

УДК 531.38

© 2007 г. Н.И. АМЕЛЬКИН

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ
ТВЕРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ДВУХСТЕПЕННЫЕ СИЛОВЫЕ ГИРОСКОПЫ
С ДИССИПАЦИЕЙ В ОСЯХ ПОДВЕСА РАМОК**

Для исследования устойчивости стационарных вращений гиросиловой системы с внутренней диссипацией применяется теорема Барбашина–Красовского с использованием установленной в [1] связи между функцией Ляпунова и стационарными движениями. С учетом имеющей специфики исходная задача сводится к задаче меньшей размерности.

Подробно изложен алгоритм анализа устойчивости стационарных движений гироскопов и с помощью него проведено полное исследование для двух систем, имеющих соответственно один и два гироскопа, оси рамок которых установлены параллельно главной оси инерции системы. При этом каждое стационарное движение идентифицировано либо как асимптотически устойчивое, либо как неустойчивое. Найдены периодические движения, которые существуют только при наличии динамической симметрии и представляют собой регулярные прецессии. Для системы с двумя гироскопами доказана асимптотическая устойчивость неподвижных состояний и установлено, что в том диапазоне значений кинетического момента, где определены неподвижные состояния, других устойчивых движений система не имеет.

1. В [1] рассматривались системы, состоящие из несущего тела (корпуса) и статически уравновешенных двухстепенных силовых гироскопов. Анализ движения проводился в предположениях, что внешнее воздействие на систему отсутствует либо представляет собой однородное поле тяжести, а в осях рамок гироскопов действуют диссипативные моменты. При этом движение исследовалось в фазовых переменных ω , x , \dot{x} , где $\omega = (p, q, r)$ – угловая скорость корпуса, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор текущего углового положения рамок гироскопов. В указанных предположениях была введена функция Ляпунова

$$V(\omega, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \left(\omega^T J \omega + 2\omega \cdot \sum_{k=1}^n J_k v_k + \sum_{k=1}^n v_k^T J_k v_k \right) \quad (1.1)$$

представляющая собой кинетическую энергию системы при “замороженных” роторах гироскопов, и показано, что ее производная по времени на движениях системы удовлетворяет условиям

$$\dot{V} = 0, \text{ если } \dot{x} = 0; \quad \dot{V} < 0, \text{ если } \dot{x} \neq 0 \quad (1.2)$$

В приведенных выражениях J – тензор инерции всей системы, вычисляемый в связанном с корпусом базисе, имеющем начало в центре масс системы; J_k – тензор инерции гироскопа в базисе, получаемом параллельным переносом центрального базиса в центр масс гироскопа; $v_k = \dot{i}_k x_k$ – угловые скорости рамок относительно корпуса; i_k – единичные векторы, задающие положение осей подвесов рамок.

Ниже через $H = H(x)$ обозначается суммарный кинетический момент собственного вращения роторов гироскопов. Если система не является гироскопом, то тензоры J и J_k также являются функциями вектора x .

Из ограниченности функции (1.1) снизу и условия $\dot{V} \leq 0$ следует, что любое движение системы стремится к некоторой предельной траектории, на которой $\dot{V} = 0$ [2]. В силу (1.2) таким предельным траекториям соответствуют движения с неизменными значениями вектора \mathbf{x} , названные в [1] равновесными движениями. Стационарные движения характеризуются дополнительным условием неизменности вектора $\boldsymbol{\omega}$ и являются разновидностью равновесных. В тех (многих) случаях, когда система имеет только стационарные равновесные движения, анализ устойчивости предельных движений сводится к анализу устойчивости стационарных.

В [1] показано, что стационарным движениям соответствуют условно-стационарные точки функции (1.1) на многообразии, определяемом интегралом кинетического момента системы

$$f(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \left(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_k \mathbf{J}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{H} \right)^2 = K^2 \quad (1.3)$$

В данной работе установленное свойство используется для анализа условной устойчивости стационарных движений систем. При этом под условной устойчивостью подразумевается устойчивость по отношению к возмущениям, принадлежащим многообразию (1.3) для фиксированного значения K , соответствующего исследуемому стационарному движению.

В силу того, что система обладает интегралом кинетического момента (1.3); на условную устойчивость переносятся все известные теоремы прямого метода Ляпунова с той лишь оговоркой, что поведение функции Ляпунова должно удовлетворять соответствующим свойствам на многообразии (1.3). Так, по теореме Ляпунова стационарное движение будет условно устойчивым, если выполняется условие:

1°. В рассматриваемой стационарной точке $(\boldsymbol{\omega}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{0})$ функция Ляпунова (1.1) имеет строгий условный минимум.

Отметим, что согласно [5] (теорема 1.4.2) условие 1° гарантирует также и безусловную устойчивость рассматриваемого движения.

Для установления асимптотической устойчивости или неустойчивости можно использовать теорему Барбашина–Красовского [3] (эта теорема применима, поскольку уравнения движения рассматриваемых систем являются автономными). По этой теореме условная асимптотическая устойчивость имеет место, если в дополнение к 1° выполняется также условие:

2°. В достаточно малой окрестности точки $(\boldsymbol{\omega}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{0})$ на многообразии (1.3) нет других целых траекторий, на которых $\dot{V}(t) = 0$.

Поскольку целыми траекториями, на которых функция Ляпунова сохраняет постоянное значение, являются только траектории равновесного движения, то условие 2° можно переформулировать в следующем виде:

2а°. На многообразии (1.3) рассматриваемое стационарное движение является изолированным от других равновесных движений.

По теореме Барбашина–Красовского для неустойчивости стационарного движения помимо условия 2а° должно выполняться условие:

3°. Функция V не имеет условного минимума в точке $(\boldsymbol{\omega}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{0})$, т.е. в любой ее окрестности на многообразии (1.3) существуют точки, в которых значения функции V меньше, чем в самой точке $(\boldsymbol{\omega}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{0})$.

Таким образом, применяемый здесь подход к исследованию условной устойчивости стационарных движений предполагает решение двух задач. Первая из них состоит в проверке условий 1°, 3° и сводится к определению типа рассматриваемой условно-стационарной точки (характера условного экстремума). Вторая задача (условие 2а°) заключа-

ется в проверке изолированности рассматриваемого движения от других равновесных движений системы на фиксированном многообразии (1.3). Здесь потребуется анализ не только стационарных, но и возможных нестационарных равновесных движений системы.

2. Для анализа характера условного экстремума в стационарных точках можно применить метод множителей Лагранжа. При этом условие стационарности рассматриваемой точки описывается векторным уравнением $\nabla V + \mu \nabla f = 0$, где μ – множитель, символ ∇ обозначает градиент функции по всем переменным ω, x, \dot{x} , а характер экстремума зависит от значений второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2 L = d^2 V + \mu d^2 f \quad (2.1)$$

на множестве вариаций $d\omega, dx_k, d\dot{x}_k$, удовлетворяющих уравнению

$$df = \frac{\partial f}{\partial \omega} \cdot d\omega + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_k} d\dot{x}_k = 0 \quad (2.2)$$

При этом для выполнения условия 1°, квадратичная форма (2.1), вычисляемая на множестве (2.2), должна быть строго положительно определенной. Если же эта квадратичная форма на некоторых вариациях из множества (2.2) принимает отрицательные значения, то для таких стационарных движений будет выполняться условие 3°.

В [1] показано, что для стационарных движений значения переменных ω^*, x^* можно трактовать как условно стационарные точки усеченной функции $V^*(\omega, x) = V(\omega, x, 0) = \omega^T J \omega / 2$ на усеченном многообразии

$$f^*(\omega, x) = f(\omega, x, 0) = (J\omega + H)^2 = K^2 \quad (2.3)$$

в пространстве переменных ω и x . Для проверки же условий 1° или 3° изначально требуется анализ поведения функции (1.1) на многообразии (1.3) в пространстве всех фазовых переменных ω, x, \dot{x} . Покажем, что эта задача сводится к анализу поведения функции V^* на многообразии (2.3), т.е. к задаче в переменных ω и x .

Сделаем частичную замену переменных. Вместо ω введем переменную Ω , определяемую соотношением

$$J\Omega = J\omega + \sum_k J_k v_k \quad (2.4)$$

В переменных Ω, x, \dot{x} для функции (1.1), проведя соответствующие выкладки, получим следующее выражение

$$2V = \Omega^T J \Omega + \sum_{k=1}^n v_k^T J_k v_k - \left(\sum_{k=1}^n J_k v_k \right)^T J^{-1} \left(\sum_{k=1}^n J_k v_k \right) \quad (2.5)$$

а интеграл кинетического момента (1.3) примет вид

$$f = (J\Omega + H)^2 = K^2 \quad (2.6)$$

Поскольку в (2.6), зависимость от скоростей \dot{x}_k отсутствует, то имеем $df/d\dot{x}_k = 0$, а уравнение для вариаций принимает вид

$$df = d(J\Omega + H)^2 = \frac{\partial f}{\partial \Omega} \cdot d\Omega + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что все вариации $d\dot{x}_k$ являются независимыми.

Запишем второй дифференциал функции Лагранжа (2.1). Для всех вторых производных от функции (2.6) по переменным \dot{x}_k имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \Omega \partial \dot{x}_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial \dot{x}_j} = 0$$

Для вторых производных от функции (2.5) получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_j} = \delta_{kj} (\mathbf{i}_k^T \mathbf{J}_k \mathbf{i}_k) - (\mathbf{J}_k \mathbf{i}_k)^T \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{J}_j \mathbf{i}_j) \quad (2.8)$$

где δ_{kj} – матрица Кронекера. Все остальные вторые производные от функции (2.5), сохраняющие однократное дифференцирование по переменным \dot{x}_k , являются либо тождественными нулями, либо линейными функциями скоростей \dot{x}_k , и поэтому в стационарных точках равны нулю:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Omega \partial \dot{x}_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial \dot{x}_k} = 0$$

В результате получим, что в стационарных точках квадратичную форму (2.1) можно представить в виде суммы $d^2L = d^2L_1 + d^2L_2$, где

$$d^2L_1 = \sum_{k=1}^n d\mathbf{v}_k^T \mathbf{J}_k d\mathbf{v}_k - \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k d\mathbf{v}_k \right)^T \mathbf{J}^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k d\mathbf{v}_k \right) \quad (2.9)$$

$$d^2L_2 = d^2(\Omega^T \mathbf{J} \Omega / 2 + \mu(\mathbf{J} \Omega + \mathbf{H})^2) \quad (2.10)$$

При этом d^2L_1 является квадратичной формой независимых вариаций $d\dot{x}_k$, а d^2L_2 – функцией вариаций $d\Omega$ и dx_k , связанных уравнением (2.7).

Таким образом, анализ поведения квадратичной формы функции Лагранжа по вариациям скоростей \dot{x}_k с одной стороны, и по вариациям остальных переменных с другой, разделяется.

В [1] при доказательстве теоремы исследовалась квадратичная форма, совершенно идентичная форме (2.9), и была доказана ее строгая положительная определенность. Поэтому за счет слагаемого (2.9) матрица квадратичной формы (2.1) на множестве (2.2) имеет n положительных собственных чисел, а функция (1.1) имеет строгий условный минимум по скоростям \dot{x}_k . Отсюда следует, что стационарных точек условного максимума функций Ляпунова в рассматриваемых задачах не существует, а могут иметь место только условные минимумы или седла. При этом характер экстремума окончательно определяется поведением квадратичной формы (2.10) на множестве вариаций (2.7).

В свою очередь, поведение квадратичной формы (2.10) на множестве (2.7) определяет поведение функции $V_2 = \Omega^T \mathbf{J} \Omega / 2$ на многообразии $(\mathbf{J} \Omega + \mathbf{H})^2 = K^2$. Поскольку в силу замены (2.4) значения векторов ω и Ω в стационарных точках совпадают, то в окрестности стационарной точки поведение функции V_2 на многообразии $(\mathbf{J} \Omega + \mathbf{H})^2 = K_2$ совершенно идентично поведению функции $V^* = \omega^T \mathbf{J} \omega / 2$ на многообразии (2.3).

Таким образом, исходная задача об условной устойчивости стационарных движений в пространстве переменных $\omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ сведена к анализу поведения усеченной функции V^* в пространстве переменных ω и \mathbf{x} .

Из вышеизложенного следует, что условия 1° и 3°, проверка которых требуется при анализе устойчивости, сводятся к аналогичным условиям на поведение усеченной функции V^* на усеченном многообразии (2.3). Это же относится и к условию 2а°, поскольку по определению любое равновесное движение принадлежит многообразию (2.3). При этом отметим, что под свойством изолированности траекторий понимается их изолированность в пространстве переменных ω и x , так что траектории с одинаковыми значениями угловой скорости ω , но разными значениями x , считаются изолированными.

3. Рассмотрим случай, когда система обладает свойством гиростата. Для гиростатов каждый гироскоп (ротор вместе с рамкой) обладает динамической симметрией относительно оси поворота рамки. Поэтому тензор инерции каждого гироскопа J_k и тензор инерции всей системы J не зависят от углового положения рамок $x = (x_1, \dots, x_n)$. При этом полученные в [1] уравнения, описывающие всю совокупность стационарных движений таких систем, приобретают вид

$$\omega \times (J\omega + H) = 0, \quad i_k^T(\omega \times H_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) образуют систему из $n + 2$ независимых уравнений, в которой неизвестными являются компоненты p, q, r угловой скорости ω и углы $x = (x_1, \dots, x_n)$ поворота рамок гироскопов.

Обсудим методику отыскания нестационарных равновесных движений (движений с постоянным значением вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, но с изменяющимся вектором ω). Из полученных в [1] уравнений следует, что для гиростатов каждое равновесное движение должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$J\dot{\omega} + \omega \times (J\omega + H) = 0, \quad I_k i_k^T \dot{\omega} + i_k^T(\omega \times H_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

при некотором фиксированном значении вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, где I_k — момент инерции гироскопа относительно оси рамки i_k .

Уравнения (3.2) образуют переопределенную систему из $n + 3$ дифференциальных уравнений в переменных p, q, r , а координаты вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ выступают в роли параметров этой системы.

Нетрудно видеть, что система (3.2) имеет в качестве частных решений все стационарные движения, определяемые уравнениями (3.1).

Для определения условий существования нестационарных равновесных движений выразим $\dot{\omega}$ из векторного уравнения системы (3.2) и подставим во все скалярные уравнения. Тогда получим, что каждая траектория равновесного движения должна удовлетворять следующей системе алгебраических уравнений:

$$I_k i_k^T J^{-1}(\omega \times (J\omega + H)) = i_k^T(\omega \times H_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Иначе говоря, для существования нестационарных равновесных движений векторное уравнение (3.2) должно иметь частные интегралы движения (3.3).

В свою очередь, векторное уравнение системы (3.2) имеет интегралы кинетического момента и функции V^* :

$$(J\omega + H)^2 = K^2 = \text{const}, \quad \omega^T J\omega = 2V = \text{const} \quad (3.4)$$

Таким образом, задача определения нестационарных равновесных движений сводится к нахождению “полноценных” кривых (не точек) в пространстве переменных p, q, r , удовлетворяющих одновременно всем уравнениям (3.3) и (3.4).

Отметим, что каждый из интегралов (3.4) задает эллипсоид в переменных p, q, r , а линии пересечения этих эллипсоидов являются замкнутыми кривыми. Поэтому нестационарные

нарные равновесные движения, если они существуют, являются периодическими движениями системы.

Как было установлено выше, анализ устойчивости сводится к исследованию характера условного экстремума функции $V^* = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} / 2$ на многообразии (2.3). С помощью функции Лагранжа $L = V^* + \mu f^*$ условия стационарности рассматриваемых точек описываются системой уравнений

$$\frac{\partial V^*}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mu \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0, \quad \frac{\partial V^*}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial f^*}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Учитывая, что для гироскопов тензор инерции системы неизменен, а зависимость кинетического момента \mathbf{H} от углов x_k характеризуется соотношениями $\partial \mathbf{H} / \partial x_k = \mathbf{i}_k \times \mathbf{H}_k$, получим формулы

$$\begin{aligned} \partial V^* / \partial \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad \partial V^* / \partial x_k \equiv 0 \\ \partial f^* / \partial \boldsymbol{\omega} &= 2\mathbf{J}(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}), \quad \partial f^* / \partial x_k = 2(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{i}_k \times \mathbf{H}_k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

на основании которых уравнения (3.5) приводятся к виду

$$\boldsymbol{\omega} + 2\mu(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0, \quad \mu \partial f^* / \partial x_k = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

Характер условного экстремума функции V^* определяется значениями квадратичной формы $d^2 L = d^2 V^* + \mu d^2 f^*$ на множестве вариаций $d\boldsymbol{\omega}$, dx_k , удовлетворяющих уравнению $df^* = 0$. При этом из уравнений (3.7) следует, что для всех стационарных движений с ненулевой угловой скоростью выполняются равенства $\partial f^* / \partial x_k = 0$, в силу которых уравнение для вариаций в таких точках имеет вид

$$df^* = 2\mathbf{J}(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) \cdot d\boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) задает связь только между вариациями компонент угловой скорости, а вариации dx_k являются независимыми.

Вторые производные от функции f^* определяются формулами

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial \boldsymbol{\omega}^T \partial \boldsymbol{\omega}} = 2\mathbf{J}^2, \quad \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_k \partial \boldsymbol{\omega}} = 2\mathbf{J}(\mathbf{i}_k \times \mathbf{H}_k)$$

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial x_k \partial x_j} = 2(\mathbf{i}_j \times \mathbf{H}_j) \cdot (\mathbf{i}_k \times \mathbf{H}_k), \quad k \neq j \quad (3.9)$$

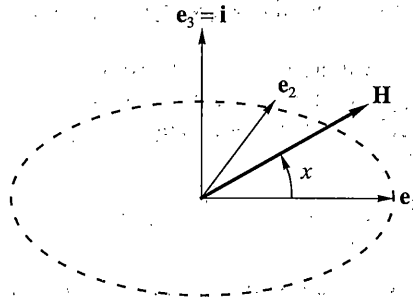
$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial x_k^2} = -2(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}_k + 2(\mathbf{i}_k \times \mathbf{H}_k)^2 = -2\left(\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \sum_{j \neq k} \mathbf{H}_j\right) \cdot \mathbf{H}_k$$

Последняя формула записана в предположении, что оси роторов гироскопов ортогональны осям подвеса их рамок.

На основе формул (3.9), учитывая, что $d^2 V^* = d\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} d\boldsymbol{\omega}$, выписывается второй дифференциал функции Лагранжа. Например, для систем с одним гироскопом будем иметь

$$d^2 L = d\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} d\boldsymbol{\omega} + 2\mu(-\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H} dx^2 + 2d\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}(\mathbf{i} \times \mathbf{H}) dx + d\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}^2 d\boldsymbol{\omega}) \quad (3.10)$$

Значение множителя μ можно определять из первого (векторного) уравнения системы (3.7) через значения угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углов x_k на рассматриваемом стационарном движении. В результате получим квадратичную форму от $n + 3$ переменных, которая с учетом уравнения связи (3.8) может быть сведена к квадратичной форме от $n + 2$ независимых переменных. Анализ значений этой квадратичной формы позволит вы-



Фиг. 1

завить наличие или отсутствие условного минимума в рассматриваемой точке и сделать заключение об устойчивости или неустойчивости рассматриваемого движения.

При рассмотрении нижеследующих примеров будем обозначать через e_1, e_2, e_3 главные центральные оси инерции системы, через A, B, C соответствующие главные моменты инерции, а через p, q, r проекции угловой скорости на главные оси.

4. *Пример 1.* Система содержит один гироскоп, ось подвеса рамки которого параллельна главной оси e_3 (фиг. 1). Полагая, что ось ротора ортогональна оси подвеса рамки, имеем $\mathbf{H} = H(e_1 \cos x + e_2 \sin x)$, где $H > 0$.

Найдем стационарные движения системы. В рассматриваемом случае $n = 1$ уравнения (3.1) принимают вид

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{e}_3^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) имеют решения, соответствующие состояниям покоя системы, для которых угол поворота рамки гироскопа может принимать любое значение от нуля до 2π :

$$p = q = r = 0, \quad x \in [0, 2\pi] \quad (4.2)$$

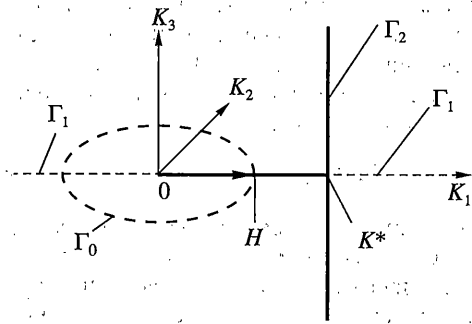
На решениях (4.2) величина кинетического момента системы K равна величине кинетического момента ротора H .

Рассмотрим решения, для которых $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. Из скалярного уравнения системы (4.1) имеем $\boldsymbol{\omega} = \alpha e_3 + \beta \mathbf{H}$, где $\beta \neq 0$. Подставляя это выражение в векторное уравнение системы (4.1), получим

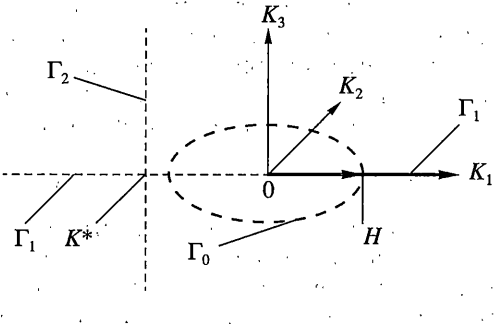
$$\alpha \beta e_3 \times \mathbf{J}\mathbf{H} + \alpha \beta \mathbf{H} \times \mathbf{J}e_3 + \alpha e_3 \times \mathbf{H} + \beta^2 \mathbf{H} \times \mathbf{J}\mathbf{H} = 0 \quad (4.3)$$

Первые три слагаемых в полученном уравнении ортогональны оси e_3 , а последнее слагаемое может быть направлено только по этой оси, так как вектор \mathbf{H} лежит в главной плоскости (e_1, e_2) . Поэтому должно выполняться равенство $\mathbf{H} \times (\mathbf{J}\mathbf{H}) = 0$, в силу которого вектор \mathbf{H} является собственным вектором матрицы \mathbf{J} . Отсюда получим, что при отсутствии динамической симметрии относительно оси e_3 ($A \neq B$) на стационарных движениях с ненулевой угловой скоростью вектор \mathbf{H} параллелен одной из главных осей e_1 или e_2 . Таким положениям соответствуют четыре значения угла поворота рамки гироскопа: $x = 0$; $x = \pi/2$; $x = \pi$; $x = 3\pi/2$.

Далее ограничимся анализом стационарных движений, отвечающих конфигурации $x = 0$, поскольку соответствующей перестановкой в обозначениях к этому случаю можно свести решения, отвечающие остальным трем конфигурациям. Для случая $x = 0$ из



Фиг. 2



Фиг. 3

системы (4.1) получим следующие уравнения: $q = 0$; $(A - C)pr + Hr = 0$. Им соответствуют решения:

$$x = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad p \in (-\infty, +\infty) \quad (4.4)$$

$$x = 0, \quad q = 0, \quad p = H/(C - A), \quad r \in (-\infty, +\infty) \quad (4.5)$$

В компонентах K_1, K_2, K_3 кинетического момента $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}$ эти решения переписываются следующим образом

$$x = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_1 \in (-\infty, +\infty) \quad (4.6)$$

$$x = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_1 = K^* = CH/(C - A), \quad K_3 \in (-\infty, +\infty) \quad (4.7)$$

На фиг. 2 ($B < A < C$) и фиг. 3 ($B < A > C$) решениям (4.6) соответствуют бесконечные прямые Γ_1 , а решениям (4.7) – бесконечные прямые Γ_2 . Окружность Γ_0 радиуса H в плоскости $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ отвечает решениям (4.2).

Решение (4.6) определено при любом значении K величины кинетического момента системы и является двухзначной функцией K . Решение (4.7) ответвляется от решения (4.6) в точке $K = |K^*|$. Оно также является двухзначным в зависимости от K , но определено в диапазоне $K \geq |K^*|$.

Из приведенных графиков поведения решений (4.6) и (4.7) и с учетом решений, соответствующих остальным трем значениям угла $x = \pi/2, \pi, 3\pi/2$, следует вывод, что в зависимости от величины K система имеет либо 8, либо 12, либо 16 стационарных движений. При этом для всех значений кинетического момента, кроме $K = H$, найденные движения являются изолированными друг от друга точками на многообразии (2.3).

Рассмотрим теперь вопрос о наличии нестационарных равновесных движений системы. Следуя изложенному в п. 3 методу, выпишем уравнения (3.3) и (3.4):

$$(Ap + H \cos x)^2 + (Bq + H \sin x)^2 + C^2 r^2 = K^2 \quad (4.8)$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2V \quad (4.9)$$

$$I(B - A)pq = (C - I)H(p \sin x - q \cos x) \quad (4.10)$$

где I – момент инерции гироскопа относительно оси подвеса рамки, и найдем “полноценные” кривые в пространстве переменных p, q, r , удовлетворяющие одновременно всем этим уравнениям.

Сначала заметим, что прямые, параллельные оси r , не могут являться искомыми траекториями, поскольку они не удовлетворяют первым двум уравнениям. Поэтому далее анализируем такие траектории, проекция которых на плоскость (p, q) дает “полноценную” кривую. Исключая из первых двух уравнений переменную r , получим уравнение для проекции линии пересечения эллипсоидов (4.8), (4.9) на плоскость (p, q) :

$$(Ap + H \cos x)^2 + (Bq + H \sin x)^2 - C(Ap^2 + Bq^2) = K^2 - 2VC \quad (4.11)$$

Теперь ищем кривые в плоскости (p, q) , которые при некотором фиксированном значении угла x удовлетворяют одновременно уравнениям (4.10) и (4.11). Нетрудно проверить, что при $\sin 2x \neq 0$ таких кривых не существует, поскольку в этом случае (4.10) определяет гиперболу, уравнение которой ни при каких условиях не совпадет с уравнением (4.11). Если же $\sin 2x = 0$, то уравнение (4.10) задает пару пересекающихся прямых, которые при определенных условиях могут удовлетворять уравнению (4.11).

Рассмотрим случай $x = 0$. Тогда (4.10) и (4.11) приобретают вид

$$(I(B - A)p + (C - I)H)q = 0$$

$$(Ap + H)^2 - CAp^2 + B(B - C)q^2 = K^2 - 2VC$$

Первое из записанных уравнений задает пару прямых. При этом только при условии $B = C$ (динамическая симметрия относительно оси e_1) одна из этих прямых, определяемая уравнением

$$p = \tilde{p} = (C - I)H / I(A - C) \quad (4.12)$$

может удовлетворять второму уравнению. Полученная прямая является проекцией искомой траектории на плоскость (p, q) . Поведение этой траектории в пространстве может быть найдено из интегралов (4.8) и (4.9), которые для рассматриваемого случая ($B = C, x = 0$) будут иметь вид

$$(A\tilde{p} + H)^2 + C^2(q^2 + r^2) = K^2; \quad A\tilde{p}^2 + C(q^2 + r^2) = 2V$$

Отсюда следует, что траекториями найденных движений являются концентрические окружности, лежащие в плоскости $p = \tilde{p}$ с центром в точке $q = r = 0$. Эти движения представляют собой регулярные прецессии вокруг неизменного в пространстве направления кинетического момента системы, а осью собственного вращения является ось симметрии e_1 .

Поскольку $C - I$ — момент инерции всей системы вместе с гироскопом, то разность $C - I$ положительна, и для реальных систем близка к C . Поэтому из (4.12) следует, что по порядку величины угловая скорость на найденных движениях соответствует угловой скорости собственного вращения ротора гироскопа.

Через компоненты кинетического момента найденные траектории описываются уравнением

$$K_1 = \tilde{K} = HC(A - I) / I(A - C), \quad \tilde{K}^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2 \quad (4.13)$$

и определены для значений кинетического момента системы, удовлетворяющих неравенству $K > |\tilde{K}|$. При этом для каждого значения K из указанного диапазона существует два периодических движения. Одно из них соответствует рассмотренному случаю $x = 0$, а второе — случаю $x = \pi$.

Аналогично анализируются две другие конфигурации $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$, удовлетворяющие соотношению $\sin 2x = 0$. Для них условие существования периодических движений сводится к равенству $A = C$ (динамическая симметрия относительно оси e_2).

Таким образом, нестационарные равновесные движения (периодические движения) существуют у рассматриваемой системы только при наличии динамической симметрии относительно главной оси, перпендикулярной оси подвеса рамки. Во всех остальных случаях система имеет только стационарные равновесные движения. При этом даже при наличии периодических движений их траектории на каждом многообразии (2.3), задаваемом фиксированным значением K , изолированы от стационарных движений, принадлежащих этому многообразию. Поэтому для каждого стационарного движения с ненулевой угловой скоростью выполняется условие 2^о, и из теоремы Барбашина–Красовского будет следовать, что при условии 1^о движение является асимптотически устойчивым, а при условии 3^о – неустойчивым.

Проанализируем устойчивые найденных стационарных движений. На решениях (4.6) для множителя μ из (3.7) получим $2\mu = -p/K_1$, где $K_1 = Ap + H$, а уравнение (3.8) для вариаций принимает вид $K_1 dp = 0$. При $K_1 \neq 0$ квадратичная форма (3.10) записывается через независимые вариации dq, dr, dx следующим образом:

$$d^2L = Cdr^2 + Bdq^2 - p(C^2dr^2 + B^2dq^2 + 2BHDqdx - ApHdx^2)/K_1$$

Для матрицы этой квадратичной формы имеем

$$\begin{pmatrix} C(1 - Cp/K_1) & 0 & 0 \\ 0 & B(1 - Bp/K_1) - BHp/K_1 & 0 \\ 0 & -BHp/K_1 & AHp^2/K_1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

По критерию Сильвестра условие 1^о будет иметь место, если положительны все диагональные миноры матрицы (4.14). Если же хотя бы один из этих миноров отрицателен, то будет выполняться условие 3^о. Рассматривая движения с ненулевой угловой скоростью ($p \neq 0 \Rightarrow K_1 \neq H$), получим систему неравенств

$$K_1 = Ap + H > 0; \quad (A - B)/K_1 > 0, \quad ((A - C)K_1 + CH)/K_1 > 0 \quad (4.15)$$

Из первого неравенства $K_1 > 0$ следует, что для устойчивых движений (4.6) кинетический момент гироскопа направлен по кинетическому моменту системы ($\mathbf{H} \cdot \mathbf{K} > 0$). Из второго неравенства следует $A > B$, т.е. на устойчивых движениях ротор гироскопа располагается параллельно той из двух главных осей (\mathbf{e}_1 или \mathbf{e}_2), относительно которой момент инерции больше. Последнее неравенство в совокупности с первым определяет диапазон устойчивости движений (4.6). Для случая $A > C$, т.е. когда \mathbf{e}_3 не является осью наибольшего момента инерции, имеем $K > 0$ (жирная полупрямая Γ_1 на фиг. 3). Если же $A < C$ (\mathbf{e}_3 – ось наибольшего момента инерции), получим $0 < K < K^*$ (жирный отрезок прямой Γ_1 на фиг. 2).

Отметим, что для случая $A > C$ устойчивые движения (4.6) представляют собой вращения вокруг оси наибольшего момента инерции, а при $A < C$ – вокруг оси среднего момента инерции. Число таких движений для каждого значения K из диапазона устойчивости равно двум (вектор \mathbf{H} может располагаться либо по оси \mathbf{e}_1 , либо против нее).

Теперь проанализируем решения (4.7). Для множителя μ из (3.7) в этом случае получим $2\mu = -1/C$. При этом квадратичная форма функции Лагранжа (3.10) принимает следующий вид:

$$d^2L = A(1 - A/C)dp^2 + B(1 - B/C)dq^2 - \frac{2BH}{C}dqdx + \frac{AH^2}{C(C - A)}dx^2 \quad (4.16)$$

и не содержит вариаций dr . Из уравнения (3.8) для вариаций имеем

$$df^* = A(Ap + H)dp + C^2rdr = 0$$

Отсюда следует, что для точек $r \neq 0$ вариации dp, dq, dx можно выбрать в качестве независимых и рассматривать (4.16), как квадратичную форму в независимых переменных. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} A(C-A)/C & 0 & 0 \\ 0 & B(C-B)/C & -BH/C \\ 0 & -BH/C & AH^2/C(C-A) \end{pmatrix}$$

Условия положительной определенности этой матрицы задаются неравенствами $C > A$ и $A > B$. Поэтому только в случае, если ось рамки гироскопа установлена параллельно оси наибольшего момента инерции, а ротор повернут по оси среднего момента, рассматриваемые движения являются устойчивыми (прямая Γ_2 на фиг. 2). Эти движения определены в диапазоне $K > K^*$, который начинается с тех значений кинетического момента, в которых заканчивается диапазон устойчивости решений (4.6).

Заметим, что на устойчивых движениях (4.7) также выполняется условие $\mathbf{H} \cdot \mathbf{K} > 0$, а сами эти движения представляют собой вращения вокруг оси, лежащей в плоскости наибольшего и среднего моментов инерции. Для каждого значения кинетического момента системы $K > K^*$ число устойчивых движений (4.7) равно четырем.

Резюмируя результаты анализа, приходим к следующим выводам.

Если ось рамки гироскопа установлена параллельно оси наименьшего или среднего момента инерции, то для каждого значения кинетического момента из диапазона $K > 0$, кроме точки $K = H$, система имеет два устойчивых движения. Первое движение определяется решением (4.6), где $K_1 > 0$, а второе – симметричным ему решением, для которого $x = \pi$, $K_1 < 0$. При этом кинетический момент ротора направлен по кинетическому моменту системы и параллелен оси наибольшего момента инерции.

Если ось рамки гироскопа установлена параллельно оси наибольшего момента инерции, то для устойчивых движений кинетический момент ротора параллелен оси среднего момента инерции ($x = 0, x = \pi$). При этом в диапазоне $0 < K < K^*$ система имеет два устойчивых движения вида (4.6), а в диапазоне $K > K^*$ – четыре устойчивых движения вида (4.7).

Пример 2. Система имеет два гироскопа с осями подвесов рамок, параллельными одной и той же главной оси инерции \mathbf{e}_3 . Значения кинетических моментов роторов обозначим через H_1 и H_2 ($H_1 \geq H_2 > 0$). Для суммарного кинетического момента роторов получим выражение

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^2 H_k (\mathbf{e}_1 \cos x_k + \mathbf{e}_2 \sin x_k)$$

а уравнения (3.1) для стационарных движений принимают вид

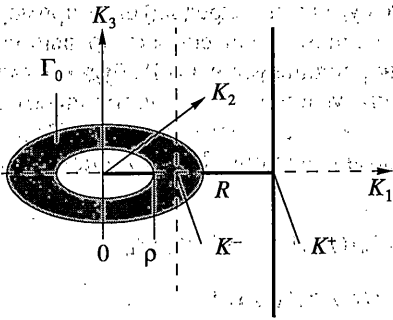
$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{e}_3^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_k) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (4.17)$$

Неподвижным положениям системы соответствуют решения

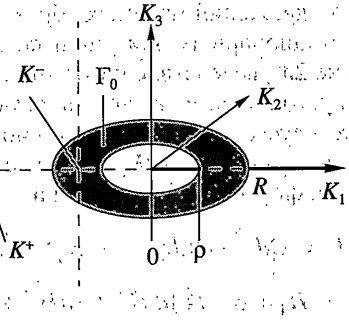
$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r) = (0, 0, 0), \quad x_1, x_2 \in [0, 2\pi] \quad (4.18)$$

Область значений кинетического момента \mathbf{K} для решений (4.18) представляет собой кольцо Γ_0 , расположенное в плоскости $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ с внешним радиусом $R = H_1 + H_2$ и внутренним радиусом $\rho = H_1 - H_2$ (фиг. 4, 5).

Из скалярных уравнений (4.17) следует, что возможны два варианта (фиг. 4 ($C > A > B$); фиг. 5 ($C < A > B$)) стационарных движений с ненулевой угловой скоростью: 1) вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по оси \mathbf{e}_3 ($\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = 0$); 2) векторы $\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{H}_1$ и \mathbf{H}_2 компланарны.



Фиг. 4



Фиг. 5

В случае 1) из векторного уравнения системы (4.17) получим $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{H} = 0$, откуда в силу ортогональности векторов \mathbf{e}_3 и \mathbf{H} имеем $\mathbf{H} = 0$. Последнее равенство может выполняться только при равных по величине кинетических моментах гироскопов $H_1 = H_2$. При этом соответствующие стационарные движения будут иметь вид

$$\boldsymbol{\omega} = r\mathbf{e}_3 (r \neq 0), \quad x_2 = x_1 + \pi, \quad x_1 \in [0, 2\pi]. \quad (4.19)$$

В случае 2) из компланарности векторов \mathbf{e}_3 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 следует коллинеарность векторов \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 . Поэтому на стационарных движениях углы подчиняются соотношениям $x_1 = x_2$, или $x_1 = x_2 + \pi$, а для суммарного кинетического момента роторов будем иметь $\mathbf{H} = H(\mathbf{e}_1 \cos x_1 + \mathbf{e}_2 \sin x_1)$, где $H = H_1 + H_2^*$, $H_2^* = \pm H_2$. Для каждого из указанных значений H_2^* уравнения (4.17) будут совпадать с уравнениями (4.1), и поэтому их решения можно получить из решений (4.6) и (4.7), если положить $x_1 = x$. Для группы решений, которая соответствует случаю $x_1 = x = 0$, получим

$$x_1 = x_2 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_1 \in (-\infty, +\infty) \quad (4.20)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_1 \in (-\infty, +\infty) \quad (4.21)$$

$$x_1 = x_2 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_1 = K^+ = CR/(C-A), \quad K_3 \in (-\infty, +\infty) \quad (4.22)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi, \quad K_2 = 0, \quad K_1 = K^- = C\rho/(C-A), \quad K_3 \in (-\infty, +\infty) \quad (4.23)$$

Графики решений приведены на фиг. 4 и фиг. 5. Анализ этих графиков и учет решений, соответствующих остальным трем значениям угла $x_1 = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ показывает, что в зависимости от величины кинетического момента K система имеет либо 16, либо 20, либо 24, либо 28, либо 32 стационарных движения с ненулевой угловой скоростью.

Что касается нестационарных равновесных движений системы, то проведенный анализ, подробности которого здесь опустим, приводит к следующим выводам, аналогичным примеру 1. Указанные движения существуют только при наличии динамической симметрии относительно главной оси, перпендикулярной оси подвеса рамок ($B = C$), и если выполняется дополнительное условие $H_1/H_2 = I_1/I_2$. На этих движениях оси роторов обоих гироскопов располагаются параллельно оси симметрии, причем $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 > 0$. При этом траектории движения описываются уравнением (4.13), где $H = H_1 + H_2$, $I = I_1 + I_2$, а движения представляют собой регулярные прецессии вокруг направления кинетического момента. Эти траектории обладают тем же свойством изолированности от стационарных движений.

нарных движений на многообразии (2.3). Поэтому, как и в предыдущем примере, для всех стационарных движений системы с ненулевой угловой скоростью выполняется условие $2\alpha^\circ$, вследствие чего движения, удовлетворяющие условию 1° , будут асимптотически устойчивыми, а движения, удовлетворяющие условию 3° , – неустойчивыми.

Исследуем устойчивость стационарных движений. На решениях (4.20–4.21) для множителя имеем $2\mu = -p/K_1$, а для квадратичной формы функции Лагранжа получим на основании формул (3.9) выражение

$$d^2L = Cdr^2 + Bdq^2 - (p/K_1)[C^2dr^2 + B^2dq^2 + 2B(H_1dx_1 + H_2^*dx_2)dq - (ApH_1 + H_1H_2^*)dx_1^2 - (ApH_2^* + H_1H_2^*)dx_2^2 + 2H_1H_2^*dx_1dx_2]$$

Условия положительности диагональных миноров матрицы этой квадратичной формы описываются системой неравенств

$$\begin{aligned} C(1 - Cp/K_1) > 0, \quad p(Ap + H_1)H_2^*/K_1 > 0 \\ p^2ApH_1H_2^*/K_1 > 0, \quad p^2BH_1H_2^*(A - B)p/K_1 > 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Рассмотрим движения с ненулевой угловой скоростью ($p \neq 0$) и проанализируем сначала второе и третье неравенства системы (4.24). Выражая из соотношения $K_1 = Ap + H$ переменную p и учитывая положительность H_1 , преобразуем эти неравенства к виду

$$(K_1 - H)(K_1 - H_2^*)H_2^*/K_1 > 0, \quad H_2^*(K_1 - H)/K_1 > 0$$

Отсюда для решений (4.20) $H_2^* = H_2 \Rightarrow H = R$ получим неравенства

$$K_1 > 0, \quad (K_1 - H)/K_1 > 0 \Rightarrow K_1 > R \quad (4.25)$$

Для решений (4.21) $H_2^* = -H_2 \Rightarrow H = \rho$ будем иметь

$$K_1 > 0, \quad (K_1 - H)K_1 < 0 \Rightarrow 0 < K_1 < \rho \quad (4.26)$$

Из неравенства $K_1 > 0$ следует, что для устойчивости движений (4.20–4.21) суммарный кинетический момент гироскопов $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ должен быть направлен по кинетическому моменту системы: $\mathbf{H} \cdot \mathbf{K} > 0$.

Из неравенств (4.25) и (4.26) следует также, что в диапазоне значений кинетического момента $\rho < K < R$ все стационарные движения (4.20–4.21) удовлетворяют условию 3° , т.е. являются неустойчивыми.

Четвертое неравенство системы (4.24) при учете предыдущих дает $A > B$. Отсюда следует, что на устойчивых движениях вектор \mathbf{H} располагается параллельно той из двух главных осей, относительно которой момент инерции больше. Первое неравенство (4.24) в совокупности с (4.25) и (4.26) определяет диапазон значений кинетического момента системы, при которых рассматриваемые движения устойчивы. В случае $A > C$ оно выполняется, если выполняются остальные неравенства, а в случае $A < C$ для решений (4.20) дает дополнительно к (4.25) ограничение $K_1 < CR(C - A)$.

Количество устойчивых движений вида (4.20–4.21) для каждого значения кинетического момента из диапазона устойчивости равно двум.

На решениях (4.22–4.23) получим квадратичную форму

$$\begin{aligned} Cd^2L = A(C - A)dp^2 + B(C - B)dq^2 - 2B(H_1dx_1 + H_2^*dx_2)dq + \\ + H_1[AH/(C - A) + H_2^*]dx_1^2 + H_2^*[AH/(C - A) + H_1]dx_2^2 - 2H_1H_2^*dx_1dx_2 \end{aligned}$$

Условия ее положительной определенности описываются неравенствами

$$C > A, \quad A > B, \quad H_2^* > 0 \quad (4.27)$$

Первые два неравенства показывают, что рассматриваемые движения могут быть устойчивыми только в случае, если оси рамок гироскопов установлены параллельно оси наибольшего момента инерции, а оси роторов параллельны оси среднего момента инерции. Из последнего неравенства следует, что кинетические моменты обоих роторов должны быть направлены в одну сторону, т.е. устойчивыми могут быть только решения (4.22). Область устойчивости этих движений совпадает с областью их существования и определяется неравенством $K > K^* = CR/(C - A)$. При этом для устойчивых движений выполняется соотношение $\mathbf{H} \cdot \mathbf{K} > 0$, а число устойчивых движений для каждого значения $K > K^*$ равно четырем.

Для решений (4.19), если они существуют, множитель будет определяться выражением $2\psi = -1/C$ и из последней формулы (3.9) получим, что два диагональных элемента матрицы квадратичной формы функции Лагранжа будут иметь вид $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2/C < 0$. Отсюда следует вывод о неустойчивости этих движений.

Исследуем теперь на устойчивость решения (4.18), соответствующие неподвижным состояниям системы. Для этих решений будем рассматривать вопрос об устойчивости по отношению к части переменных, а именно, по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и скоростям $\dot{\mathbf{x}}$.

Поскольку на решениях (4.18) функция Ляпунова (1.1) имеет безусловный минимум (нестрогий), а в окрестности каждого из этих решений является строго положительно определенной по переменным $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\mathbf{x}}$, то наличие простой (не асимптотической) устойчивости по отношению к этим переменным следует из приведенной в [4] теоремы 5.1.

Асимптотическая устойчивость по отношению к переменным $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\mathbf{x}}$ имеет место для решений (4.18), лежащих внутри кольца Γ_0 , т.е. когда величина суммарного кинетического момента роторов удовлетворяет неравенству $\rho < H < R$. Этот факт доказывается на основе приведенной в [4] теоремы 19.2. При этом используются результаты проведенного выше анализа, из которого следует, что в окрестности множества решений (4.18), удовлетворяющих неравенству $\rho < H < R$, нет других траекторий равновесных движений, кроме неподвижных состояний системы.

Резюмируя результаты анализа, перечислим все устойчивые движения для различных вариантов установки гироскопов в зависимости от величины кинетического момента системы.

1). Оси рамок гироскопов установлены параллельно оси наименьшего или среднего момента инерции. В этом случае, полагая, что ось \mathbf{e}_1 соответствует наибольшему моменту инерции, имеем такую картину (фиг. 5):

в интервале $0 < K < \rho$ устойчивыми являются движения (4.21) при $K_1 \in (0, \rho)$, а также симметричные им движения, для которых $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$, $K_1 \in (-\rho, 0)$. В интервале $\rho < K < R$ устойчивыми являются неподвижные состояния системы (4.18). В интервале $K > R$ устойчивыми являются движения (4.20), где $K_1 \in (R, +\infty)$, и симметричные им движения, для которых $x_1 = x_2 = \pi$, $K_1 \in (-\infty, -R)$.

2). Оси рамок гироскопов установлены параллельно оси наибольшего момента инерции. В этом случае ось \mathbf{e}_1 соответствует среднему моменту инерции, а картина устойчивых движений такова (фиг. 4):

в интервале $0 < K < \rho$ устойчивыми являются движения (4.21) при $K_1 \in (0, \rho)$ и симметричные им движения, для которых $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$, $K_1 \in (-\rho, 0)$. В интервале $\rho < K < R$ — неподвижные состояния (4.18). Для интервала $R < K < K^*$ устойчивыми являются движения (4.20), где $K_1 \in (R, K^*)$, и симметричные им движения, для которых $x_1 = x_2 = \pi$, $K_1 \in (-K^*, -R)$. В интервале $K > K^*$ устойчивыми являются движения (4.22) и симметричные им движения, для которых $x_1 = x_2 = \pi$, $K_1 = -K^*$.

Устойчивые движения изображены на фиг. 4 и 5 жирными линиями.

Отметим, что все перечисленные устойчивые стационарные движения с ненулевой угловой скоростью обладают также и условной асимптотической устойчивостью, а неподвижные состояния (4.18) – безусловной асимптотической устойчивостью. Асимптотическая устойчивость неподвижных состояний и отсутствие других устойчивых движений в диапазоне $\rho < K < R$ позволяет сделать вывод о том, что система обладает способностью приходить в состояние покоя из любого начального состояния, для которого величина кинетического момента принадлежит интервалу (ρ, R) .

Автор выражает благодарность В.Ф. Журавлеву за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической целевой программы Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008)”, проект № 6827.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин Н.И. О движениях твердого тела, содержащего двухстепенные силовые гироскопы с диссипацией в осях рамок // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 4. С. 19–30.
2. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
3. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 254 с.
5. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: “Эдиториал УРСС”, 1998. 168 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.02.2005