

УДК 539.374

© 2007 г. Р.И. НЕПЕРШИН

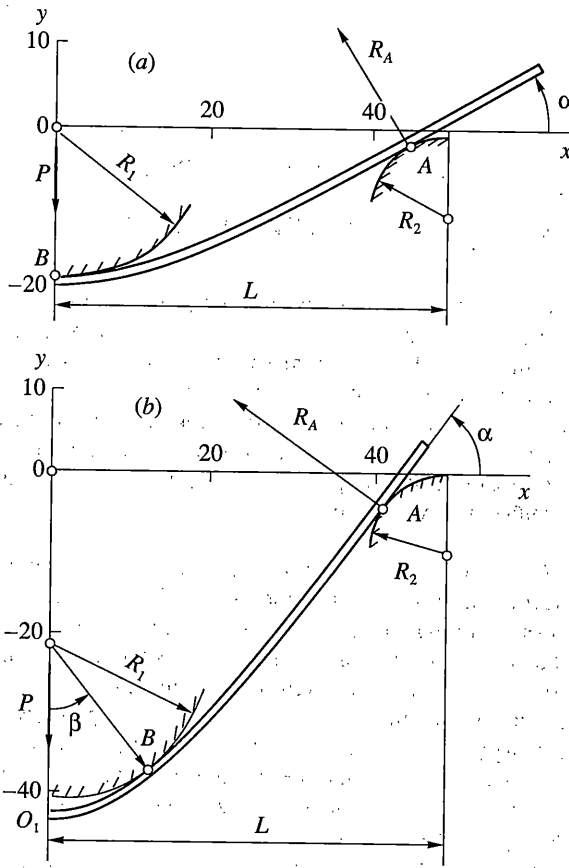
ИЗГИБ ТОНКОЙ ПОЛОСЫ КРУГОВЫМ ИНСТРУМЕНТОМ

Приведена модель поперечного изгиба широкой тонкой упругой, упруго-пластической и жесткопластической полосы круговым инструментом при больших перемещениях. Изгиб начальной прямолинейной полосы моделируется малыми приращениями нагрузки на инструмент с расчетами сил, моментов, кривизны и уравнения средней линии. После упругой разгрузки определяются конечная форма полосы и остаточные напряжения. Моделирование описывает технологические операции гибки листовых заготовок в штампах и на валковых гибочных машинах.

1. Введение. Изгиб листовых заготовок является одной из основных технологических операций в машиностроении и приборостроении [1]. Изгиб применяется для изготовления большого многообразия изделий от мелких деталей сложной формы из малоуглеродистой стали и цветных металлов и сплавов в штампах [2] до крупногабаритных цилиндрических оболочек из прочных сталей на валковых машинах [3]. Основными задачами технологии являются получение деталей с заданным радиусом кривизны с учетом его изменения при разгрузке и оценка остаточных напряжений по толщине листа. В большинстве процессов изгиба отношение длины участка заготовки, на котором действует изгибающий момент, к ее толщине велико, поэтому для расчетов этих процессов применяется теория Бернулли–Эйлера.

Техническая реализация изгиба листовой заготовки приводит к большому числу геометрических и механических параметров, влияющих на технологический процесс, моделирование которого представляет трудную задачу. В приближенных расчетах обычно ограничиваются анализом чистого изгиба упругопластической или жесткопластической полосы для оценки изгибающего момента при нагрузке, пружинения и остаточных напряжений при разгрузке [1, 3–5]. Теория поперечного изгиба упругопластических стержней и пластин при малых перемещениях до появления пластического шарнира, определяющего предельные нагрузки, приведена в [6]. Приближенная модель процесса изгиба на трехвалковой машине с использованием предварительно полученной зависимости изгибающего момента от кривизны упругопластической заготовки представлена в [7].

Известны расчеты изгиба упругопластической полосы круговым инструментом методом конечных элементов при плоской деформации с учетом больших перемещений [8, 9]. Основной трудностью этого метода является большое число элементов для моделирования изгиба с большой длиной расчетной области при малом числе элементов по толщине полосы, где происходит наибольшее изменение напряжений. Расчет оказывается очень трудоемким, а оценка основных нормальных напряжений изгиба – приближенной вследствие усреднения напряжений по нескольким элементам [9]. Вместе с тем, приведенная в [8] деформированная координатная сетка подтверждает гипотезу плоских сечений, и приведенное в [9] распределение напряжений по толщине заготовки показывает, что поперечные нормальные и касательные напряжения малы по сравнению с продольными нормальными напряжениями в соответствии с гипотезой плоских сечений Бернулли–Эйлера.



Фиг. 1

В представленной работе на основе теории Бернулли–Эйлера моделируется симметричный процесс поперечного изгиба тонкой полосы круговым инструментом с учетом пластического упрочнения материала и сил контактного трения. При моделировании рассчитывается изменение формы полосы и граничных условий контакта с инструментом при малых приращениях нагрузки. После снятия нагрузки определяется конечная форма полосы и остаточные напряжения.

При больших перемещениях кривизна средней части упругопластической полосы становится больше кривизны кругового инструмента, и между инструментом и полосой образуется зазор, что согласуется с расчетами методом конечных элементов [8, 9] и экспериментальными исследованиями [10]. При изгибе упруго идеально пластической полосы с низким пределом текучести пластический шарнир образуется при малом прогибе и малой кривизне полосы между точками контакта с инструментом. В этом случае предлагается модель жесткопластического изгиба с учетом натяжения концов полосы, обеспечивающего ее плотный контакт с инструментом.

2. Формулировка задачи. На фиг. 1 показана правая половина поперечного изгиба тонкой полосы круговым инструментом, которая описывает основную стадию процесса изгиба пуансоном с радиусом закругления R_1 в матрицу с радиусом закругления R_2 или изгиба центральным валком на трехвалковой машине без натяжения концов полосы.

Ширину полосы b в направлении перпендикулярном к плоскости изгиба примем большой по сравнению с толщиной h , и поэтому пренебрежем искажением формы поперечного сечения при изгибе.

В начальном положении горизонтальная полоса имеет три точки контакта с инструментом и деформируется круговым пуансоном или центральным валком, к которому приложена сила P . Начальная длина $2L$ нагруженной части полосы является технологическим параметром задачи, а полная длина $2L_0$ задается конструкцией детали при изгибе на заданный угол между ее плоскими участками.

Вследствие изменения изгибающего момента по длине нагруженной части полосы ее кривизна χ изменяется от нуля в точке контакта A до максимального значения в центре полосы. В первый период изгиба кривизна полосы в точке B меньше кривизны инструмента. В этот период сохраняется трехточечный контакт полосы с инструментом при смещении точки контакта A на опорной поверхности с радиусом R_2 и повороте прямолинейной части полосы на угол α (фиг. 1, *a*).

При большом перемещении инструмента и отсутствии натяжения концов полосы или ее прижима наступает вторая стадия процесса, когда кривизна в центре полосы становится больше кривизны инструмента. Это приводит к смещению точки контакта B на поверхности инструмента с радиусом R_1 на угол β относительно вертикальной оси и к появлению зазора между полосой и центральным инструментом в его средней части (фиг. 1, *b*).

Для сталей с низким пределом текучести вторая стадия наступает при сравнительно малом перемещении инструмента вследствие сильного снижения изгибной жесткости полосы с приближением изгибающего момента к предельному значению момента пластического шарнира, и при отсутствии кинематического ограничения инструментом полоса превращается в механизм. Вторая стадия изгиба наблюдается в расчетах методом конечных элементов [8, 9] и подтверждается экспериментами [10]. В штампах для изгиба деталей из пластичных металлов отклонение полосы от поверхности контакта с пуансоном подавляется калибровкой полосы между пуансоном и матрицей в конце изгиба, прижимом полосы к пуансону или натяжением концов полосы [2, 3].

В настоящей работе на основе гипотезы Бернулли–Эйлера моделируются первая и вторая стадии симметричного изгиба тонкой упругопластической полосы в соответствии со схемами, показанными на фиг. 1. Силу P , реакции R_A и R_B в точках A и B , внутренние силы и моменты в полосе примем равномерно распределенными по ширине полосы b . Силу трения при скольжении полосы в точках контакта с инструментом учтем с помощью коэффициента трения f по закону Кулона. Для полосы с низким пределом текучести используется модель жесткопластического материала с учетом натяжения концов полосы, предотвращающего появление зазора между полосой и центральным инструментом.

3. Основные уравнения. При моделировании процесса изгиба полосы линейные размеры и силовые величины примем безразмерными, выбирая толщину полосы $h = 1$ за характерную длину и предел текучести материала полосы $\sigma_s = 1$ за характерное напряжение.

Форму полосы в процессе изгиба найдем по уравнению ее средней линии относительно неподвижной декартовой системы координат (x, y) . В качестве материальной координаты примем длину дуги средней линии s_0 , совпадающую с координатой x в начальном положении полосы. При численном интегрировании уравнения средней линии будем использовать криволинейную координату s – длину дуги средней линии полосы, по деформации которой устанавливается связь между начальными s_0 и декартовыми x, y координатами средней линии полосы на каждом шаге нагружения.

Дифференциальные соотношения для изгибающего момента M , нормальной и поперечной сил N и Q в сечениях полосы вдоль s следуют из уравнений равновесия криволиней-

нейного элемента с кривизной χ , которые при наличии распределенной нагрузки q имеют вид

$$dM = Qds \quad (3.1)$$

$$dN = -\chi Qds \quad (3.2)$$

$$dQ = (\chi N - q)ds \quad (3.3)$$

Для чистого изгиба полосы с кривизной χ при $q = 0$ постоянным моментом M из соотношений (3.1)–(3.3) следует $Q = N = 0$. Очевидно, что при поперечном изгибе полосы эти условия не выполняются. Если же на некоторой стадии изгиба круговым инструментом кривизна полосы оказывается равной кривизне инструмента на конечной дуге контакта и соответствующий этой кривизне момент M будет постоянным, то из (3.1) следует $Q = 0$, из (3.2) – постоянство нормальной силы N , связанной с распределенной нагрузкой q соотношением

$$\chi N = q \quad (3.4)$$

При положительном значении N формула (3.4) определяет давление на полосу со стороны выпуклого инструмента. Это – метод изгиба полосы с натяжением, применяемый на практике. При отрицательной силе N давление q меняет знак. Этот случай реализуется при изгибе с прижимом полосы к пуансону [1]. Если прижим отсутствует, полоса отклоняется от пуансона и реализуется четырехточечный контакт по схеме, показанной на фиг. 1, *b*. При $\chi = 0$ из (3.1)–(3.3) следуют известные соотношения между M , Q и q для прямолинейной полосы при постоянной силе N .

Расчет уравнения средней линии полосы будем вести от начальной прямолинейной формы с малыми приращениями нагрузки на полосу. Пусть на текущей стадии изгиба форма средней линии полосы и угол α в точке контакта A известны. Тогда сила P и нормальная реакция R_A в точке A с учетом контактного трения связаны соотношением

$$P = 2R_A(\cos \alpha + f \sin \alpha) \quad (3.5)$$

Если появляется вторая стадия процесса со смещением точки контакта B на границе пуансона на угол β , то нормальная реакция в точке B и сила P связаны соотношением

$$P = 2R_B(\cos \beta - f \sin \beta) \quad (3.6)$$

При изгибе по схеме, показанной на фиг. 1, *a*, момент M и силы N и Q в сечениях полосы, нормальных к средней линии в точках с координатами x , y , определяются условиями равновесия

$$M = \frac{1}{2}P \left[x_A - x + (y_A - y) \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \right] \quad (3.7)$$

$$N = \frac{1}{2}P \frac{f \cos(\alpha - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \quad (3.8)$$

$$Q = -\frac{1}{2}P \frac{\cos(\alpha - \varphi) + f \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \quad (3.9)$$

где x_A и y_A – координаты точки A , а φ – угол наклона касательной к средней линии в точке x , y .

Для изгиба по схеме, показанной на фиг. 1, b , величины M , N и Q на участке AB , включая точку B , определяются по формулам (3.7)–(3.9). На среднем участке O_1B :

$$M = M_B + (x_B - x)[(N_B + fR_B) \sin \beta - (Q_B + R_B) \cos \beta] - (y_B - y)[(Q_B + R_B) \sin \beta + (N_B + fR_B) \cos \beta] \quad (3.10)$$

$$N = (N_B + fR_B) \cos(\beta - \varphi) + (Q_B + R_B) \sin(\beta - \varphi) \quad (3.11)$$

$$Q = (N_B + fR_B) \sin(\beta - \varphi) - (Q_B + R_B) \cos(\beta - \varphi) \quad (3.12)$$

где величины с нижним индексом B рассчитываются в точке B по формулам (3.6)–(3.9).

Момент M и сила N в нормальных сечениях полосы определяются распределением нормального напряжения σ по толщине полосы. Вводя координату ζ по направлению нормали к средней линии полосы, получим

$$M = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma \zeta d\zeta, \quad N = \int_{-1/2}^{+1/2} \sigma d\zeta \quad (3.13)$$

Деформация ε по направлению оси z определяется соотношением

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi \zeta \quad (3.14)$$

где ε_0 – деформация средней линии полосы.

Для упругопластической модели полосы при напряжении σ ниже предела текучести σ_s зависимость σ от ε определяется законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 1/E = \varepsilon^* \quad (3.15)$$

где E – отношение модуля упругости к σ_s . При $|\varepsilon| > \varepsilon^*$ материал полосы переходит в пластическое состояние; для которого примем степенную зависимость σ от пластической деформации $|\varepsilon_p| = |\varepsilon| - \varepsilon^*$

$$\sigma = \pm(1 + C|\varepsilon_p|^n) \quad (3.16)$$

где знак плюс относится к растяжению при $\varepsilon > \varepsilon^*$, а знак минус относится к сжатию при $\varepsilon < -\varepsilon^*$; C и n – безразмерные постоянные материала. В случае $C = 0$ получим модель упруго идеально пластического тела, а при $C > 0$ и $n = 1$ – модель материала с линейным пластическим упрочнением.

Из (3.14) и (3.15) найдем упругопластические границы ζ_1 и ζ_2 в зонах растяжения и сжатия при $\varepsilon = \pm\varepsilon^*$ и толщину упругого слоя $h_e = \zeta_1 - \zeta_2$:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\chi} \left(\frac{1}{E} - \varepsilon_0 \right), \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\chi} \left(\frac{1}{E} + \varepsilon_0 \right), \quad h_e = \frac{2}{E\chi} \quad (3.17)$$

Из (3.17) найдем зависимости χ и ε_0 от ζ_1 и ζ_2 :

$$\chi = \frac{2}{E(\zeta_1 - \zeta_2)}, \quad \varepsilon_0 = -\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{E(\zeta_1 - \zeta_2)} \quad (3.18)$$

4. Изгиб упругой полосы. Если в сечениях нагруженной части полосы деформации удовлетворяют неравенству $|\varepsilon| < 1/E$, то полоса находится в упругом состоянии. Вычисляя интегралы (3.13) с использованием зависимостей (3.15) и (3.14), получим

$$M = \chi E/12, \quad N = \varepsilon_0 E \quad (4.1)$$

При $\varepsilon = 1/E$ на границе $\zeta = 1/2$ появляется пластическая деформация. Из (3.14) и соотношений (4.1) найдем предельные значения кривизны и момента, ограничивающие упругую стадию изгиба полосы:

$$\chi_1^* = \frac{2}{E}(1-N), \quad M_1^* = \frac{1}{6}(1-N) \quad (4.2)$$

Из соотношений (4.2) следует, что при $N \rightarrow 1$ наступает безмоментное состояние – полоса нагружена растяжением до напряжения σ_s . При малой силе N и высоком значении σ_s кривизна увеличивается, и упругая стадия может занимать значительную часть процесса изгиба. Для материалов с низким значением σ_s упругая стадия изгиба мала.

Моделирование процесса изгиба начнем с расчета упругой стадии от начальной прямой формы полосы для малого приращения силы P от нуля при $\alpha = 0$, $x_A = L$, $y_A = 0$ в точке контакта А (фиг. 1).

На первом шаге нагружения по соотношениям (3.7)–(3.9) и (4.1) найдем

$$M = 1/2P(L-x), \quad N = 1/2Pf, \quad Q = -1/2P \quad (4.3)$$

$$\chi = \frac{6P}{E}(L-x), \quad \varepsilon_0 = \frac{1Pf}{2E} \quad (4.4)$$

Так как кривизна определяется соотношением $\chi = d\varphi/ds$, и в начальном положении полосы $s = x$, то первое выражение (4.4) определяет дифференциальное уравнение для угла наклона φ касательной к средней линии полосы, интегрируя которое с граничным условием $\varphi = 0$ при $x = 0$, получим

$$\varphi = \frac{6P}{E}x\left(L - \frac{x}{2}\right) \quad (4.5)$$

При $x = L$ из (4.5) находим угол поворота свободного конца полосы в точке контакта А:

$$\alpha = 3PL^2/E \quad (4.6)$$

Уравнение средней линии полосы найдем, интегрируя соотношение $dy = \operatorname{tg} \varphi dx$. В начальном положении полосы для малой силы P примем $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$. Интегрируя уравнение (4.5) с условием $y = -U$ при $x = 0$, находим уравнение средней линии полосы после первого шага нагружения:

$$y = \frac{P}{E}x^2(3L-x) - U \quad (4.7)$$

где U – перемещение средней точки полосы.

При повороте свободного конца полосы на угол α координаты точки А на правой опорной поверхности определяются уравнениями

$$x_A = L - (R_2 + 1/2)\sin \alpha, \quad y_A = -(R_2 + 1/2)(1 - \cos \alpha) \quad (4.8)$$

Подставляя эти координаты в уравнение (4.7) при $\alpha \approx 0$ на первом шаге нагружения, найдем перемещение U центра полосы

$$U = 2PL^3/E \quad (4.9)$$

Максимальную кривизну в центре полосы $\chi_{\max}$ определим из первого уравнения (4.4) при $x = 0$:

$$\chi_{\max} = 6PL/E \quad (4.10)$$

Для малой силы P кривизна $\chi_{\max}$ удовлетворяет неравенству $\chi_{\max} < \chi_1^*$. В случае низкой величины σ_s кривизна χ_1^* может быть малой, и пластическая деформация в центре полосы появляется при незначительном искривлении полосы. В этом случае из (4.10) и первого соотношения (4.2) найдем предельное значение силы P :

$$P^* = L/3 \quad (4.11)$$

Используем его для выбора приращения нагрузки при моделировании упругого изгиба полосы. Дальнейшие расчеты процесса изгиба выполним, численно интегрируя уравнения

$$d\varphi/ds = \chi(s), \quad dy/dx = \operatorname{tg} \varphi \quad (4.12)$$

при малых приращениях нагрузки P или реакции R_A . Моменты и силы в сечениях полосы вычислим по формулам (3.7)–(3.9) для формы полосы, найденной на предыдущем шаге нагружения, и определим из (4.1) χ и ε_0 .

Проинтегрируем первое уравнение (4.12) с начальным условием $\varphi = 0$ при $s = 0$. Из решения этого уравнения найдем угол α в точке A при $s = s_A$. Второе уравнение (4.12) интегрируется с начальным условием $y = 0$ при $x = 0$. По формулам (4.8) найдем новые координаты точки A . На оси x найдем интервал между соседними узловыми точками кривой $y(x)$, содержащий координату x_A точки A . Линейной интерполяцией на этом интервале найдем координату y кривой $y(x)$, определенной численным интегрированием второго уравнения (4.12). Затем сдвинем кривую $y(x)$ по оси y на величину

$$U = y - y_A \quad (4.13)$$

совмещая найденную координату y с координатой y_A точки A . При этом кривая $y(x)$ касается точки A на правой опоре, и координата центра средней линии полосы равна $y_0 = -U$.

Если кривизна в центре полосы оказывается больше кривизны инструмента, то контакт полосы с инструментом смещается в точку B (фиг. 1, b), координаты которой определяются углом β и расстоянием a центра окружности с радиусом $R_1 + 1/2$ от средней точки полосы

$$x = (R_1 + 1/2) \sin \beta, \quad y = a - [U + (R_1 + 1/2) \cos \beta] \quad (4.14)$$

Уравнение средней линии полосы аппроксимируется кусочно-линейной зависимостью между соседними узловыми точками 1 и 2:

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = 1/2(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (4.15)$$

Точку B найдем из условия равенства углов β и φ между узловыми точками 1 и 2, которые определяются неравенствами

$$\beta_1 < \varphi_1, \quad \beta_2 > \varphi_2 \quad (4.16)$$

Углы β_1 и β_2 вычисляются из первого уравнения (4.14) по координатам x_1 и x_2 узлов 1 и 2. Затем находятся угол $\beta = \varphi$ и координаты x_B и y_B точки B линейной интерполяцией между точками 1 и 2, и из второго уравнения (4.14) определяется величина a . Зазор δ между инструментом и средней точкой полосы находится по формуле

$$\delta = y_B + U - (R_1 + 1/2)(1 - \cos \beta) \quad (4.17)$$

После появления зазора δ моменты и силы в сечениях полосы между точками A и B вычислим по формулам (3.7)–(3.9), а между точками O_1 и B – по формулам (3.10)–(3.12).

Выполним численное интегрирование уравнений (4.12) с использованием соотношений (4.1).

После каждого приращения нагрузки найдем зависимость между материальными координатами s_0 и эйлеровыми координатами s, x, y средней линии полосы. Вследствие деформации средней линии полосы координаты s и s_0 связаны дифференциальным соотношением

$$ds = (1 + \varepsilon_0)ds_0 \quad (4.18)$$

из которого следует зависимость между s_0 и x :

$$s_0 = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi(x)}}{1 + \varepsilon_0(x)} dx \quad (4.19)$$

Моделирование упругого изгиба полосы проведем либо до достижения предельного момента M_1^* в центре полосы, либо для заданного числа шагов приращения нагрузки по программе, в которой реализован описанный алгоритм расчета. При больших перемещениях упругий изгиб полосы дает нелинейную зависимость силы P от перемещения инструмента $U - \delta$ для безразмерных параметров процесса R_1, R_2, L, E и f .

5. Изгиб упругопластической полосы. Пластические деформации появляются в сечениях полосы, в которых изгибающий момент M превышает критическое значение M_1^* , определяемое вторым соотношением (4.2). При положительной нормальной силе N пластическая область появляется сначала в области растяжения, тогда как в области сжатия полоса остается упругой. Неравенство $\zeta_2 < -1/2$ для упругопластической границы в области сжатия полосы определяет начальную пластическую деформацию с границей $\zeta_1 < 1/2$ в области растяжения. Из второго равенства (3.17) и соотношений (4.1) получим верхнюю границу для момента, соответствующего начальной пластической деформации. Таким образом, начальная пластическая деформация в области растяжения полосы появляется для значений момента в интервале

$$(1 - N)/6 < M < (1 + N)/6 \quad (5.1)$$

Вычисляя интегралы (3.13) для напряжения σ , определяемого в упругой области $-1/2 \leq \zeta \leq \zeta_1$ соотношениями (3.14) и (3.15) и в пластической области $\zeta_1 < \zeta \leq +1/2$ соотношениями (3.14) и (3.16), получим выражения для момента M и силы N в виде

$$M = \frac{E\chi}{24}(1 + 3\zeta_1 - 4\zeta_1^3) + C\chi^n(1/2 - \zeta_1)^{n+1} \left(\frac{1/2 - \zeta_1}{n+2} + \frac{\zeta_1}{n+1} \right) \quad (5.2)$$

$$N = 1 - \frac{1}{2}E\chi(1/2 + \zeta_1)^2 + \frac{C\chi^n}{n+1}(1/2 - \zeta_1)^{n+1} \quad (5.3)$$

которые содержат неизвестные ζ_1 и χ при заданных значениях M и N . Исключая χ и χ^n из системы уравнений (5.2), (5.3), получим нелинейное уравнение для упругопластической границы ζ_1 в области растяжения

$$(N - 1)b_1 - Ma_1 - (Ma_2 - (N - 1)b_2)^n(b_1a_2 - a_1b_2)^{n-1} = 0 \quad (5.4)$$

$$a_1 = -1/2E(1/2 + \zeta_1)^2, \quad a_2 = \frac{C}{n+1}(1/2 - \zeta_1)^{n+1}, \quad (5.5)$$

$$b_1 = \frac{E}{24}(1 + 3\zeta_1 - 4\zeta_1^3), \quad b_2 = C(1/2 - \zeta_1)^{n+1} \left(\frac{1/2 - \zeta_1}{n+2} + \frac{\zeta_1}{n+1} \right)$$

Для определения границы ζ_1 уравнение (5.4) решим методом Ньютона. Если на предыдущем шаге нагружения в рассматриваемом сечении полоса была упругой, то примем начальное приближение $\zeta_1 = 0.48$. В противном случае за начальное приближение возьмем значение ζ_1 , найденное на предыдущем шаге нагружения. Уравнение (5.4) решается с точностью 10^{-4} за несколько итераций. После расчета ζ_1 определим кривизну χ , и из первого уравнения (3.17) – деформацию ε_0 средней линии полосы в рассматриваемом сечении

$$\chi = [(N-1)b_2 - Ma_2]/(a_1b_2 - b_1a_2) \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_0 = 1/E - \chi\zeta_1 \quad (5.7)$$

Используем их при численном интегрировании уравнений (4.12). Коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 , b_2 в уравнении (5.6) приведены в (5.5).

Если в рассматриваемом сечении полосы момент превышает верхнее значение интервала (5.1), то пластическая деформация появляется в зонах растяжения и сжатия полосы. В средней части толщины полосы остается упругий слой между границами ζ_1 и ζ_2 . Интегрирование уравнений (3.13) с использованием соотношений (3.14)–(3.16) в упругой и пластической зонах приводит к нелинейной системе уравнений для упругопластических границ ζ_1 и ζ_2 :

$$M = \frac{1}{6}(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \zeta_1^2 - \zeta_2^2\right) + C\chi^n \left(\frac{\zeta_1^{n+2} + \zeta_2^{n+2}}{n+2} + \frac{\zeta_1\zeta_2^{n+1} - \zeta_2\zeta_1^{n+1}}{n+1} \right) \quad (5.8)$$

$$N = -(\zeta_1 + \zeta_2) + C\chi^n \frac{\zeta_1^{n+1} - \zeta_2^{n+1}}{n+1} \quad (5.9)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} - \zeta_1, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} + \zeta_2, \quad \chi = \frac{2}{E(\zeta_1 - \zeta_2)} \quad (5.10)$$

Систему уравнений (5.8), (5.9) при заданных значениях момента M и силы N и параметрах упрочнения материала C и n решим численным методом Бroyдена [11] с использованием вычислительных процедур, приведенных в [12]. Уравнения (5.8), (5.9) решаются за несколько итераций практически мгновенно при максимальной разности левой и правой частей 10^{-3} . После этого из третьего соотношения (5.10) определяется кривизна χ , а из второго соотношения (3.18) – деформация ε_0 средней линии полосы, которые затем используются для численного интегрирования уравнений (4.12) и определения формы полосы по описанному в п. 4 алгоритму.

Для упруго идеально пластической полосы ($C = 0$) уравнения (5.8) и (5.9) имеют точное решение

$$\zeta_1 = 1/2(h_e - N), \quad \zeta_2 = -1/2(h_e + N), \quad h_e = \sqrt{3(1 - N^2 - 4M)} \quad (5.11)$$

при условии

$$M \leq (1 - N^2)/4 \quad (5.12)$$

Неравенство (5.12) определяет предельное значение момента, при котором появляется пластический шарнир в случае нулевой толщины упругого слоя h_e . При $h_e > 0$ кривизну и деформацию средней линии полосы в рассматриваемом сечении найдем из соотношений

$$\chi = 2/(Eh_e), \quad \varepsilon_0 = N/(Eh_e) \quad (5.13)$$

В процессе упругой разгрузки остаточная кривизна средней линии полосы определяется следующим образом:

$$\chi_0 = \chi - 12M/E \quad (5.14)$$

где χ и M – известные значения кривизны и изгибающего момента в точках средней линии полосы в конце изгиба. Форму полосы после разгрузки определим интегрированием уравнений (4.12) с заменой χ на χ_0 . Угол пружинения полосы после разгрузки равен разности углов наклона прямолинейной части полосы справа от опоры A в конце изгиба и после разгрузки полосы:

$$\alpha_n = \alpha_A - \alpha_{A0} \quad (5.15)$$

Распределение остаточных нормальных напряжений по толщине в сечениях полосы, нормальных к средней линии, определяется выражением

$$\sigma_0 = \sigma - (N + 12M\zeta), \quad -1/2 \leq \zeta \leq +1/2 \quad (5.16)$$

где N и M – нормальная сила и момент в конце изгиба полосы, σ – нормальные напряжения, рассчитываемые по формулам (3.14)–(3.16) также в конце изгиба полосы.

6. Изгиб жесткопластической полосы. При низком значении напряжения текучести полосы и малом радиусе центрального инструмента толщина упругого слоя, определяемая третьим соотношением (3.17), мала. В этом случае процесс изгиба полосы с удовлетворительной для практических целей точностью можно описать с помощью жесткопластической модели материала полосы.

При изгибе тонколистовых деталей из мягкой стали с большими радиусами кривизны на практике для уменьшения пружинения и остаточных напряжений применяют процессы изгиба с натяжением концов полосы. Поэтому при моделировании изгиба жесткопластической полосы вводит дополнительный параметр задачи – натяжение концов полосы нормальной силой $N_0 < 1$.

В процессе изгиба жесткопластической полосы круговым инструментом отрезок полосы справа от точки контакта B (фиг. 1) остается прямолинейным с углом наклона α , так как на этом отрезке изгибающий момент меньше предельного значения, соответствующего переходу в пластическое состояние материала по всей толщине полосы. Из условий равновесия прямолинейной части полосы момент и нормальная сила в точке B определяются выражениями

$$M = R_A AB, \quad N = N_0 + f R_A \quad (6.1)$$

где AB – длина отрезка прямолинейной части полосы между точками контакта A и B с инструментом, а R_A – нормальная реакция в точке A .

На дуге контакта полосы с центральным инструментом момент и нормальная сила постоянны, поперечная сила равна нулю, полоса находится в пластическом состоянии и имеет постоянную кривизну $\chi = 1/(R_1 + 1/2)$. Нормальная реакция в точке B образует пару сил с реакцией R_A . Равномерно распределенное давление на центральный инструмент определяется формулой (3.4). Сила P , приложенная к инструменту, следует из условия равновесия

$$P = 2[R_A(\cos \alpha + f \sin \alpha) + N_0 \sin \alpha] \quad (6.2)$$

Обозначим через ξ координату нейтральной линии криволинейной части полосы, на которой нормальное напряжение меняет знак. Момент и нормальную силу в этой части полосы найдем интегрированием выражений (3.13) с использованием (3.14) и (3.16):

$$M = \frac{1}{4} - \xi^2 + C\chi^n \left[\frac{\eta_1^{n+2} + \eta_2^{n+2}}{n+2} + \frac{\xi(\eta_1^{n+1} - \eta_2^{n+1})}{n+1} \right] \quad (6.3)$$

$$N = -2\xi + \frac{C}{n+1} \chi^n [\eta_1^{n+1} - \eta_2^{n+1}] \quad (6.4)$$

$$\eta_1 = 1/2 - \xi, \quad \eta_2 = 1/2 + \xi \quad (6.5)$$

Длина AB и перемещение инструмента U связаны с углом α геометрическими соотношениями

$$AB \cos \alpha + (1 + R_1 + R_2) \sin \alpha = L \quad (6.6)$$

$$U = AB \sin \alpha + (1 + R_1 + R_2)(1 - \cos \alpha) \quad (6.7)$$

которые определяют форму полосы в параметрическом виде в зависимости от угла α . Обозначим через $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ правые части уравнений (6.3) и (6.4), зависящие от неизвестной переменной ξ . Равенство моментов и нормальных сил, рассчитываемых по соотношениям (6.1), (6.3), (6.4) и (6.5), приводит к системе двух уравнений относительно неизвестных R_A и ξ . При этом реакция R_A связана с переменной ξ соотношением, следующим из условия равенства моментов

$$R_A AB(\alpha) = F_1(\xi) \quad (6.8)$$

причем длина AB находится из уравнения (6.6) при заданном α . Исключая R_A из второго уравнения (6.1) с помощью (6.8) и приравнявая правые части выражений (6.1) и (6.4) для нормальной силы, получим нелинейное уравнение для ξ :

$$AB(\alpha)[N_0 - F_2(\xi)] + f F_1(\xi) = 0 \quad (6.9)$$

Для идеально пластического материала ($C = 0$) уравнение (6.9) имеет точное решение

$$\xi = -1/2 N_0 \quad \text{при} \quad f = 0 \quad (6.10)$$

$$\xi = \frac{1}{\lambda} [1 - \sqrt{1 + \lambda(N_0 + \lambda/4)}], \quad \lambda = \frac{f}{AB(\alpha)} \quad \text{при} \quad f > 0 \quad (6.11)$$

Для упрочняющегося материала ($C > 0$) уравнение (6.9) при заданном угле изгиба α решим методом Ньютона с точностью 10^{-4} с начальным приближением $\xi = 0$. Затем из уравнения (6.8) найдем реакцию R_A , а из уравнения (6.2) — силу P в зависимости от угла α .

Начальный угол α_0 определяется из соотношения (4.6) для предельного изгибающего момента (5.12), соответствующего появлению пластического шарнира в центре полосы. Задаем конечный угол $\alpha^* < 1/2\pi$ как параметр моделируемого процесса изгиба. Расчеты по приведенным выше формулам для возрастающей последовательности углов из интервала $\alpha_0 < \alpha < \alpha^*$ описывают процесс изгиба жесткопластической полосы при перемещении инструмента на величину $U(\alpha^*)$. Таким образом, задача изгиба жесткопластической полосы является кинематически определимой, так как форма полосы определяется формой и перемещением инструмента, а силы, действующие на инструмент, — предельным моментом и нормальной силой при пластической деформации по всей толщине полосы.

Кривизну и деформацию криволинейной части средней линии полосы после упругой разгрузки можно найти по формулам

$$\chi_0 = \chi - 12M/E, \quad \varepsilon_0 = \chi\xi - N/E \quad (6.12)$$

где χ — кривизна полосы при нагрузке, а величины ξ , M и N определяются по приведенным выше формулам в конце изгиба полосы на угол α^* . Остаточные напряжения в кри-

волинейной части полосы определяются так же, как и при изгибе упругопластической полосы. Криволинейная часть средней линии полосы после разгрузки является дугой окружности, радиус которой равен $R_0 = 1/\chi_0$. Угол наклона прямолинейной части полосы после разгрузки найдем из условия равенства длины дуги криволинейной части средней линии полосы в конце изгиба на угол α^* и после разгрузки по второму соотношению (6.12) с учетом изменения деформации средней линии

$$\alpha_0 = \alpha^* \left(1 - \frac{N}{E}\right) \frac{\chi}{\chi_0} \quad (6.13)$$

Разность углов α^* и α_0 представляет угол пружинения после разгрузки полосы, который с использованием приведенных соотношений для χ и χ_0 принимает вид

$$\alpha_n = \frac{\alpha^*}{E} \left[N + 12M \left(R_1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{N}{E} \right) \right] \quad (6.14)$$

Для идеально пластической полосы момент M определяется предельным соотношением (5.12), и соотношение (6.14) принимает вид

$$\alpha_n = \frac{\alpha^*}{E} \left[N + 3(1 - N^2) \left(R_1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{N}{E} \right) \right] \quad (6.15)$$

При отсутствии натяжения $N = 0$ и максимальном натяжении $N = 1$ идеально пластической полосы из (6.15) получим максимальное и минимальное значения углов пружинения

$$(\alpha_n)_{\max} = 3 \frac{\alpha^*}{E} \left(R_1 + \frac{1}{2} \right) \quad \text{и} \quad (\alpha_n)_{\min} = \frac{\alpha^*}{E} \quad (6.16)$$

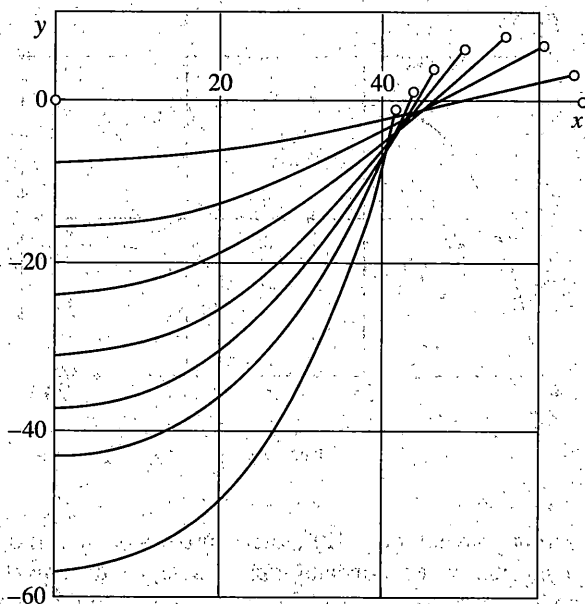
Соотношения (6.16) показывают, что основными параметрами, влияющими на относительный угол пружинения α_n/α^* , являются отношение модуля упругости к пределу текучести материала полосы и отношение радиуса изгиба к толщине полосы. Натяжение концов полосы снижает угол пружинения пропорционально множителю $3(R_1 + 1/2)$.

7. Численные результаты. Для расчетов процесса изгиба тонкой полосы написаны три варианта программы для ПЭВМ – для упругой, упругопластической и жесткопластической полосы. Они выдают результаты расчетов формы полосы и зависимости силы от перемещения инструмента в виде графиков и таблиц. Решение одного варианта задачи на ПЭВМ Pentium – 133 для 100 шагов приращения нагрузки и 100 узловых точек по длине полосы занимает менее 1 с.

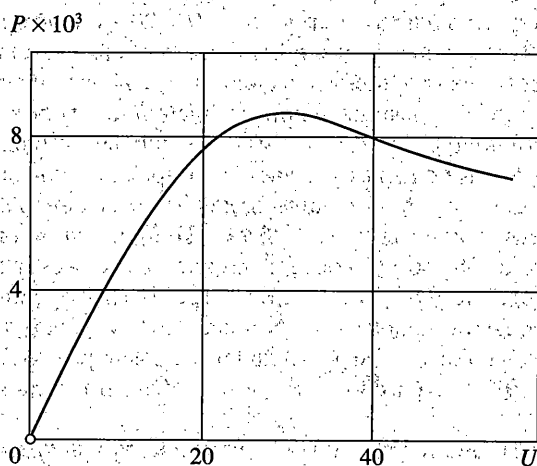
7.1. Изгиб упругой полосы. Упругий изгиб полосы из материала с высоким пределом текучести может происходить при больших перемещениях инструмента. В этом случае расчетная программа моделирует пружину с нелинейной жесткостью, зависящей от параметров задачи.

На фиг. 2 показано изменение формы средней линии упругой полосы при конечном перемещении инструмента $U = 57.35$ и угле поворота свободного конца полосы $\alpha = 1.277$ для отношения модуля упругости к пределу текучести $E = 100$ и параметров процесса $L = 50$, $L_0 = 65$, $R_1 = 20$, $R_2 = 10$, $f = 0.1$. Кривизна в центре полосы в ее конечном положении почти совпадает с кривизной инструмента. Светлыми кружками показаны положения конца полосы, соответствующие углам поворота свободного конца $\alpha = 0, 0.235, 0.483, 0.694, 0.879, 1.000, 1.105, 1.277$.

На фиг. 3 показана зависимость силы P от перемещения инструмента U для приведенного процесса изгиба упругой полосы, которая имеет максимум $P = 8.53 \cdot 10^{-3}$ при $U = 30$ и $\alpha = 0.840$. При дальнейшем увеличении угла α и перемещения U сила P уменьшается

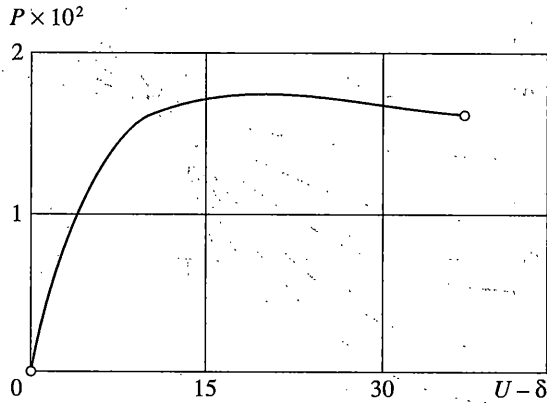


Фиг. 2



Фиг. 3

в соответствии с соотношением (3.5), но реакция R_A и изгибающие моменты продолжают увеличиваться. Поэтому в расчётах процесса изгиба нагружение полосы задавалось малыми шагами приращения реакции R_A , а сила P находилась из соотношения (3.5). Нагружение полосы может продолжаться, когда сила P снижается до нуля при обращении в нуль выражения в скобках в соотношении (3.5). Из него следует предельное значение угла поворота полосы α^* , зависящее от коэффициента трения f при отсутствии натяжения или прижима полосы. Когда угол α приближается к предельному значению, происходит быстрый рост перемещения U при малых приращениях реакции R_A , и процесс чис-



Фиг. 4

ленного интегрирования уравнений (4.12) оказывается неудовлетворительным. Поэтому расчеты процесса изгиба полосы ограничивались неравенством $\alpha < \alpha^*$.

7.2. Изгиб упругопластической полосы. На фиг. 1 показан пример изгиба упругопластической упрочняющейся полосы с параметрами $E = 300$, $C = 2$, $n = 0.3$ для углеродистой стали с пределом текучести $\sigma_s = 650 \text{ Н/мм}^2$. Остальные параметры задачи совпадают с приведенными выше параметрами для изгиба упругой полосы.

При перемещении центрального инструмента $U = 20.2$ с углом поворота свободного конца $\alpha = 0.533$ (фиг. 1, а) кривизна в центре полосы совпадает с кривизной инструмента. Толщина упругого слоя в центре полосы равна 0.133. Упругопластическая область распространяется примерно до середины длины средней линии полосы $s = 25.6$. На остальной нагруженной части полосы кривизна близка к нулю. При дальнейшем перемещении инструмента средняя часть полосы отрывается от границы контакта с инструментом. На фиг. 1, б показана конечная форма полосы для перемещения инструмента $U = 42.4$ с зазором $\delta = 1.86$ в центре полосы при $\alpha = 0.945$. Толщина упругого слоя и кривизна в центре полосы равны 0.058 и 0.115 соответственно. Точка контакта B с центральным инструментом смещается на угол $\beta = 0.636$. В центре состояние полосы близко к пластическому шарниру с большой кривизной, тогда как между точками контакта A и B кривизна полосы очень мала. После разгрузки кривизна в центре полосы и угол α уменьшаются до значений 0.098 и 0.465 соответственно. Угол пружинения после разгрузки равен 0.48.

По сравнению с изгибом упругой полосы основное изменение кривизны упругопластической полосы в конце нагружения происходит в окрестности контакта с центральным инструментом. После разгрузки большая часть полосы оказывается прямолинейной с небольшим кривилинейным участком в ее центре. Изгиб упрочняющейся упругопластической полосы для приведенных параметров процесса без прижима или натяжения полосы приводит к большому пружинению полосы после упругой разгрузки.

На фиг. 4 показана зависимость силы P от перемещения инструмента $U - \delta$ для изгиба упругопластической упрочняющейся полосы с параметрами $E = 500$, $C = 3$, $n = 0.3$, $L = 50$, $L_0 = 65$, $R_1 = 20$, $R_2 = 10$, $f = 0.1$. В начале процесса изгиба эта зависимость близка к зависимости для упругой полосы, но при распространении пластических деформаций по толщине полосы возрастание силы P быстро замедляется. Эта зависимость также имеет максимум, но величина силы P выше, а ее снижение после прохождения точки максимума значительно меньше, чем для упругой полосы.

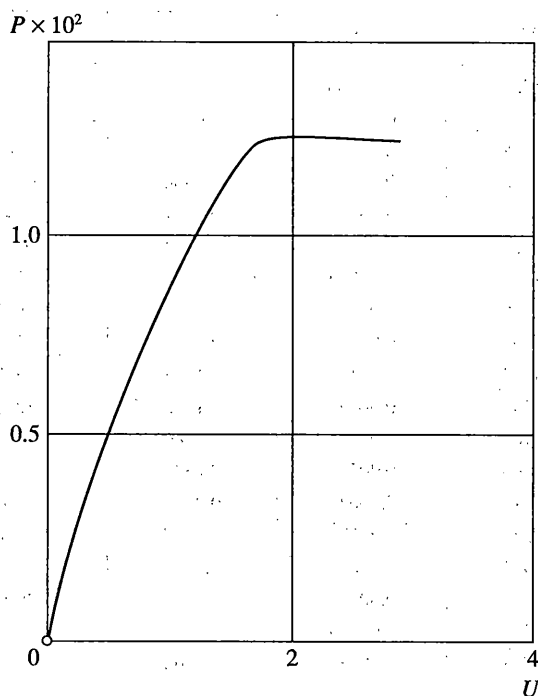
s_0	M	$-N$	ζ_1	$-\zeta_2$	χ
0	0.5058	0.00606	0.0237	0.0183	0.0953
1.65	0.4918	0.00515	0.0273	0.0226	0.0802
3.31	0.4768	0.00435	0.0322	0.0281	0.0663
4.99	0.4610	0.00366	0.0388	0.0354	0.0539
6.66	0.4444	0.00309	0.0471	0.0441	0.0439
8.34	0.4273	0.00262	0.0594	0.0567	0.0344
10.02	0.4096	0.00223	0.0767	0.0745	0.0265
11.70	0.3916	0.00196	0.0970	0.0951	0.0208
13.37	0.3731	0.00166	0.1220	0.1204	0.0165
15.87	0.3544	0.00144	0.1503	0.1489	0.0121
17.54	0.3355	0.00126	0.1835	0.1823	0.0099
19.20	0.3163	0.00110	0.2186	0.2175	0.0085
20.86	0.2969	0.00096	0.2547	0.2537	0.0073
22.52	0.2773	0.00084	0.2911	0.2903	0.0065
24.18	0.2576	0.00072	0.3277	0.3270	0.0058
25.84	0.2377	0.00062	0.3643	0.3637	0.0052
27.50	0.2177	0.00052	0.4011	0.4006	0.0048
29.15	0.1976	0.00044	0.4383	0.4379	0.0044
30.81	0.1773	0.00036	0.4765	0.4762	0.0040

В таблице показаны изменения момента M , нормальной силы N , координат ζ_1 , ζ_2 упругопластических границ и кривизны χ в средней части полосы в зависимости от материальной координаты s_0 для приведенного на фиг. 4 примера изгиба. Из таблицы видно, что в средней части полосы при $s_0 < 10$ толщина упругого слоя мала, величина изгибающего момента меняется незначительно. При удалении от этой зоны толщина упругого слоя быстро возрастает, а кривизна и изгибающий момент быстро снижаются. На всей длине упругопластической зоны полосы сила N отрицательна и максимальна по модулю в центральной части полосы.

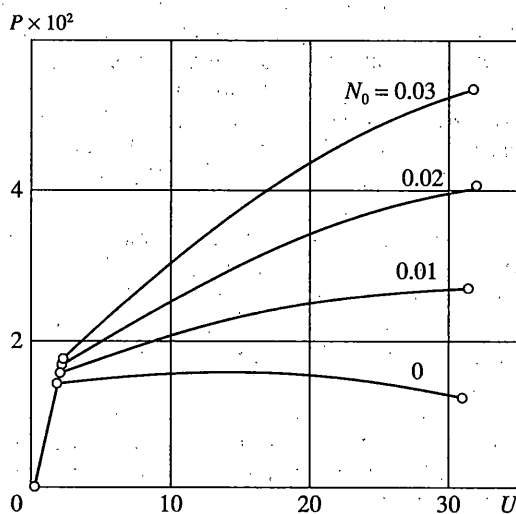
На фиг. 5 показана зависимость силы P от перемещения инструмента U при изгибе упруго идеально пластической полосы без упрочнения для материала с низким пределом текучести ($E = 1000$) для параметров процесса $L = 40$, $L_0 = 65$, $R_1 = 10$, $R_2 = 10$, $f = 0.1$. В этом примере при перемещении $U < 1.48$ происходит практически упругий изгиб в области малых пластических деформаций. При $U > 1.48$ момент в центре полосы приближается к предельному значению $M^* = 0.25$, толщина упругого слоя в центре полосы быстро снижается и образуется пластический шарнир, которому соответствует почти горизонтальный участок кривой. Расчет остановлен при перемещении $U = 2.79$ и максимальной силе $P = 1.277 \cdot 10^{-2}$. В этом положении толщина упругого слоя в центре полосы равна 0.02, момент равен предельному значению, и $\alpha = 0.105$. В центре полосы ее кривизна равна кривизне инструмента. На небольшом удалении от центра кривизна снижается на порядок и форма полосы практически прямолинейна.

Таким образом, изгиб полосы с низким пределом текучести возможен только с применением прижима или натяжения концов и может быть рассчитан по жесткопластической модели материала полосы.

7.3. Изгиб жесткопластической полосы. На фиг. 6 показаны зависимости силы P от перемещения инструмента U для изгиба жесткопластической полосы с линейным упрочнением $C = 2$, $n = 1$ для параметров процесса $L = 40$, $L_0 = 65$, $R_1 = 10$, $R_2 = 10$, $f = 0.1$ при изгибе на угол $\alpha = \pi/4$, которому соответствует перемещение инструмента $U = 31.3$.



Фиг. 5



Фиг. 6

На прямолинейных концах полосы приложены силы натяжения $N_0 = 0, 0.01, 0.02, 0.03$. В приведенном примере пластический шарнир в центре полосы образуется для упругого перемещения $U_0 = 2.365$, которое вычисляется по формуле (4.6) для предельного момента (5.12).

При отсутствии натяжения N_0 положительная сила N на криволинейном участке полосы создается силой трения в точке опоры полосы на правой круговой границе инструмента. Для коэффициента трения $f = 0.1$ и $N_0 = 0$ распределенное давление на централь-

ный инструмент имеет очень малую величину $q = 7 \cdot 10^{-5}$. На фиг. 6 случаю $N_0 = 0$ соответствует нижняя пологая кривая при $P_{\max} = 1.483 \cdot 10^{-2}$ и $P = 1.163 \cdot 10^{-2}$ в конце изгиба полосы. Приложение к концу полосы указанных выше сил натяжения приводит к увеличению давления q до значений $1.02 \cdot 10^{-3}$, $1.98 \cdot 10^{-3}$, $2.93 \cdot 10^{-3}$ и к увеличению силы P в конце изгиба полосы до значений $2.577 \cdot 10^{-2}$, $3.991 \cdot 10^{-2}$, $5.405 \cdot 10^{-2}$. Для всех величин натяжения полосы угол пружинения равен $2.361 \cdot 10^{-2}$. Небольшое натяжение приводит к гарантированному прижиму полосы к инструменту, но усилие изгиба существенно увеличивается.

8. Заключение. Моделирование изгиба тонкой полосы круговым инструментом показывает существенное влияние механических свойств материала полосы на процесс изгиба и пружинения после разгрузки. При высоком значении напряжения текучести или малом относительном значении модуля упругости материала полосы упругая стадия изгиба может быть значительной без пластических деформаций и изменения формы полосы после разгрузки. Аналогичный эффект получается при изгибе упругопластической полосы для среднего значения напряжения текучести, но при интенсивном пластическом упрочнении. В этом случае в процессе разгрузки возникает большой угол пружинения, снижающий конечный угол изгиба полосы.

При изгибе упругопластической полосы с низким напряжением текучести и незначительном упрочнении в середине полосы появляется пластический шарнир для сравнительно небольшого перемещения инструмента. Полоса превращается в шарнирный механизм с сосредоточенной пластической деформацией в ее середине и практически прямолинейными концами. Изгиб такой полосы на заданный радиус кривизны возможен только с применением прижима или натяжения, создающего плотный контакт деформируемой части полосы с инструментом. В этом случае представляется целесообразным расчет процесса изгиба по модели жесткопластического материала полосы.

Разработанные программы для расчета изгиба упругой, упругопластической и жесткопластической полосы позволяют анализировать влияние как механических свойств, так и геометрических параметров технологических операций изгиба и представляют подробную информацию об изменении формы полосы, силы, напряжений и деформаций при изгибе и после разгрузки в виде графиков и таблиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романовский В.П. Справочник по холодной штамповке. М.: Машиностроение, 1979. 520 с.
2. Мецгерин В.Т. Листовая штамповка. Атлас схем. М.: Машиностроение, 1975. 227 с.
3. Мошин Е.Н. Гибочные и правильные машины. М.: Машгиз, 1956. 252 с.
4. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
5. Johnson W., Mellor P.B. Engineering Plasticity. L.: Van Nostrand Reinhold, 1975. = Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
7. Yang M., Shima S. Simulation of pyramid type three-roll bending process // Intern. J. Mech. Sci. 1988. V. 30. № 12. P. 877–886.
8. Oh S.I., Kobayashi S. Finite element analysis of plane strain sheet bending // Intern. J. Mech. Sci. 1980. V. 22. № 9. P. 583–594.
9. Makinouchi A. Elastic-plastic stress analysis of U-bend process of sheet metal // Adv. Technol. of Plasticity. 1984. V. 1. P. 672–677.
10. Yu T.X., Stronge W.J., Johnson W. Stamping and springback of plate between cylindrical dies // Adv. Technol. of Plasticity. 1984. V. 1. P. 599–604.
11. Broyden C.G. A class methods for solving nonlinear simultaneous equations // Math. Comput. 1965. V. 19. № 92. P. 577–593.
12. Dennis J.E., Shnabel R.B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983. 378 p.