электропроводности // Математика в высш. шк. 2004. № 3. 12–33 с.
12. *Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Осессиметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле // Изв. НАН. Механика. 1967. Т. 20. № 5. С. 21–27.
13. *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматизд. 1959. 552 с.
15. *Рахматуллин Х.А., Шмелев Ю.С.* Взаимодействие сред и полей. Ташкент: ФАН, 1985. 282 с.
16. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.


Ереван, Москва

Поступила в редакцию
19.05.2007