

УДК 539.3

© 2007 г. В.И. ОСТРИК, А.Ф. УЛИТКО

ФРИКЦИОННЫЙ КОНТАКТ ДВУХ ВРАЩАЮЩИХСЯ УПРУГИХ ДИСКОВ

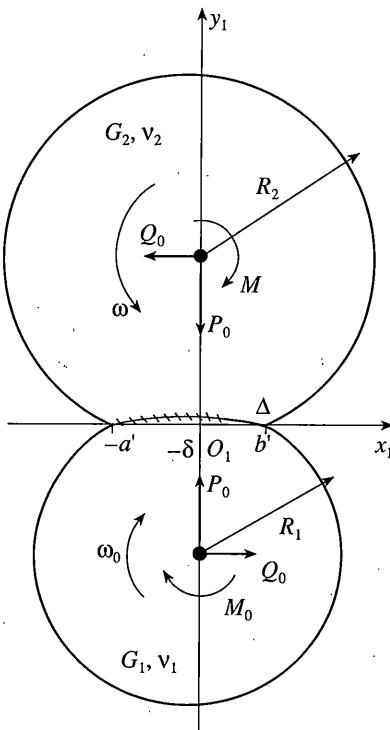
Изучается задача о несвободном равномерном вращении предварительно сжатых двух упругих дисков из разных материалов при учете сил трения в контакте. С использованием метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи.

Важным этапом исследования качения упругих тел является теория Герца [1] контактного взаимодействия упругих тел с плавно изменяющейся кривизной поверхностей в месте контакта при нормальном сжатии. Трение в зоне контакта предполагается пренебрежимо малым. При наличии тангенциальных сил и учете трения в зоне контакта существенно меняется картина контактного взаимодействия упругих тел. Хотя для тел с одинаковыми упругими свойствами распределение нормальных контактных напряжений строго следует теории Герца, а для тел из разнородных материалов по-видимому мало отличается от эпюры Герца, наличие касательных напряжений приводит к разделению области контакта на зону сцепления и зону проскальзывания. Это явление впервые установил О. Рейнольдс [2], обнаружив экспериментально зоны проскальзывания у точек входа и выхода материала из области контакта при несвободном перекатывании цилиндра из алюминия по резиновому основанию. Теоретическое обоснование открытого О. Рейнольдсом явления частичного проскальзывания в области контакта содержится в статьях Ф. Картера [3] и Г. Фромма [4]. Причем в работе Г. Фромма дано завершенное решение задачи о несвободном равномерном вращении двух идентичных дисков. По всей видимости, им впервые введена в рассмотрение так называемая “зашемленная” деформация и постулируется утверждение, что в точке входа материалов дисков в область контакта проскальзывание отсутствует.

В работах А.Ю. Ишлинского [5, 6] дано инженерное решение задачи о проскальзывании в области контакта при трении качения. Рассматривая задачу качения жесткого диска по упругой полуплоскости, последняя моделируется автором бесконечным набором упругих вертикальных стержней с использованием гипотез типа Винклера–Циммермана. Многочисленные работы других авторов отражены в монографии К. Джонсона [7].

Точное решение задачи о несвободном равномерном вращении предварительно сжатых жесткого и упругого дисков в предположениях теории Фромма содержится в статьях [8, 9]. В публикуемой работе полученное в [8, 9] решение обобщается на случай двух упругих разнородных дисков.

1. Постановка задачи. Пусть валы дисков закреплены на вертикальной оси, ведущим является нижний диск, ведомым – верхний (фиг. 1). Заданы прижимающая сила P_0 , крутящий момент M_0 и угловая скорость вращения ω_0 ведущего нижнего диска, а также радиусы R_1 и R_2 , упругие постоянные G_1 , v_1 и G_2 , v_2 соответственно ведущего и ведомого дисков и коэффициент сухого трения Амонтана–Кулона μ_0 . Возникающая при сжатии вращающихся дисков криволинейная площадка контакта является



Фиг. 1

несимметричной относительно оси O_1y_1 . На фиг. 1 абсцисса смещенного с вертикальной оси центра площадки контакта обозначена $-\delta$. Несмотря на термин “диски”, фактически речь идет о бесконечно длинных цилиндрах в условиях плоской деформации и силовые факторы рассчитываются на единицу длины цилиндров.

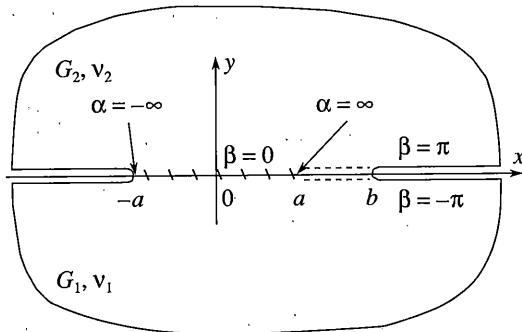
Игнорируя осцилляцию нормальных и касательных напряжений, амплитуда которой обращается в нуль в точке $x_1 = -a'$ набегания материала в область контакта, принимается гипотеза Г. Фромма о наличии только одной зоны проскальзывания Δ у точки $x_1 = b'$ выхода материалов дисков из области контакта и его гипотезу о наличии “зашемленной” деформации $\varepsilon_0 = \text{const}$ у точки входа $x_1 = -a' - 0$. Знак деформации ε_0 заранее неизвестен.

Согласно теории Герца ввиду малости площадки контакта по сравнению с радиусами дисков при расчете напряженно-деформированного состояния каждый из дисков заменяем полуплоскостью с теми же упругими постоянными G_j, v_j ($j = 1, 2$), как показано на фиг. 2. Координата x на этой фигуре связана с координатой x_1 зависимостью

$$x = x_1 + (a' - b' + \Delta)/2, \quad y = y_1 \quad (1.1)$$

Область контакта упругих полуплоскостей задана отрезком $[-a, b]$, зона сцепления $-[a, a]$, зона проскальзывания — промежутком $(a, b]$. Параметры a и b выражаются по формулам

$$a = (a' + b' - \Delta)/2, \quad b = (a' + b' + \Delta)/2 \quad (1.2)$$



Фиг. 2

Значения a, b , так же как и a', b', Δ , заранее неизвестны и должны быть определены в результате решения задачи.

Границные условия формулируются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = \varepsilon_0 = \text{const} \quad (-a \leq x \leq a) \quad (1.3)$$

$$(u_y^{(2)} - u_y^{(1)}) \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2R^*} \left(x - \frac{b-a}{2} - \delta \right)^2 \quad (-a \leq x \leq b)$$

$$\tau_{xy}^{(j)} \Big|_{y=0} = \mu_0 \sigma_y^{(j)} \Big|_{y=0} \quad (j = 1, 2) \quad (a < x \leq b)$$

$$\sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)} \Big|_{y=0}, \quad \tau_{xy}^{(1)} \Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} \quad (-a \leq x \leq a)$$

$$\sigma_y^{(j)} \Big|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}^{(j)} \Big|_{y=0} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (x < -a, x > b)$$

Здесь R^* – приведенный радиус дисков, $1/R^* = 1/R_1 + 1/R_2$.

2. Интегральное уравнение задачи. Общее решение для каждой из полуплоскостей $y \leq 0$ и $y \geq 0$ выразим через две гармонические функции $\Phi_2^{(j)}, \Phi_3^{(j)}$ ($j = 1, 2$) [10]. В частности, на границах полуплоскостей ($y = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_3^{(j)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(3 - 4v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \\ \frac{\sigma_y^{(j)}}{2G_j} &= \frac{\partial}{\partial y} [2(1 - v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}], \quad \frac{\tau_{xy}^{(j)}}{2G_j} = \frac{\partial}{\partial x} [(1 - 2v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

От декартовых координат x, y удобно перейти к биполярным координатам α, β по формулам [10]:

$$x = a \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha + \cos \beta}, \quad y = a \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha + \cos \beta} \quad (-\infty < \alpha < \infty, -\pi \leq \beta \leq \pi) \quad (2.2)$$

С учетом дополнительных слагаемых, отражающих поведение решения на бесконечности [8], гармонические функции в биполярных координатах представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(j)}(\alpha, \beta) &= \frac{G_1}{G_j} \left(2C_1 \arcsin \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\alpha/2)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}} + C_2 \ln \frac{\operatorname{ch}(\alpha/2) + \sin(\beta/2)}{\operatorname{ch}(\alpha/2) - \sin(\beta/2)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_2^{(j)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi - (-1)^j \beta) + B_2^{(j)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi - (-1)^j \beta)] e^{-i\lambda \alpha} d\lambda \\ \Phi_3^{(j)}(\alpha, \beta) &= \frac{G_1}{G_j} \left(4(1-v_j)C_1 \arcsin \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\alpha/2)}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}} + (1-2v_j)C_2 \ln \frac{\operatorname{ch}(\alpha/2) + \sin(\beta/2)}{\operatorname{ch}(\alpha/2) - \sin(\beta/2)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3^{(j)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi - (-1)^j \beta) + B_3^{(j)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi - (-1)^j \beta)] e^{-i\lambda \alpha} d\lambda \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем неизвестную функцию контактного давления в зоне проскальзывания

$$\sigma(\alpha) = -(2G_1)^{-1} \sigma_y^{(1)} \Big|_{y=0} \quad (\beta = -\pi, \alpha_0 \leq \alpha < \infty; \alpha_0 = 2 \operatorname{arcth}(a/b); a < x \leq b) \quad (2.4)$$

Тогда граничные условия (1.3) с учетом (2.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_3^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3^{(1)}}{\partial y} \right) \Bigg|_{\substack{y=0 \\ |x| \leq a}} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \left(\frac{\partial \Phi_3^{(2)}}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi_3^{(1)}}{\partial \beta} \right) \Bigg|_{\beta=0} = \varepsilon_0 \quad (-\infty < \alpha < \infty) \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\partial}{\partial x} [(3-4v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\substack{y=0 \\ |x| \leq a}} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\partial}{\partial \alpha} [(3-4v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\beta=0} = \\ &= -\frac{x}{R^*} + \frac{b-a}{2R^*} = \frac{a}{R^*} [\Psi_0 - \operatorname{th}(\alpha/2)] \quad (-\infty < \alpha < \infty) \\ \frac{\partial}{\partial y} [2(1-v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\substack{y=0 \\ a < x \leq b}} &= -\frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1-v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\beta=(-1)^j \pi} = \\ &= \begin{cases} -(G_1/G_j) \sigma(\alpha) & (\alpha_0 \leq \alpha < \infty) \\ 0 & (-\infty < \alpha < \alpha_0) \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial x} [(1-2v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\substack{y=0 \\ a < x \leq b}} &= -\frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} [(1-2v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\beta=(-1)^j \pi} = \\ &= \begin{cases} -(G_1/G_j) \mu_0 \sigma(\alpha) & (\alpha_0 \leq \alpha < \infty) \\ 0 & (-\infty < \alpha < \alpha_0) \end{cases} \\ \sum_{j=1}^2 (-1)^j G_j \frac{\partial}{\partial y} [2(1-v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Bigg|_{\substack{y=0 \\ |x| \leq a}} &= \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j G_j \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1 - v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=0} = 0 \quad (-\infty < \alpha < \infty) \\
 &\sum_{j=1}^2 (-1)^j G_j \frac{\partial}{\partial x} [(1 - 2v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\substack{y=0 \\ |x| \leq a}} = \\
 &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j G_j \frac{\partial}{\partial \alpha} [(1 - 2v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=0} = 0 \quad (-\infty < \alpha < \infty) \\
 &\sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\partial}{\partial x} [(3 - 4v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\substack{y=0 \\ a < x \leq b}} = \\
 &= -\frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\partial}{\partial \alpha} [(3 - 4v_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=(-1)^j \pi} = \\
 &= -\frac{x}{R^*} + \frac{b-a}{2R^*} = \frac{a}{R^*} [\Psi_0 - \operatorname{cth}(\alpha/2)] \quad (\alpha_0 \leq \alpha < \infty) \\
 \Psi_0 &= \frac{\delta}{a} + \frac{e^{-\alpha_0}}{1 - e^{-\alpha_0}} \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Подставляя в граничные равенства (2.5), кроме последнего из них, выражения (2.3) для гармонических функций и обращая их по Фурье, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных плотностей $A_m^{(j)}(\lambda)$, $B_m^{(j)}(\lambda)$ ($m = 2, 3$; $j = 1, 2$). Решая эту систему уравнений, находим

$$\begin{aligned}
 A_2^{(j)}(\lambda) &= (-1)^{j-1} (G_1/G_j) \{2G[f_1(\lambda) \operatorname{sh} \pi \theta \operatorname{sh} \pi \lambda + f_2(\lambda) \operatorname{ch} \pi \theta \operatorname{ch} \pi \lambda] + \\
 &+ f_3(\lambda) \operatorname{sh} 2\pi \lambda + (-1)^j f_4(\lambda) (\operatorname{ch} 2\pi \lambda + e^{-2(-1)^j \pi \theta})\} / (\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \theta) \\
 B_2^{(j)}(\lambda) &= (G_1/G_j) \{2G[f_1(\lambda) \operatorname{ch} \pi \theta \operatorname{ch} \pi \lambda + f_2(\lambda) \operatorname{sh} \pi \theta \operatorname{sh} \pi \lambda] + \\
 &+ (-1)^j f_3(\lambda) (\operatorname{ch} 2\pi \lambda + e^{-2(-1)^j \pi \theta}) + f_4(\lambda) \operatorname{sh} 2\pi \lambda\} / (\operatorname{ch} 2\pi \lambda + \operatorname{ch} 2\pi \theta) \\
 A_3^{(j)}(\lambda) &= (1 - 2v_j) A_2^{(j)}(\lambda) - (G_1/G_j) f_4(\lambda) \\
 B_3^{(j)}(\lambda) &= 2(1 - v_j) B_2^{(j)}(\lambda) + (-1)^j (G_1/G_j) f_3(\lambda) \quad (j = 1, 2) \tag{2.7} \\
 f_1(\lambda) &= \sqrt{2\pi} [(1 - 2v_2) G_1/G_2 - (1 - 2v_1)] C_2 / (\lambda \operatorname{ch} \pi \lambda) - \sqrt{2\pi} a \varepsilon_0 / \operatorname{sh} \pi \lambda \\
 f_2(\lambda) &= i\sqrt{2\pi} [(1 - 2v_2) G_1/G_2 - (1 - 2v_1)] C_1 / (\lambda \operatorname{ch} \pi \lambda) - i\sqrt{2\pi} (a^2/R^*) (\Psi_0 - i\lambda) / \operatorname{sh} \pi \lambda \\
 f_3(\lambda) &= \frac{i}{\mu_0} f_4(\lambda) = -\frac{a}{\lambda \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{\operatorname{ch} \tau - 1} e^{i\lambda \tau} d\tau \\
 \theta &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{G_1(3 - 4v_2) + G_2}{G_1 + G_2(3 - 4v_1)}, \quad G' = \frac{G_1}{\sqrt{[G_1(3 - 4v_2) + G_2][G_1 + G_2(3 - 4v_1)]}}
 \end{aligned}$$

С помощью (2.7) последнее уравнение (2.5) преобразуется в интегральное уравнение относительно функции контактного давления в зоне проскальзывания

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{\operatorname{ch}\tau - 1} d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\pi\lambda \operatorname{ch}\pi(\lambda - i\gamma)}{\operatorname{ch}\pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch}\pi(\lambda - \theta)} e^{-i\lambda(\alpha - \tau)} d\lambda = \frac{G'}{iD} \left[\varepsilon_0 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin\theta\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right) - \right. \\ \left. - \frac{a}{R^*} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\cos\theta\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right) + \psi_0 \frac{\cos\theta\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right) - A \frac{\cos\theta\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} - B \frac{\sin\theta\alpha}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \right] \quad (\alpha_0 \leq \alpha < \infty) \quad (2.8)$$

$$D = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi\theta + \mu_0^2 \operatorname{sh}^2 \pi\theta}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\mu_0 \operatorname{th} \pi\theta), \quad A = \frac{\operatorname{ch}\pi\theta C_2}{G'} \frac{C_2}{a}, \quad B = \frac{\operatorname{ch}\pi\theta C_1}{G'} \frac{C_1}{a} \quad (2.9)$$

Производя замены

$$\tau = \tau_0 + \eta, \quad \alpha = \alpha_0 + \xi, \quad \frac{\sigma(\alpha_0 + \eta)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 + \eta) - 1} = \varphi(\eta) \quad (2.10)$$

приходим к интегральному уравнению на полуоси с разностным ядром

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty) \quad (2.11)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda) e^{-i\lambda(\xi - \eta)} d\lambda, \quad K(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}\pi\lambda \operatorname{ch}\pi(\lambda - i\gamma)}{\operatorname{ch}\pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch}\pi(\lambda - \theta)}$$

$$f(\xi) = \frac{iG'}{D} \operatorname{Re} \left[(A - iB) \frac{e^{i\theta(\alpha_0 + \xi)}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha_0 + \xi}{2}} + \frac{a}{R^*} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{e^{i\theta(\alpha_0 + \xi)}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha_0 + \xi}{2}} \right) + \left(\frac{a}{R^*} \psi_0 + i\varepsilon_0 \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{e^{i\theta(\alpha_0 + \xi)}}{\operatorname{sh} \frac{\alpha_0 + \xi}{2}} \right) \right]$$

3. Решение интегрального уравнения. Точное решение интегрального уравнения (2.11) найдем методом Винера–Хопфа [11]. Для этого распространим уравнение (2.11) на всю числовую ось, приняв $\varphi(\eta) = 0$ при $\eta < 0$, и применим к нему интегральное преобразование Фурье. Вводя неизвестные функции

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta \quad (3.1)$$

аналитические соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > -c_1$ и $\operatorname{Im} z < c_2$ ($c_1, c_2 > 0$) и применяя теорему о свертке для интегрального преобразования Фурье, приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z) \quad (-\infty < \operatorname{Re} z < \infty, -c_1 < \operatorname{Im} z < c_2) \\ F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi \quad (3.2)$$

Факторизуя коэффициент

$$K(z)/z = K^+(z)K^-(z), \quad K^\pm(z) = \frac{\Gamma(1/2 \mp iz \mp i\theta)\Gamma(1/2 \mp iz \pm i\theta)}{\Gamma(1 \mp iz)\Gamma(1/2 \mp iz \mp \gamma)} \quad (3.3)$$

приводим функциональное уравнение (3.2) к виду

$$zK^+(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z)/K^-(z) = F^+(z)/K^-(z) \quad (-c_1 < \operatorname{Im} z < c_2) \quad (3.4)$$

Факторизацию правой части уравнения (3.4) в виде разности функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскости

$$F^+(z)/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z) \quad (3.5)$$

производим с помощью интеграла типа Коши по действительной оси. Разлагая интеграл в ряд с использованием теории вычетов, находим

$$\begin{aligned} f^+(z) &= -\frac{G}{D\sqrt{2\pi}} \left(e^{-(1/2-i\theta)\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{z+\theta+i(k+1/2)} + e^{-(1/2+i\theta)\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{L}_k}{z-\theta+i(k+1/2)} \right) \\ L_k &= \frac{\Gamma(k+3/2-i\theta)\Gamma(k+1+\gamma-i\theta)}{\Gamma(k+1-2i\theta)} \frac{e^{-k\alpha_0}}{k!} [A - iB + (a/R^*)(k+1/2-i\theta) \times \\ &\times (k+1/2-i\theta - \psi_0) - i\varepsilon_0(k+1/2-i\theta)] \quad (k=0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

С учетом (3.5) функциональное уравнение (3.4) принимает вид

$$zK^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \Phi^-(z)/K^-(z) - f^-(z) \quad (-c_1 < \operatorname{Im} z < c_2) \quad (3.7)$$

Аналитически продолжая (3.7) на всю комплексную плоскость, заключаем, что обе части этого равенства являются аналитической во всей комплексной плоскости функцией $P(z)$. Используя оценки

$$\begin{aligned} K^+(z) &= O(z^{-1/2+\gamma}), \quad \Phi^+(z) = o(z^{-1}), \quad f^+(z) = O(z^{-1}) \\ zK^+(z)\Phi^+(z) &= P(z) = o(z^{-1/2+\gamma}), \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.8)$$

находим $P(z) \equiv 0$. Тогда решение функционального уравнения Винера–Хопфа (3.2) можно записать в виде

$$\Phi^+(z) = f^+(z)/[zK^+(z)], \quad \Phi^-(z) = K^-(z)f^-(z) \quad (3.9)$$

Плотность интегрального уравнения (2.11) находим обращением первого из равенств (3.1), т. е.

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(t)}{tK^+(t)} e^{-i\xi t} dt \quad (3.10)$$

Требования аналитичности функции $\Phi^+(z)$ в точке $z=0$ и ограниченности контактных напряжений при $x \rightarrow a+0$ (функция $K^+(z)$ имеет в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 0$ простой нуль $z = -i(1/2 - \gamma)$) приводят к дополнительным условиям

$$f^+(0) = 0, \quad f^+(-i/2 + i\gamma) = 0 \quad (3.11)$$

которые с учетом выражения для $f^+(z)$ из (3.6) запишем в виде

$$\operatorname{Re} e^{i\theta\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k+1/2-i\theta} = 0, \quad \operatorname{Re} e^{i\theta\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k+\gamma-i\theta} = 0 \quad (3.12)$$

4. Контактные напряжения. Преобразуя интеграл из (3.10) в ряд по вычетам и используя замены (2.10), (2.4), получим выражение для нормальных контактных напряжений в зоне проскальзывания

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}|_{y=0} &= -\frac{1}{\pi} E^* \operatorname{ch}^2 \pi \theta (\operatorname{ch} \alpha - 1) e^{-\alpha_0/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{|\Gamma(k + 1/2 + i\theta)|^2}{\Gamma(k + 1/2 + \gamma)} e^{-k(\alpha - \alpha_0)} \times \right. \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m - k + 1/2 - i\theta} - (1 + \mu_0^2) \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \theta |\Gamma(k + 1 - \gamma + i\theta)|^2}{D^2} \frac{1}{\Gamma(k + 3/2 - \gamma)} e^{-(k + 1/2 - \gamma)(\alpha - \alpha_0)} \times \\ &\times \left. \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m - k + \gamma - i\theta} \right), \quad \alpha = \ln \frac{x+a}{x-a} \quad (\alpha_0 \leq \alpha < \infty, a < x \leq b) \\ E^* &= 2((1 - v_1)/G_1 + (1 - v_2)/G_2)^{-1} = 4G_1 G'/\operatorname{ch} \pi \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

где E^* – приведенный модуль упругости.

Контактные напряжения в зоне сцепления ($-a \leq x \leq a; \beta = 0, -\infty < \alpha < \infty$) находим подстановкой в соотношения (2.1) функций $\Phi_m^{(j)}$ из (2.3) и плотностей $A_m^{(j)}, B_m^{(j)}$ из (2.7) ($m = 2, 3; j = 1, 2$). В комплексной записи имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)})|_{\beta=0} &= (\operatorname{ch} \alpha + 1) \left\{ (1 + i\mu_0) \frac{\operatorname{ch} \pi \theta}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{\operatorname{ch} \tau - 1} \frac{e^{i\theta(\alpha-\tau)}}{\operatorname{ch}((\alpha-\tau)/2)} d\tau + \right. \\ &+ G' \left[\frac{a}{R^*} \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{e^{i\theta\alpha}}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} \right) + \left(\frac{a}{R^*} \Psi_0 + i\varepsilon_0 \right) \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{i\theta\alpha}}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} \right) + (A - iB) \frac{e^{i\theta\alpha}}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Преобразуя интеграл из (4.2):

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{\operatorname{ch} \tau - 1} \frac{e^{i\theta(\alpha-\tau)}}{\operatorname{ch}((\alpha-\tau)/2)} d\tau = \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{\operatorname{ch} \tau - 1} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\tau-\alpha)t}}{\operatorname{ch} \pi(t + \theta)} dt = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha_0 - \alpha)t}}{\operatorname{ch} \pi(t + \theta)} \Phi^+(t) dt$$

и применяя к нему теорию вычетов, получим выражения для контактных напряжений в зоне сцепления

$$\begin{aligned} (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)})|_{y=0} &= E^* \operatorname{ch} \pi \theta (\cos \alpha + 1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ [A - iB + (a/R^*)(k + 1/2 + i\theta)(k + 1/2 + \\ &+ i\theta + \Psi_0) + i\varepsilon_0(k + 1/2 + i\theta)] e^{(k + 1/2 + i\theta)\alpha} + (1 + i\mu_0) \bar{z}_k e^{(k + 1/2 + i\theta)(\alpha - \alpha_0)} \operatorname{ch} \pi \theta \} \\ &(-\infty < \alpha < 0, -a < x < a) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)})|_{y=0} &= E^* \operatorname{ch} \pi \theta (\operatorname{ch} \theta + 1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\Gamma(k + 1 - 2i\theta)k!}{\Gamma(k + 3/2 - i\theta)\Gamma(k + 1 + \gamma - i\theta)} e^{k\alpha_0} \times \right. \\ &\times L_k e^{-(k + 1/2 - i\theta)\alpha} + (1 + i\mu_0) \bar{z}_k e^{(k + 1/2 + i\theta)(\alpha - \alpha_0)} \operatorname{ch} \pi \theta \right) (0 \leq \alpha \leq \alpha_0, 0 \leq x \leq a^2/b) \end{aligned}$$

$$(\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)})|_{y=0} = -\frac{1}{\pi} E^* \operatorname{ch}^2 \pi\theta (1 + i\mu_0) (\operatorname{ch} \alpha + 1)^{-\alpha_0/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(\frac{|\Gamma(k + 1/2 + i\theta)|^2}{\Gamma(k + 1/2 + \gamma)} \right) \times \\ \times e^{-k(\alpha - \alpha_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m - k + 1/2 - i\theta} + (1 - i\mu_0) \frac{\operatorname{sh} \pi\theta |\Gamma(k + 1 - \gamma + i\theta)|^2}{iD \Gamma(k + 3/2 - \gamma)} e^{-(k + 1/2 - \gamma)(\alpha - \alpha_0)} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m - k + \gamma - i\theta} \quad (\alpha_0 < \alpha < \infty, a^2/b < x \leq a)$$

$$\alpha = \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad z_k = \frac{1}{G\sqrt{2\pi}} \Phi^+(i(k + 1/2 - i\theta)) = \quad (4.4) \\ = \frac{\Gamma(k + 1/2 - i\theta) \Gamma(k + 1 - \gamma - i\theta)}{2\pi D \Gamma(k + 1 - 2i\theta) k!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-(1/2 - i\theta)\alpha_0} L_m}{m + k + 1 - 2i\theta} + \frac{e^{-(1/2 + i\theta)\alpha_0} \bar{L}_m}{m + k + 1} \right) (k = 0, 1, \dots)$$

Значения первого выражения из (4.3) неограничены при $\alpha \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow -a + 0$) за счет нулевого слагаемого суммы (при $k = 0$). Требуя ограниченность, а фактически непрерывность напряжений $\sigma_y|_{y=0}, \tau_{xy}|_{y=0}$ при переходе через точку $x = -a$, поскольку указанные напряжения равны нулю вне области контакта, накладываем условие

$$A - iB + (a/R^*)(1/2 + i\theta)(1/2 + i\theta + \psi_0) + i\varepsilon_0(1/2 + i\theta) + \\ + (1 + i\mu_0) \operatorname{ch} \pi\theta \frac{\Gamma(1/2 + i\theta) \Gamma(1 - \gamma + i\theta)}{2\pi D \Gamma(1 + 2i\theta)} e^{-\alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{L_m}{m+1} + e^{-2i\theta\alpha_0} \frac{\bar{L}_m}{m+1+2i\theta} \right) = 0. \quad (4.5)$$

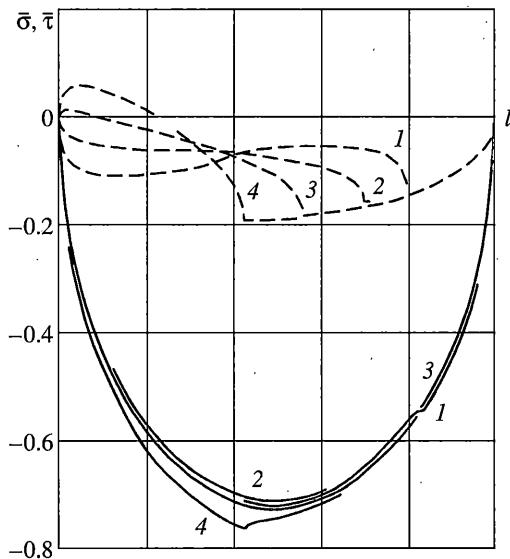
Распределение контактных напряжений, выраженных в виде формул (4.1), (4.3), будет найдено, если будут определены неизвестные значения a (полудлина области сцепления), “зашемленной” деформации ε_0 , характеристика размера зоны проскальзывания α_0 , константа ψ_0 (характеристика горизонтального смещения площадки контакта) и постоянные A и B . Указанные неизвестные определяются из двух вещественных уравнений (3.12), комплексного уравнения (4.5) и комплексного условия равновесия одного из дисков ($Q_0 = M_0/R_1$):

$$P_0 + iQ_0 = - \int_{-a}^a (\sigma_y^{(1)} + i\tau_{xy}^{(1)})|_{y=0} dx + 2G_1(1 + i\mu_0) \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha = \\ = -4\pi a G_1 \left(\frac{C_2}{a} - i \frac{C_1}{a} \right) = -\pi a E^*(A - iB) \quad (4.6)$$

5. Пример расчета. При проведении вычислений по приведенным выше формулам неизвестные постоянные ε_0 , A и B относились к безразмерному неизвестному значению a/R^* :

$$\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 R^*/a, \quad \bar{A} = A R^*/a, \quad \bar{B} = B R^*/a \quad (5.1)$$

Кроме них за неизвестные принимались α_0 и ψ_0 . Предполагаются заданными прижимающая сила P_0 и сдвигающая сила Q_0 . Для их определения использовались указанные



Фиг. 3

в конце п. 4 четыре алгебраические уравнения. Пятым уравнением для указанных пяти неизвестных служило равенство, вытекающее из условий равновесия

$$\bar{B} = -(Q_0/P_0)\bar{A} \quad (5.2)$$

При этом неизвестная a/R^* определяется из вещественной части уравнения (4.6) по формуле

$$\frac{a}{R^*} = \sqrt{\frac{P_0}{\pi \bar{A} E^* R^*}} \quad (\bar{A} < 0) \quad (5.3)$$

Относительная длина зоны проскальзывания определяется следующим образом:

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{a' + b'} = \frac{b - a}{a + b} = e^{-\alpha_0} \quad (5.4)$$

Длина области контакта $l = a' + b' = a + b$ с использованием двух последних формул находится в виде

$$l = l_0 \sqrt{\frac{P_0 R^*}{E^*}}, \quad l_0 = \frac{2}{(1 - \bar{\Delta}) \sqrt{-\pi \bar{A}}} \quad (5.5)$$

В расчете принимались значения коэффициентов Пуассона $v_1 = v_2 = v = 0.3$, а для коэффициента трения выбиралось значение $\mu_0 = 0.25$. Кроме того, задавалось отношение сил $Q_0/P_0 = 0.15$. Отношение модулей сдвига G_1/G_2 упругих дисков варьировалось от нуля (ведомый диск – абсолютно жесткий) до бесконечности, когда абсолютно жестким является ведущий диск.

На фиг. 3 показано распределение вдоль области контакта безразмерных нормальных напряжений $\bar{\sigma} = 2\sigma_{xy}|_{y=0} R^*/((1-v)E^*l)$ (сплошные кривые) и касательных напряжений $\bar{\tau} = 2\tau_{xy}|_{y=0} R^*/((1-v)E^*l)$ (пунктирные линии). Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют

Таблица

G_1/G_2	$\bar{\Delta}$	$\bar{\varepsilon}_0$	$\bar{\delta}$	l_0	\bar{c}'	\bar{N}_Δ
0	0.1975	0.3281	-0.0159	2.253	0.0166	0.0530
0.5	0.2994	0.2099	-0.0048	2.261	0.0058	0.0991
1	0.3675	0.1453	0	2.257	0	0.1453
2	0.4398	0.0681	0.0044	2.249	-0.0062	0.2166
∞	0.5724	-0.1559	0.0119	2.224	-0.0202	0.4732

отношению модулей сдвига G_1/G_2 , равному 0, 1/2, 2, ∞ . В точке перехода из зоны сцепления в зону проскальзывания графики контактных напряжений имеют характерные изломы. В случае, когда оба диска являются упругими ($G_1/G_2 \neq 0, \infty$), для нормальных напряжений эти изломы сглаживаются.

В табл. приведены значения относительной длины зоны проскальзывания $\bar{\Delta}$, нормализованной “зашемленной” деформации $\bar{\varepsilon}_0$, относительного смещения площадки контакта $\bar{\delta} = \delta/l$, безразмерной длины области контакта $l_0 = l\sqrt{E^*/(P_0R^*)}$, относительной координаты точки приложения главного вектора нормальных контактных напряжений $\bar{c}' = c'/l$ и относительной мощности потерь в зоне проскальзывания $\bar{N}_\Delta = (R^*/a)N_\Delta/N_0$ (о последних двух характеристиках речь пойдет ниже) в зависимости от отношения G_1/G_2 . Заметим, что “зашемленная” деформация $\varepsilon_0 = (a/R^*)\bar{\varepsilon}_0$ в случае ведущего жесткого диска ($G_1/G_2 = \infty$) имеет отрицательный знак. С увеличением жесткости ведущего диска зона проскальзывания занимает значительную часть области контакта. Площадка контакта смещается в направлении движения контактирующих поверхностей дисков, если ведущим является менее жесткий диск ($G_1/G_2 < 1$) и в обратном направлении в противном случае ($G_1/G_2 > 1$). Для дисков, выполненных из одного материала ($G_1/G_2 = 1, v_1 = v_2$), площадка контакта остается симметричной относительно вертикальной оси, проходящей через валы дисков. Приведенная длина области контакта мало зависит от отношения G_1/G_2 .

Расчеты показывают, что в случае $G_1/G_2 > 3.7$, когда ведущий диск значительно жестче ведомого, “зашемленная” деформация $\varepsilon_0 < 0$, т.е. окружная деформация в зоне сцепления на ободе ведомого диска меньше, чем на ободе ведущего диска. Если же $G_1/G_2 < 3.7$, наблюдается обратное ($\varepsilon_0 > 0$). В предельных случаях $G_1/G_2 = 0$ или ∞ , когда один из дисков является абсолютно жестким, набегающая в контакт деформация на ободе упругого диска будет сжимающей ($\varepsilon_0 > 0$ в случае упругого ведущего диска и $\varepsilon_0 < 0$ в случае упругого ведомого диска).

При отношении $G_1/G_2 > 3.7$ угловая скорость ведомого диска ω оказывается большей, чем без учета упругих деформаций дисков

$$\omega = \frac{R_1}{R_2} \frac{\omega_0}{1 + \varepsilon_0} > \frac{R_1}{R_2} \omega_0 \quad (\varepsilon_0 < 0) \quad (5.6)$$

Покажем, что и в этом, несколько необычном случае, передаваемая мощность, снижаемая на валу ведомого диска, остается меньше входной мощности, подводимой к оси ведущего диска. За исключением случая дисков, выполненных из одного материала ($G_1/G_2 = 1$), тормозящий момент на оси ведомого диска M не равен $(R_1/R_2)M_0$. В связи со смещением площадки контакта с осью, проходящей через центры валов дис-

ков, также смещается центр приведения нормальных контактных напряжений $\sigma_y^{(1)}|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}|_{y=0}$ к главному вектору P_0 , параллельному оси O_1y_1 (силы консервативны), с равным нулю моментом приведения заданных нормальных напряжений. В системе координат $x_1O_1y_1$ обозначим абсциссу точки приложения главного вектора через c' . Тормозящий момент M суммируется с моментом от главного вектора $-P_0c'$ и их суммарное значение с точностью до множителя R_2/R_1 равно входящему моменту M_0 , уменьшенному на момент от главного вектора: $M - P_0c' = (R_2/R_1)(M_0 + P_0c')$. Отсюда

$$M = (R_2/R_1)M_0 + (1 + R_2/R_1)P_0c' \quad (5.7)$$

Для всех пяти рассмотренных выше вариантов отношения G_1/G_2 были вычислены относительные значения $\bar{c}' = c'l$ и результаты вычислений представлены в табл. С использованием этих данных и формулы (5.7) находились выходная мощность на оси ведомого диска

$$N = M\omega = \frac{N_0}{1 + \varepsilon_0} \left(1 + \frac{P_0}{Q_0} \frac{c'}{R^*} \right) \quad (5.8)$$

где $N_0 = M_0\omega_0$ – входная мощность. Для мощности, потерянной вследствие сухого трения в зоне проскальзывания, получаем значение

$$N_\Delta = N_0 - N = \frac{N_0}{1 + \varepsilon_0} \left(\varepsilon_0 - \frac{P_0}{Q_0} \frac{c'}{R^*} \right) \approx N_0 \left(\varepsilon_0 - \frac{P_0}{Q_0} \frac{c'}{R^*} \right) \quad (5.9)$$

Здесь мы пренебрегаем величиной ε_0 по сравнению с единицей ($\varepsilon_0 = (a/R^*)\bar{\varepsilon}_0$, $a/R^* \ll 1$).

Численные результаты для относительной потерянной мощности $\bar{N}_\Delta = (R^*/a)N_\Delta/N_0$ представлены в табл. Видно, что с увеличением относительной жесткости ведущего диска потерянная мощность в зоне проскальзывания растет значительно быстрее самой зоны проскальзывания. С точки зрения потерь мощности на трение, наиболее экономичной является передача вращательного движения от упругого диска к абсолютно жесткому, наименее экономичной – в случае ведущего жесткого диска.

В заключение отметим, что в случае $R_2 = \infty$ получаем решение задачи о несвободном равномерном качении диска по упругому основанию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine Angew. Math. 1881. Bd. 92. S. 156–171.
2. Reynolds O. On rolling friction // Philos. Trans. Roy. Soc. 1875. V. 166. P. 155–163.
3. Carter F.W. On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc. 1926. V. 112. P. 151–157.
4. Fromm H. Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben // Z. Angew. Math. Mech. 1927. Bd. 7. № 1. S. 27–58.
5. Ишилинский А.Ю. О трении качения // Прикл. матем. и мех. 1939. Т. 2. С. 245–260.
6. Ишилинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 2. М.: Наука, 1986. 416 с.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
8. Улитко А.Ф. Exakte Lösung des Kontaktproblems für zwei Zylinder unter Berücksichtigung der Reibung // Z. Angew. Math. Mech. 2000. Bd. 80. № 7. S. 435–455.
9. Острик В.И., Улитко А.Ф. Равномерное вращение предварительно скатых жесткого и упругого дисков при учете сил трения в контакте // Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишилинского / Под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 619–634.
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 420 с.
11. Нобль Б. Метод Винера–Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.