МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2007

УДК 539.374

© 2007 г. Л.А. МАКСИМОВА

ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СОСТОЯНИЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

В работе рассматриваются линеаризированные статически определимые соотношения теории идеальной пластичности в случае, когда условие полной пластичности не имеет место. Исследуется тип рассматриваемых уравнений. Отметим, что линеаризированные уравнения при условии полной пластичности рассматривались в [1–3].

1. Известно [4, 5], что уравнения статически неопределимых соотношений теории идеальной пластичности принадлежат к эллиптическому типу.

Уравнения статически определимых соотношений теории идеальной пластичности при условии полной пластичности принадлежат к гиперболическому типу [6]. Вопрос об определении типа уравнений теории идеальной пластичности в общем случае статически определимых соотношений нуждается в исследовании.

Известно [7], что статически определимые соотношения теории идеальной пластичности для изотропного тела сводятся к условию полной пластичности. В общем случае статически определимые соотношения теории идеальной пластичности определяют поведение анизотропной среды.

Рассмотрим линеаризированные уравнения для некоторых статически определимых состояний теории идеальной пластичности, когда условие полной пластичности не имеет место.

Соотношения связи между главными компонентами напряжений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и компонентами напряжений σ_x, τ_{xy}, … в декартовой системе координат xyz имеют вид

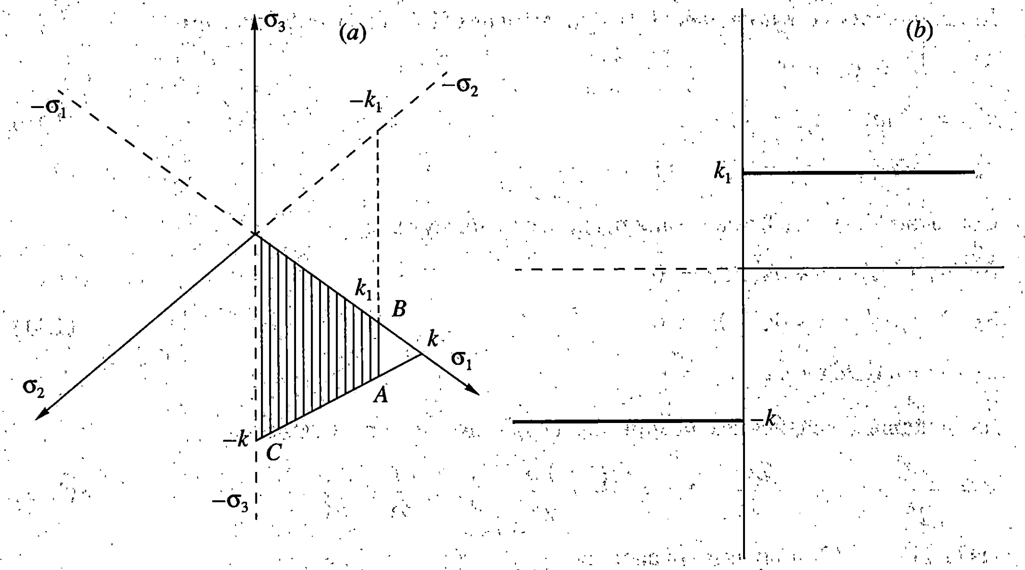
$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \ (x\ y\ z) \\ &\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \ (1\ 2\ 3) \\ &\left.\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \end{aligned}\right. \ (l\ m\ n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы, определяющие взаимную ориентацию главных направлений 1, 2, 3, и осей координат xyz.

Из (1.1) будем иметь

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_1 - \Sigma m_1^2 - \mathrm{T} n_1^2, \quad \tau_{xy} = -\Sigma m_1 m_2 - \mathrm{T} n_1 n_2 \\ &\Sigma = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \mathrm{T} = \sigma_1 - \sigma_3 \ (x\ y\ z)(1\ 2\ 3) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ &m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$



В дальнейшем положим

$$\Sigma = \kappa_1, \quad T = \kappa \ (\kappa, \kappa_1 - \mathrm{const}) \ \kappa > \kappa_1 \tag{1.4}$$

Условия предельного равновесия (1.4) определяют в девиаторной плоскости многоугольник, фрагмент которого изображается ломаной *BAC* (фиг. 1, *а*). Пределы текучести идеально пластического материала при предельных условиях (1.4) при растяжении – сжатии не совпадают (фиг. 1, *в*).

Согласно (1.4), условие полной пластичности будет иметь место в двух случаях:

$$\kappa_1 = \kappa \ \sigma_1 - \sigma_3 = \kappa, \quad \sigma_2 = \sigma_3 \tag{1.5}$$

$$\kappa_1 = 0 \ \sigma_1 - \sigma_3 = \kappa, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \tag{1.6}$$

Припишем компонентам невозмущенного состояния индекс градус наверху, компонентам возмущенного состояния – индекс "штрих" наверху $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}'$.

Предположим, что главные компоненты напряжения направлены вдоль осей *xyz*:

$$\begin{gathered}
\sigma_1^0 = \sigma_x^0, \quad l_1^0 = 1, \quad l_2^0 = l_3^0 = 0 \\
\sigma_2^0 = \sigma_y^0, \quad m_2^0 = 1, \quad m_1^0 = m_3^0 = 0 \\
\sigma_3^0 = \sigma_z^0, \quad n_3^0 = 1, \quad n_1^0 = n_2^0 = 0 \\
\tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xz}^0 = 0
\end{gathered} \tag{1.7}$$

В дальнейшем обозначим $\sigma_1 = \nu$, из (1.2) получим

$$\nu = \sigma + 1/3(\Sigma + T), \quad \sigma = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.8}$$

Линеаризируя соотношения (1.3), при условиях (1.7), имеем

$$m_2' = 0, \quad n_3' = 0, \quad n_2' + m_3' = 0 \tag{1.9}$$

Линеаризируя соотношения (1.2), при условиях (1.4), (1.7), (1.9), найдем

$$\begin{aligned} &\sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = \nu' \\ &\tau'_{xy} = -\Sigma m'_1, \quad \tau'_{xz} = -\mathrm{T} n'_1 \\ &\tau'_{yz} = -\Sigma m_3 - \mathrm{T} n'_2 = (\Sigma - \mathrm{T}) n'_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Согласно (1.7), (1.10) уравнения равновесия примут вид

$$\begin{aligned} &\partial\nu'/\partial x + \partial\tau'_{xy}/\partial y + \partial\tau'_{xz}/\partial z = 0 \\ &\partial\nu'/\partial y + \partial\tau'_{xy}/\partial x + \partial\tau'_{yz}/\partial z = 0 \\ &\partial\nu'/\partial z + \partial\tau'_{xz}/\partial x + \partial\tau'_{yz}/\partial y = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Двум первым уравнениям равновесия (1.11) удовлетворим, полагая

$$\nu = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \tau'_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau'_{xz} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau'_{yz} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) получим уравнение

$$\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 - \partial^2 U/\partial z^2 + 2\partial^2 \Phi/\partial x \partial y = 0 \tag{1.13}$$

Предельное состояние при условиях пластичности (1.4) не является статически определимым. Для достижения статически определимого состояния к условиям (1.4) следует присоединить условие предельного состояния

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.14}$$

Линеаризируя условие пластичности (1.14), при условиях (1.10), получим

$$A\tau'_{yz} + B\tau'_{xz} + C\tau'_{xy} + D\nu' = 0 \ (A, B, C, D - \mathrm{const}) \tag{1.15}$$

Соотношение (1.15) может быть получено, если условие предельного состояния определено в виде

$$\begin{aligned} &A\tau_{yz} + B\tau_{xz} + C\tau_{xy} + F\sigma_x + G\sigma_y + H\sigma_z + M\sigma = \kappa \\ &D = F + G + H + M \ (\kappa - \mathrm{const}) \end{aligned}$$

Из (1.12), (1.15) будем иметь

$$A\frac{\partial U}{\partial y} + B\frac{\partial U}{\partial x} - D\frac{\partial U}{\partial z} = C\frac{\partial \Phi}{\partial z} - A\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{1.16}$$

Из (1.13), (1.16) найдем

$$\begin{aligned} &\left(A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} - C\frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta U - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(A\frac{\partial}{\partial y} + B\frac{\partial}{\partial x} - D\frac{\partial}{\partial z}\right)U = 0 \\ &\Delta U = \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 - \partial^2 U/\partial z^2 = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Согласно (1.17), для определения функции U имеет место дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка.

2. Рассмотрим частные случаи. При условии полной пластичности $\Sigma = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$, согласно (1.10), (1.12) имеет место

$$\tau'_{xy} = 0, \quad \Phi = 0 \tag{2.1}$$

Согласно (1.13), (2.1), уравнения (1.13), (1.17), при условии полной пластичности, переходят в волновое уравнение, полученное в [1].

Предположим, что

$$A = B = 0 \tag{2.2}$$

Из (1.17), (2.2) найдем

$$\Delta U + \lambda \partial^2 U / \partial x \partial y = 0, \quad \lambda = 2D/C \tag{2.3}$$

Предположим, что

$$B = C = 0 \tag{2.4}$$

Из (1.17), (2.4) найдем

$$\Delta U - 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right) = 0, \quad \lambda_1 = D/A \tag{2.5}$$

Аналогично при $A = C = 0$, имеет место

$$\Delta U - 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right) = 0, \quad \lambda_2 = D/B \tag{2.6}$$

Предположим, что

$$A = B, \quad C = D \tag{2.7}$$

Из (1.17), (2.7) найдем

$$\Delta U - 2\partial^2 U / \partial x \partial y = 0 \tag{2.8}$$

Таким образом, при предположениях (2.2), (2.4), (2.7), уравнение третьего порядка (1.17) переходит в уравнение второго порядка (2.3), (2.5), (2.8).

3. Решение уравнения (1.17) будем искать в виде

$$U = U(\xi), \quad \xi = ax + by + cz \ (a, b, c - \text{const}) \tag{3.1}$$

Тогда из (1.17), (3.1) получим

$$(Aa + Bb - Cc)(a^2 + b^2 - c^2) - (Ab + Ba - Dc)(2ab) = 0 \tag{3.2}$$

Из (3.2) следуют уравнения

$$a^3 A - a^2(bB + cC) - a(b^2 A + c^2 A - 2bcD) + (b^2 - c^2)(bB - cC) = 0 \tag{3.3}$$

$$b^3 B - b^2(aA + cC) - b(a^2 B + c^2 B - 2acD) + (a^2 - c^2)(aA - cC) = 0 \tag{3.4}$$

$$c^3 C - c^2(aA - bB) - c(a^2 C + b^2 C - 2abD) + (b^2 - a^2)(bB - aA) = 0 \tag{3.5}$$

Алгебраические уравнения третьей степени (3.3), (3.4), (3.5) имеют по крайней мере один действительный корень. Действительные корни уравнений (3.3), (3.4), (3.5) соответственно обозначим a_1, b_1, c_1. Согласно (3.1), решение уравнения (1.17) можно записать в виде

$$U(\xi) = U_1(a_1x+by+cz)+U_2(ax+b_1y+cz)+U_3(ax+by+c_1z) \tag{3.6}$$

Отметим, что при

$$A = B = C \tag{3.7}$$

уравнения (3.3), (3.4), (3.5) совпадают между собой.

При $b = c$ уравнение (3.3) имеет корни

$$a_1 = 0, \quad a_{2,3} = \frac{b}{A}[(B+C)\pm\sqrt{(B+C)^2+2A(A-D)}] \tag{3.8}$$

Аналогично рассматриваются случаи $a = b$, $a = c$.

При $bB - cC = 0$ уравнение (3.3) имеет корни

$$a_1 = 0, \quad a_{2,3} = \frac{b}{AC}[BC\pm\sqrt{A^2B^2+B^2C^2+A^2C^2-2ABCD}] \tag{3.9}$$

Аналогично рассматриваются случаи $aA = bB$, $aA = cC$.

В случаях уравнений (2.3), (2.5), (2.8) получим соответственно

$$a^2+b^2-c^2+\lambda ab = 0, \quad c_{1,2} = \sqrt{a^2+b^2+\lambda ab} \tag{3.10}$$

$$a^2+b^2-c^2-2(b^2-\lambda_1 bc) = 0, \quad c_{1,2} = \lambda_1 b\pm\sqrt{(a^2+b^2)+b^2(\lambda_1-2)} \tag{3.11}$$

$$a^2+b^2-c^2-2ab = 0, \quad c_{1,2} = \pm(a-b) \tag{3.12}$$

Согласно (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) в зависимости от значений величин A, B, C, D, характеризующих вид условия пластичности (1.14), (1.15), (1.16), линеаризированные уравнения могут иметь действительные характеристики и, следовательно, принадлежать к гиперболическому типу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00584).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Об уравнениях линеаризированных пространственных задач теории идеальной пластичности // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 6. С. 1232–1235.
2. *Максимова Л.А.* О линеаризированных уравнениях пространственных течений идеально-пластических тел // ДАН РАН. 1998. Т. 385. № 6. С. 772–773.
3. *Ивлев Д.Д., Михайлова М.В.* О линеаризированных уравнениях статически определимых соотношений теории идеальной пластичности // ДАН РАН. 2003. Т. 391. № 6. С. 769–771.
4. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
5. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
6. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
7. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
15.04.2004