МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2007

УДК 531.383

© 2007 г. Г.М. РОЗЕНБЛАТ

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИСКА ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

В статье изучается задача о движении тонкого однородного диска по горизонтальной плоскости под действием сил сухого (кулонова) трения. Рассматривается радиально-симметричный закон распределения нормального давления по плоскости диска. Уравнения движения интегрируются в элементарных функциях, в результате чего получены точные формулы для пройденного диском пути и времени вплоть до остановки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим диск, представляющий собой область контакта плоского твердого тела с шероховатой плоскостью. Такого рода задача изучалась в работах [1–6]. Предполагается, что элементарная сила трения (действующая на малый элемент диска) подчиняется кулонову закону трения, т.е. пропорциональна нормальному давлению в этом элементе и прямо противоположна его вектору скорости.

В статье рассматривается радиально-симметричное распределение нормального давления по закону [7]:

$$p(\rho) = \frac{p_0}{\sqrt{1-(\rho/R)^2}}, \quad p_0 = G/(2\pi R^2) \tag{1.1}$$

где p_0 – давление в центре площадки, ρ – расстояние малого элемента до центра площадки, G – вес тела, R – радиус диска.

Требуется определить закон движения диска по плоскости под действием сил трения при произвольных начальных условиях, в частности, путь и время движения вплоть до остановки.

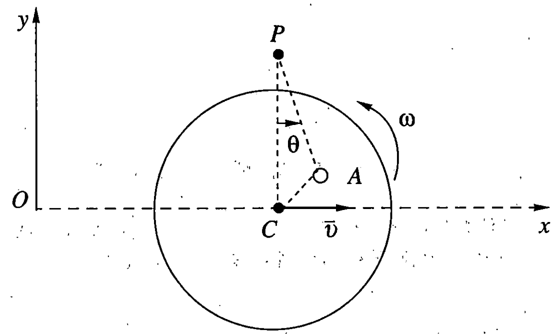
2. Уравнения движения. Пусть нормальное давление по диску распределено по закону (1.1). Эта задача рассматривалась в работе [5], где были вычислены главный вектор и главный момент сил трения, действующие на диск. В силу симметрии главный вектор сил трения направлен строго против вектора скорости центра масс диска, т.е. движение центра масс диска происходит по прямой линии.

Пусть v – скорость центра масс диска, ω – его угловая скорость (фигура). Следуя работе [5], введем безразмерный параметр $k = v/u$, где $u = \omega R$. Запишем уравнения движения диска (уравнение движения центра масс по оси x и уравнение моментов относительно центра масс):

$$m\dot{v} = -F_{\text{fr}}(k), \quad J\dot{u}/R = -M_{\text{fr}}(k) \tag{2.1}$$

где m – масса диска, J – его момент инерции относительно центра масс, $F_{\text{fr}}(k)$, $M_{\text{fr}}(k)$ – сила трения и момент сил трения относительно центра масс, которые являются функциями параметра k и даются формулами [5]:

$$F_{\text{fr}}(k) = fp_0R^2\begin{cases}\pi^2k/2, & k\in(0,1)\\ \pi k\arcsin(1/k)+\pi\sqrt{k^2-1}/k, & k\in(1,\infty)\end{cases} \tag{2.2}$$



$$M_{\text{fr}}(k) = fp_0R^3\begin{cases}(\pi^2/4)(2-k^2), & k\in(0,1)\\(\pi/2)(2-k^2)\arcsin(1/k)+(\pi/2)\sqrt{k^2-1}, & k\in(1,\infty)\end{cases} \tag{2.3}$$

где f – коэффициент трения.

Покажем, следуя [4, 5], как получены формулы (2.2), (2.3). Пусть P – мгновенный центр скоростей диска (фиг. 1), тогда

$$PC = \upsilon/\omega = R\upsilon/u = Rk, \quad PA = \rho, \quad \upsilon = \dot{x}_C, \quad \omega = \dot{\varphi}$$

Интегрирование элементарных сил трения и их моментов относительно точки P, с использованием формулы (1.1), в полярной системе координат с полюсом P, дает:

$$F_{\text{fr}}(k) = \lambda\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta\int_{q_1}^{q_2}Sdq, \quad k\in(0,1)$$

$$F_{\text{fr}}(k) = 2\lambda\int_0^{\theta^*}\cos\theta d\theta\int_{q_1}^{q_2}Sdq, \quad k\in(1,\infty)$$

$$M_{\text{fr}}(k) = -kRF_{\text{fr}}(k)+\lambda R\int_0^{\pi}d\theta\int_{q_1}^{q_2}qSdq, \quad k\in(0,1)$$

$$M_{\text{fr}}(k) = -kRF_{\text{fr}}(k)+2\lambda R\int_0^{\theta^*}d\theta\int_{q_1}^{q_2}qSdq, \quad k\in(1,\infty)$$

$$q = \rho/R$$

$$S = S(q,\theta,k) = q/\sqrt{1-(q-k\cos\theta)^2-k^2\sin^2\theta}$$

$$q_1 = k\cos\theta-\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$$

$$q_2 = k\cos\theta+\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$$

$$\lambda = fp_0R^2 = fG/(2\pi)$$

$$\theta^* = \arcsin(1/k), \quad k\geq 1$$

Приведенные интегралы, как это было показано в работе [5], вычисляются в элементарных функциях. В результате получаются выражения (2.2), (2.3). После подстановки (2.2) и (2.3) в (2.1), приходим к уравнениям:

$$\dot{\upsilon} = -ak, \quad \dot{u} = -a(2-k^2), \quad k \in (0, 1) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\upsilon} &= -\frac{2a}{\pi}\left(k\theta^* + \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\right) \\ \dot{u} &= -\frac{2a}{\pi}[(2-k^2)\theta^* + \sqrt{k^2-1}], \quad k \in (1, \infty) \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\upsilon = \dot{x}_C$, $u = \omega R$, $\omega = \dot{\varphi}$, x_C – координата центра масс диска, φ – угол его поворота, $a = \mathrm{f}g\pi/4$, $\theta^* = \arcsin(1/k)$, g – ускорение силы тяжести.

3. Формулировка результатов. При исследовании и интегрировании уравнений (2.4) и (2.5) получены следующие результаты.

3.1. Пусть $k_0 = k(0) = \upsilon(0)/(R\omega(0)) < 1$, тогда решение системы (2.4) дается соотношениями

$$\frac{4a}{c}t = \ln\frac{2\sqrt{\xi_0} + \sqrt{1+4\xi_0}}{2\sqrt{\xi} + \sqrt{1+4\xi}} + 2(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi}) \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} x_C(\xi) &= \frac{c^2\sqrt{2}}{12a}[(1+\sqrt{1+4\xi_0})^{3/2} - (1+\sqrt{1+4\xi})^{3/2}] \\ c &= \frac{Rk_0^2\omega(0)}{\sqrt{1-k_0^2}}, \quad \xi_0 = \frac{1-k_0^2}{k_0^4}, \quad \xi = \frac{\omega^2R^2}{c^2}, \quad a = fg\pi/4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

При этом функция $k(t) = \upsilon(t)/(R\omega(t))$ монотонно возрастает от значения $k(0) = k_0$ вплоть до значения $k(t_1) = 1$ в момент остановки $t = t_1$, для которого из (3.1) при $\xi(t_1) = 0$ имеет место формула

$$t_1 = \frac{R\omega_0}{2a}\left(1 + \frac{k_0^2}{\sqrt{1-k_0^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-k_0^2}}{k_0}\right) \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.2) при $\xi(t_1) = 0$ получим выражение для пройденного центром диска пути

$$L = \frac{k_0R^2\omega_0^2(1+k_0+k_0^2)}{3a(1+k_0)} \tag{3.4}$$

Отметим два предельных случая.

1°. Если $k_0 \to 0$ (т.е. $\upsilon(0) \to 0$ и нет движения центра масс диска), то из (3.3) следует, что $t_1 \to R\omega_0/(2a)$. Эта формула может быть получена и непосредственно из второго уравнения системы (2.4) при $k = 0$. Из формулы (3.4) при $k_0 \to 0$ получим $L \to 0$ (что вполне понятно при $\upsilon = 0$).

2°. Если $k_0 \to 1$, то $\xi_0 \to 0$. Из (3.3) получим, что $t_1 \to R\omega_0/a$, а из (3.4) получим, что $L \to L_1 = R^2\omega_0^2/(2a)$.

3.2. Пусть $k_0 = k(0) = \upsilon(0)/(R\omega(0)) > 1$, тогда решение уравнений (2.5) дается соотношениями:

$$\frac{2a}{\pi c}t = \frac{1}{\gamma_0 - \sin\gamma_0} - \frac{1}{\gamma - \sin\gamma} \tag{3.5}$$

$$x_C(\gamma) = \frac{\pi c^2}{a}\int_{\gamma_0}^{\gamma}\frac{\cos(\alpha/2)(1-\cos\alpha)}{(\alpha-\sin\alpha)^3}d\alpha, \quad \gamma \in (\gamma_0, \pi)$$
$$c = \frac{R\omega(0)(\gamma_0 - \sin\gamma_0)}{\sin\gamma_0}, \quad \gamma_0 = 2\arcsin(1/k_0), \quad \gamma = 2\arcsin(1/k), \quad a = fg\pi/4 \tag{3.6}$$

При этом функция $k(t) = \upsilon(t)/(R\omega(t))$ монотонно убывает от значения $k(0) = k_0$ вплоть до значения $k(t_1) = 1$ в момент остановки $t = t_1$, для которого из (3.5) при $\gamma(t_1) = \pi$ имеет место формула:

$$t_1 = \frac{k_0^2 R\omega_0}{2a\sqrt{k_0^2-1}}\left[\pi/2 - \arcsin(1/k_0) + \frac{\sqrt{k_0^2-1}}{k_0^2}\right] \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.6) при $\gamma(t_1) = \pi$ получим формулу для пройденного центром диска пути

$$L = \frac{\pi c^2}{a}\int_{\gamma_0}^{\pi}\frac{\cos(\alpha/2)(1-\cos\alpha)}{(\alpha-\sin\alpha)^3}d\alpha \tag{3.8}$$

Отметим два предельных случая.

1°. Если $k_0 \to \infty$ при фиксированной начальной скорости $\upsilon(0) = \upsilon_0$ (т.е. $\omega(0) \to 0$ и нет вращения), то из (3.7) получим

$$t_1 \to \lim_{k_0\to\infty}\frac{\upsilon_0 k_0}{2a\sqrt{k_0^2-1}}\left[\pi/2 - \arcsin(1/k_0) + \frac{\sqrt{k_0^2-1}}{k_0^2}\right] = \frac{\upsilon_0}{fg}$$

Эта формула может быть получена и непосредственно из первого уравнения системы (2.5) при $k \to \infty$, т.к. это уравнение при $k \to \infty$ принимает вид $\dot{\upsilon} = -fg$. Далее, при $k_0 \to \infty$ имеем $\gamma_0 \to 0$. Запишем (3.8) в виде

$$L = \frac{\pi\upsilon_0^2(\gamma_0 - \sin\gamma_0)^2}{4a\cos^2(\gamma_0/2)}\int_{\gamma_0}^{\pi}\frac{\cos(\alpha/2)(1-\cos\alpha)}{(\alpha-\sin\alpha)^3}d\alpha \tag{3.9}$$

Вычисляя в этом выражении предел при $\gamma_0 \to 0$ (например, по правилу Лопиталя), получим $L \to L_2 = \upsilon_0^2/(2fg)$. Это выражение может быть также получено из уравнения $\dot{\upsilon} = -fg$.

2°. Если $k_0 \to 1$, то $\gamma_0 = 2\arcsin(1/k_0) \to \pi$. Вычисляя в (3.7) предел при $k_0 \to 1$, получим $t_1 \to R\omega_0/a$, а из (3.9), вычисляя предел при $\gamma_0 \to \pi$ по правилу Лопиталя, будем иметь

$$L \to L_1 = \upsilon_0^2/(2a) = R^2\omega_0^2/(2a)$$

что согласуется с результатом, полученным в п. 3.1 при $k_0 \to 1$.

4. Обоснование результатов. *4.1*. Пусть $k_0 \in (0, 1)$. Тогда интегрирование системы (2.4) сводится к интегрированию однородного уравнения

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dk}{du} + k = \frac{k}{2-k^2}$$

Отсюда

$$\frac{uk^2}{\sqrt{1-k^2}} = c = \text{const}, \quad c = \frac{k_0^2 R\omega_0}{\sqrt{1-k_0^2}} \tag{4.1}$$

Из (4.1) получим

$$k^2 = \frac{2}{1+\sqrt{1+4\xi}}, \quad \xi = \frac{u^2}{c^2} \tag{4.2}$$

Из уравнений (2.4) и (4.2) следует, что при $k_0 < 1$ функция $u(t)$ монотонно убывает, а $k(t)$ монотонно возрастает от значения k_0 до значения $k(t_1) = 1$ при $u(t_1) = 0$, т.е. в момент остановки. Используя (4.2), второе уравнение системы (2.4) запишем в виде

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\xi(1+4\xi)}} + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right]d\xi = -\frac{4a}{c}dt \tag{4.3}$$

Интеграл уравнения (4.3) имеет вид (3.1). Далее, из (4.1) и (4.2) получим

$$v = ku = c\frac{\sqrt{1-k^2}}{k} = c\sqrt{\frac{1}{k^2}-1} = c\sqrt{\frac{2\xi}{1+\sqrt{1+4\xi}}} = \frac{dx_C}{dt}$$

Отсюда с использованием уравнения (4.3) имеем

$$dx_C = vdt = -\frac{c\sqrt{2}}{4a}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\xi}}{1+4\xi}}d\xi$$

Интегрируя последнее выражение, приходим к формуле (3.2).

4.2. Пусть $k_0 \in (1, \infty)$. Тогда интегрирование системы (2.5) сводится к интегрированию однородного уравнения

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dk}{du} + k = \frac{k\arcsin(1/k) + \sqrt{k^2-1}/k}{(2-k^2)\arcsin(1/k) + \sqrt{k^2-1}}$$

Вводя новую переменную $\beta = \arcsin(1/k)$, $\beta \in (0, \pi/2)$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u\frac{d\beta}{du} = \frac{2\beta\cos\beta\sin\beta - 2\cos^2\beta\sin^2\beta}{2\beta\cos(2\beta) - \sin(2\beta)}$$

а, вводя переменную $\gamma = 2\beta$, получим уравнение

$$\frac{du}{u} = \frac{(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)d\gamma}{(\gamma - \sin\gamma)\sin\gamma}, \quad \gamma \in (0, \pi)$$

интеграл которого имеет вид:

$$u = \frac{c\sin\gamma}{\gamma - \sin\gamma}, \quad c = \frac{u_0(\gamma_0 - \sin\gamma_0)}{\sin\gamma_0} = \text{const} \tag{4.4}$$

Второе уравнение системы (2.5) в новых обозначениях запишется следующим образом:

$$\dot{u} = -\frac{2a}{\pi}\frac{\sin\gamma - \gamma\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$$

Используя интеграл (4.4), отсюда получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{(1-\cos\gamma)}{(\gamma-\sin\gamma)^2}d\gamma = \frac{2a}{c}dt \tag{4.5}$$

Из уравнения (4.5) следует, что функция $\gamma(t) = 2\arcsin(1/k(t))$ монотонно возрастает с течением времени от значения $\gamma(0) = \gamma_0$ вплоть до значения $\gamma(t_1) = \pi$ при $u(t_1) = 0$ в момент остановки (см. (4.4)). Следовательно, функция $k(t) = 1/\sin(\gamma/2)$ монотонно убывает от значения $k(0) = k_0$ вплоть до значения $k(t_1) = 1$ в момент остановки. Интегрируя уравнение (4.5), придем к соотношению (3.5). Формула (3.6) получается аналогично тому, как это было сделано в п. 4.1.

5. Обсуждение результатов. Из выведенных п. 3 формул для времени движения и пройденного центром масс диска пути вплоть до остановки можно найти экстремальные значения этих величин при фиксированной начальной кинетической энергии диска. Пусть T_0 – начальное значение кинетической энергии. Тогда

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega_0^2, \quad u_0 = \omega_0 R = 2\sqrt{\frac{T_0}{m}}\frac{1}{\sqrt{1+2k_0^2}}$$

Подставляя найденное выражение для u_0 в формулы (3.3), (3.4) и (3.7), (3.8), получим:

$$t_1(k_0) = \frac{\sqrt{T_0}}{a\sqrt{m}}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2k_0^2}}\left(1+\dfrac{k_0^2}{\sqrt{1-k_0^2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-k_0^2}}{k_0}\right), & k_0\in(0,1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{(1+2k_0^2)(k_0^2-1)}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{1}{k_0}+\dfrac{\sqrt{k_0^2-1}}{k_0^2}\right), & k_0\in(1,\infty)\end{cases} \tag{5.1}$$

$$L(k_0) = \frac{T_0}{am}\begin{cases} \dfrac{4k_0(1+k_0+k_0^2)}{3(1+k_0)(1+2k_0^2)}, & k_0\in(0,1) \\ \dfrac{4\pi}{1+2k_0^2}\left(\dfrac{k_0^2\arcsin(1/k_0)}{\sqrt{k_0^2-1}}-1\right)^2 I(k_0), & k_0\in(1,\infty)\end{cases} \tag{5.2}$$

$$I(k_0) = \int\limits_{\gamma_0}^{\pi}\frac{\cos(\alpha/2)(1-\cos\alpha)}{(\alpha-\sin\alpha)^3}d\alpha, \quad \gamma_0 = 2\arcsin(1/k_0), \quad a = fg\pi/4$$

Анализ формул (5.1), (5.2), связанный только с вычислением первой производной по k_0 от функций из (5.1), (5.2), приводит к следующим результатам:

$$\min_{k_0}(t_1(k_0)) = t_1(0) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{T_0}{m}}$$

$$\max_{k_0}(t_1(k_0)) = t_1(1) = \frac{2}{\sqrt{3}a}\sqrt{\frac{T_0}{m}} \approx 1.115 t_1(0)$$

$$\max_{k_0}(L(k_0)) = \lim_{k_0 \to \infty} L(k_0) = T_0/(fg)$$

Ясно, что $\min_{k_0} L(k_0) = 0$ и реализуется этот минимум при $k_0 = 0$, т.е. когда $v_0 = 0$ и нет движения центра масс. Таким образом, минимальное время движения диска при фиксированной начальной кинетической энергии реализуется при $k_0 = 0$, т.е. на чисто вращательном движении, а максимальное – на решении $k(t) = k_0 = 1$, представляющем собой качение диска без проскальзывания по прямой, параллельной оси x. Максимальное расстояние, проходимое диском вплоть до остановки, при тех же предположениях, реализуется на чисто поступательном движении. Этот факт полностью согласуется с аналогичным результатом из [6], доказанным для диска произвольной формы, т.е. не обязательно круглого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
2. *Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л.* О движении плоских тел при наличии сухого терния // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 17–28.
3. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. Т. 62. Вып. 5. 1998. С. 762–767.
4. *Журавлев В.Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. № 4. 2003. С. 81–88.
5. *Киреенков А.А.* О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН. МТТ. № 1. 2002. С. 60–67.
6. *Розенблат Г.М.* Динамические системы с трением. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 155 с.
7. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.03.2006