

УДК 531.66

© 2007 г. А.С. ГОРОБЦОВ

РАСЧЕТ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ДИНАМИКЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МНОГИХ ТЕЛ

В настоящее время получили широкое распространение методы представления уравнений динамики связанных систем тел, предназначенные для численного решения. На основе таких подходов разрабатываются универсальные программные комплексы, ориентированные на решения задач определенных классов [1–3].

В расчетных схемах механических систем необходимо учитывать различные нелинейности, в том числе и ударного вида. Представление ударных взаимодействий с помощью нелинейных характеристик позиционных сил ведет к увеличению жесткости системы дифференциальных уравнений и возрастанию временных затрат на решение из-за необходимости уменьшения шага интегрирования или применения неявных методов интегрирования.

В связи с этим целесообразно рассмотреть подходы, базирующихся на допущениях теории удара – пренебрежимо малом времени ударного взаимодействия, абсолютно неупругом или частично упругом характере удара.

В общей постановке удар в системе с произвольным количеством стационарных и ударных связей рассмотрен в работе [4], где для обозначения означенной задачи введен специальный термин – системный удар, отражающий многомерность постоянных и разрывных связей.

В публикуемой работе представлен способ вычислительной реализации предложенных в [4] методов в программном комплексе моделирования динамики систем твердых и упругих тел ФРУНЦ [2]. Анализируется эффективность их применения.

Задача системного удара, согласно [4] формулируется следующим образом. Для многотельной механической системы с произвольными кинематическими связями требуется определить ударный разрыв скоростей при мгновенном изменении количества связей.

Для описания динамики механической системы используются уравнения Лагранжа 1-го рода в физических координатах [5, 6]:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \\ \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{x} – вектор обобщенных координат всей системы размерности n , \mathbf{M} – матрица инерции, $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ – вектор внешних сил, включающий в себя силы нагрузок, силы от упругодемпфирующих элементов и гироскопические силы, \mathbf{D} – матрица переменных коэффициентов уравнений связей размерности $k \times n$ (k – число связей); $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ – вектор правых частей уравнений связей; \mathbf{p} – вектор множителей Лагранжа. В системе (1) уравнения связей записаны в первых производных, что не влияет на вид первого уравнения системы, которое можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}^T \mathbf{p} + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t))$$

Считая, что в момент удара освобождаются все доударные связи и мгновенно прикладываются послеударные, после разделения переменных можно записать

$$\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\dot{\mathbf{x}} = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{p} \delta(\tau) dt + \int_{\tau^-}^{\tau^+} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) dt \quad (2)$$

где τ – время удара, $\delta(\tau)$ – дельта-функция, необходимая для учета импульсного характера изменения реакций в связях \mathbf{p} . Второй интеграл в правой части содержит позиционные и диссипативные силы и силы медленных и импульсных нагрузок. Проинтегрировав (2) с учетом того, что второй интеграл имеет не равные нулю члены только от импульсных нагрузок, получим выражение для послеударной скорости:

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{p} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{p}_e \quad (3)$$

Здесь \mathbf{p}_e – вектор внешних импульсов, \mathbf{K} – некоторая матрица приведения. Записав уравнение связи для послеударного момента времени с использованием (3) получим

$$\mathbf{D}(\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{p} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{p}_e) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_2, t)$$

откуда можно получить выражение для определения ударных реакций

$$\mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_2, t) - \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{p}_e \quad (4)$$

Используя уравнения (3) и (4), можно определить ударные реакции и послеударные скорости системы. Отметим, что $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ в силу предположения мгновенности удара. Если в (3) подставить значение \mathbf{p} из (4) и не учитывать внешние импульсы, то получим выражение для послеударной скорости, представленное в [4]. Однако для численного решения более эффективно использование двух уравнений в форме (3–4), поскольку это не требует обращения матрицы $\mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T$. Физический смысл реакций \mathbf{p} в (4) – ударные импульсы в связях.

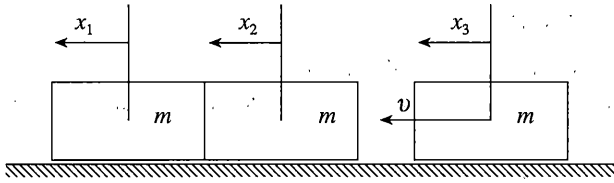
С учетом вида удара, уравнение (3) можно записать в форме

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{p}(1+k) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{p}_e \quad (5)$$

где k – коэффициент восстановления при ударе, равен нулю при абсолютно неупругом и единице при упругом ударах. Уравнение (5) предполагает наличие трех фаз удара: разрыв доударных связей, наложение ударных связей, по которым рассчитывается ударный импульс в связях, и разрыв ударных связей. Считается, что при упругом ударе разрываются все ударные связи, случай разрыва только части связей требует отдельного обоснования. При упругом ударе ударный импульс в связях увеличивается в два раза, по сравнению с абсолютно неупругим, что соответствует значению $k = 1$. Случай частично упругого удара при этом соответствует значениям k , лежащим в диапазоне $0 \leq k \leq 1$.

В качестве примера рассмотрим систему из трех одинаковых тел, обладающих по одной степени свободы, и допускающую аналитическое решение (фиг. 1). Пусть тело 3, двигающееся со скоростью v , ударяется в жестко соединенные между собой тела 2 и 3. Матрицы \mathbf{M} и \mathbf{D} системы уравнений (1) с учетом послеударных связей имеют вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



Фиг. 1

Все остальные члены системы (1) в данном случае будут равны нулю. Матрица коэффициентов при ударных импульсах уравнения (4) равна

$$\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/m & -1/m \\ -1/m & 2/m \end{pmatrix}$$

Учитывая, что в (4) все слагаемые в правой части, кроме вектора доударных скоростей равны нулю, уравнение (4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2/m & -1/m \\ -1/m & 2/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

откуда получаем $p_1 = mv/3$, $p_2 = 2mv/3$. По значениям ударных импульсов получаем послеударные скорости из уравнения (3)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mv/3 \\ 2mv/3 \end{pmatrix} =$$

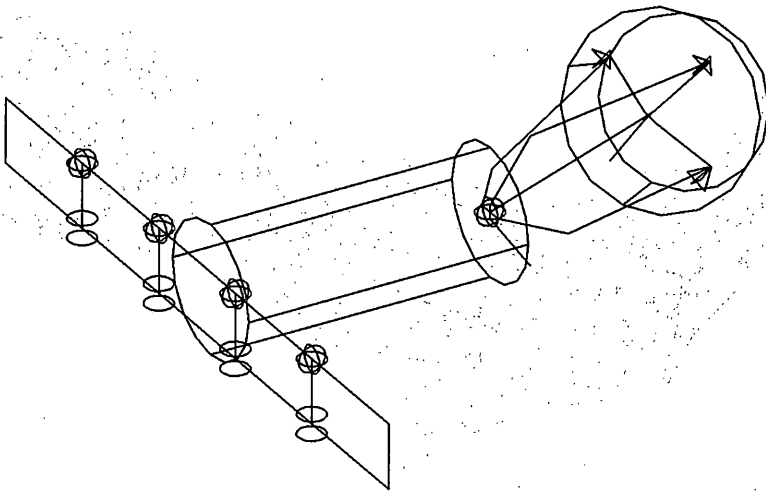
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ -1/m & 1/m \\ 0 & -1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mv/3 \\ 2mv/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/3 \\ v/3 \\ v/3 \end{pmatrix}$$

Как следует из найденных послеударных скоростей, они удовлетворяют закону сохранения количества движения в предположении, что удар был абсолютно неупругим, т.е. система трех тел после удара движется совместно.

В случае абсолютно упругого удара, третье тело отскакивает от системы тел 1–2, которые продолжают связанное движение. Послеударные скорости системы в этом случае определяются из уравнения (5) со значением коэффициента восстановления $k = 1$, а именно

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ -1/m & 1/m \\ 0 & -1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2mv/3 \\ 4mv/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v/3 \\ 2v/3 \\ -v/3 \end{pmatrix}$$

В случае упругого удара значения послеударных скоростей также согласуются с законом сохранения количества движения. Для систем с упругими ударными связями с



Фиг. 2

различными коэффициентами восстановления скалярное выражение $1 + k$, должно заменяться его векторным аналогом с индивидуальными коэффициентами восстановления по каждой связи.

Для определения эффективности метода с помощью комплекса моделирования ФРУНД был проведен расчет нескольких пространственных динамических моделей с различным числом тел и связей. В рассматриваемом комплексе используется представление уравнений движения отдельных тел с диагональной матрицей инерции, поэтому обращение полной матрицы инерции тривиально. Основным объемом вычислений приходится на определение переменных коэффициентов матрицы связей \mathbf{D} , которые зависят от координат системы. Для повышения численной эффективности выражения для этих коэффициентов формируются в символьном виде, а затем по ним генерируется программа их расчета.

На фиг. 2. показана расчетная схема системы из 6 тел с 26 связями. Моделируется удар одного из тел в неподвижную систему (стыковка космического аппарата). Число ударных связей равняется шести, что обеспечивает неподвижное соединение соударяемых тел в случае абсолютно неупругого удара. Ударяющее тело имеет ненулевые скорости по всем поступательным и вращательным координатам.

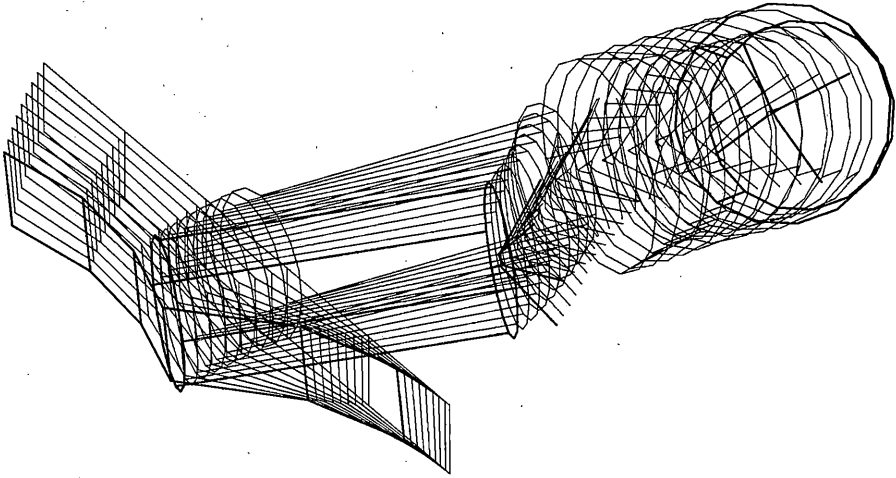
На фиг. 3 показан след движения тел системы, изображенной на фиг. 2, при упругом ударе. Численное интегрирование дифференциальных уравнений движения в форме (1) неустойчиво, поэтому в алгоритмах используется модифицированная система [7]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \\ \mathbf{h}^*(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{h}_c(\Delta_L, \dot{\Delta}_L) \end{pmatrix} \quad (6)$$

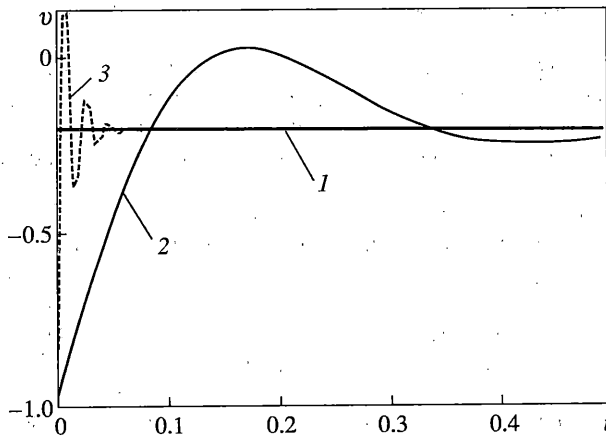
где $\mathbf{h}^*(\dot{\mathbf{x}}; \mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}$ – правая часть производной от уравнений связей системы (1), $\mathbf{h}_c(\Delta_L, \dot{\Delta}_L)$ – корректирующие ускорения связей, зависящие от погрешностей в шарнирах по перемещениям Δ_L и скоростям $\dot{\Delta}_L$. Компоненты вектора \mathbf{h}_c можно вычислять по следующему выражению:

$$h_{ci} = -\beta_c \Delta_{Li} - \beta_k \dot{\Delta}_{Li}$$

где β_c – стабилизирующий коэффициент по отклонениям, β_k – стабилизирующий коэффициент по скоростям отклонений. Знак минус означает, что корректирующие



Фиг. 3

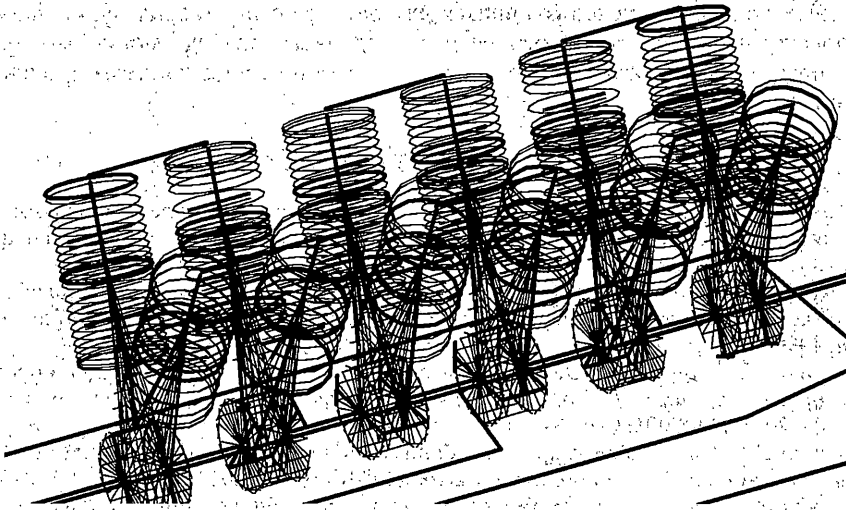


Фиг. 4

ускорения направлены в сторону уменьшения погрешности по отклонениям и скоростям.

На фиг. 4 показаны графики продольных скоростей корпуса после неупругого удара для различных параметров интегрирования. Кривая 1 соответствует вычислению скорости по (5), кривые 2 и 3 – интегрированию (6) с различными значениями стабилизирующих коэффициентов β_c . Из рисунка следует, что использование выражения (5) для вычисления послееударных скоростей дает лучшие результаты по сравнению с прямым интегрированием (6), в котором удар учитывается за счет корректирующих членов в уравнениях связей. Интегрирование (6) дает удовлетворительные результаты только при больших значениях стабилизирующих коэффициентов, что повышает жесткость системы дифференциальных уравнений (6) и увеличивает затраты на численное интегрирование.

Для исследования свойств матрицы $DM^{-1}D^T$, от которой зависят вычислительные характеристики метода, рассмотрена задача с большим количеством степеней свободы и



Фиг. 5

связей. На фиг. 5 представлена расчетная схема 12-ти цилиндрического дизеля, работающего в составе энергетической установки. Такая математическая модель использовалась для точного представления частотного спектра возмущающих воздействий, возникающих при работе дизеля и передающихся на основание установки, что необходимо для решения задачи выбора параметров системы виброизоляции. Не касаясь содержательной стороны задачи, рассмотрим подзадачу определения начальных скоростей движения звеньев системы, которая является типичной при моделировании динамики систем многих тел. При интегрировании системы вида (1) как правило известны начальные условия для перемещений, нахождение начальных условий для скоростей требует специального расчета из состояния покоя. Например, в рассматриваемой модели дизеля производится расчет раскрутки коленчатого вала до номинальных оборотов. Определение начальных скоростей без интегрирования уравнений движения уменьшает общие вычислительные затраты на моделирование.

Такое нахождение начальных скоростей можно производить с помощью предлагаемого метода. На фиг. 5 показана кинограмма движения звеньев дизеля из начальных условий, для которых скорости были вычислены по выражениям (4) и (3) по заданной скорости вращения коленчатого вала. Как следует из рисунка, для модели с достаточно большим количеством связей (порядка 200), алгоритм дает согласованное движение всех звеньев.

В рассмотренных моделях число уравнений связей лежало в диапазоне 26–200, такими же числами характеризовалось число степеней свободы несвязанной системы. Обусловленность матрицы $DM^{-1}D^T$ находилась в пределах 10^2 – 10^3 , что свидетельствует о возможности решения линейной алгебраической системы (5) с необходимой точностью. В качестве оценки обусловленности использовался разброс значений диагональных коэффициентов треугольного разложения матрицы $DM^{-1}D^T$. Естественным ограничением на использование (5) является наличие избыточных связей, вносящих в систему статическую неопределенность.

На основе проведенного анализа можно заключить, что вычисление ударных разрывов скоростей по выражению (5) обладает хорошими вычислительными характеристиками, и позволяет существенно (на один – два порядка) уменьшать жесткость диффе-

ренциальных уравнений, использующихся для расчета существенно нелинейной динамики многотельных систем. На основе рассмотренного подхода могут быть развиты методы расчета кинематики многомерных механических систем произвольной структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. “Универсальный механизм” – комплекс программ моделирования динамики систем твердых тел. Препринт № 77. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1993. 28 с.
2. Курдюк С.А., Шмелев Е.Н. Особенности формирования математических моделей технических объектов средствами программного комплекса PRADIS. // Информационные технологии. 1996. № 3. С. 14–19.
3. Горбцов А.С., Карцов С.К. Опыт компьютерного моделирования вибрации конструкций транспортных средств. // Тр. 5-й Международной конф. по проблемам колебаний “ICOVP – 2001”. М. 2001. С. 186–190.
4. Величенко В.В. Системный удар в колебаниях сложных механических систем. // Тр. 5-й Международной конф. по проблемам колебаний “ICOVP – 2001”. М. 2001. С. 142–145.
5. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988, 279 с.
6. Bayo E., Serna M.A. Penalty Formulations for the Dynamic Analysis of Elastic Mechanisms. // Trans. ASME. J. Mech. Transmiss. and Autom. Des. 1989. V. 111. № 3. С. 321–327.
7. Горбцов А.С. Численное интегрирование уравнений движения систем тел произвольной структуры // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы. Междунар. конф. Саратов, 2002. С. 16–20.

Волгоград

Поступила в редакцию
22.01.2004