

© 2007 г. А.В. ЕРМОЛЕНКО, М.В. ПОЛОНИК

**О ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ ЗА СЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ
ИМПУЛЬСНОЙ ИЛИ УДАРНОЙ ОБРАБОТКИ**

В рамках теории больших упругопластических деформаций изучается динамика одиночного дефекта сплошности при скачкообразном увеличении гидростатического давления (ударное нагружение) с последующим его мгновенным снятием (разгрузка). Отмечается высокий уровень напряжений, формирующихся в окрестности дефекта, способный привести к его "заливанию".

Введение. Известно значительное повышение эксплуатационных характеристик изделий из материалов, прошедших предварительную обработку ковкой. Материаловедение объясняет такой эффект регуляризацией внутренней структуры металлических заготовок и исчезновением в кованых материалах микродефектов сплошности (микротрещины, микропоры). Соответствующее объяснение данного обстоятельства средствами механики деформируемого твердого тела отсутствует из-за сложности процессов, происходящих в материале при ударных воздействиях на него. Главная сложность связана здесь с принципиальной необходимостью учета упругих свойств интенсивно деформируемых металлов, так как высокоскоростное деформирование не может моделироваться при исключении упругого отклика материала на ударное воздействие. Однако классические теории упругости, например, математическая модель Прандтля–Рейса предполагают малость деформаций, что для рассматриваемого процесса деформирования в окрестности дефектов сплошности неправомочно. Действительно, перемещения частиц деформируемой сплошной среды в таких окрестностях сравнимы по величине с размерами дефекта сплошности и, следовательно, деформации нельзя полагать малыми. Общепринятой теории больших упругопластических деформаций до настоящего времени не существует. В настоящей статье в целях моделирования динамики одиночного дефекта сплошности используется теория [1], которая достаточно хорошо зарекомендовала себя в задачах формирования полей остаточных напряжений при квазистатических нагрузлениях [2–5]. Обобщение данной теории на неизотермический случай было проведено в [6].

Следует отметить основные отличия в постановке задачи ударного деформирования от соответствующей задачи в квазистатической постановке [3–5]. В последнем случае задача развития области пластического течения в качестве начальных условий содержит упругое равновесие при выполнении на граничной поверхности дефекта условия пластиичности. При ударном деформировании необходимо проследить за динамикой границы дефекта, так как пластическое течение, демпфирующее колебания границы, возникает уже на первом полупериоде таких колебаний, внося качественные изменения в закон движения граничной поверхности дефекта. То же относится и к задаче о разгрузке среды: При этом уровень остаточных напряжений оказывается существенно большим, чем при медленном нагружении, а размеры дефекта существенно меньшими. Это позволяет "заливать" дефекты сплошности, что и приводит к повышению длительной прочности.

1. Определяющие соотношения модели. Используемая модель неоднократно была описана в [1–6], потому здесь приведем только определяющие ее соотношения, необходимые для решения намеченной цели. Как и в [1] будем считать, что разделение тензора деформаций Альманси d_{ij} на обратимую e_{ij} и необратимую p_{ij} составляющие подчиняется закону

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - 1/2e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{jk}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj} \quad (1.1)$$

Как и в [3] можно получить в качестве следствия закона сохранения энергии и гипотезы о независимости свободной энергии от необратимых деформаций формулу Мурнагана

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad (1.2)$$

для определения напряжений. Здесь p – добавочное гидростатическое давление, возникающее вследствие условия несжимаемости среды. Считая упругопластическую среду изотропной, выберем упругий потенциал $W = W(L_1, L_2)$ в форме

$$W = (\alpha - \mu)L_1 + aL_2 + bL_1^2 - \kappa L_1 L_2 - \theta L_1^2, \quad L_1 = d_{ii}, \quad L_2 = d_{ij}d_{ji} \quad (1.3)$$

Постоянные $\mu, a, b, \kappa, \theta$ – являются упругими модулями среды; они определяются в экспериментах. Зависимости (1.2) и (1.3) справедливы, когда в среде отсутствуют необратимые деформации $p_{ij} \equiv 0$. В этом случае для тензора деформаций Альманси (1.1) имеем его связь с компонентами u_i вектора перемещений среды

$$d_{ij} = e_{ij} - 1/2e_{ik}e_{kj} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1.4)$$

При наличии в среде необратимых деформаций $p_{ij} \neq 0$ инварианты L_1 и L_2 следует заменить в (1.3) инвариантами тензора обратимых деформаций I_1 и I_2 :

$$I_1 = e_{ii} - 1/2e_{ij}e_{ji}, \quad I_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ik}e_{kj}e_{ji} + 1/4e_{ik}e_{ks}e_{sj}e_{ji}$$

что обеспечит предельный переход в вычислении напряжений от формулы

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - e_{kj}) \quad (1.5)$$

к формуле (1.2) при стремлении к нулю пластических деформаций p_{ij} .

Пластическое течение в среде считается идеальным [7]. Принимаются условия принципа максимума Мизеса

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\varepsilon_{ij}^p > 0 \quad (1.6)$$

где σ_{ij} – действительные компоненты напряжения, σ_{ij}^* – компоненты тензора напряжений в любом допускаемом заданной неподвижной поверхностью нагрузления ($f(\sigma_{ij}) \leq k$) напряженном состоянии, ε_{ij}^p – скорость пластических деформаций, k – предел упругости. При активном нагружении $(df/d\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}^p > 0$ в условиях (1.6) следует ассоциированный закон пластического течения. В расчетах в качестве поверхности нагрузления $f(\sigma_{ij}) = k$ использовалась призма Треска.

2. Постановка задачи. Условие упругого состояния деформируемого материала. Рассмотрим в качестве цилиндрического дефекта сплошности радиуса r_0 трещину в материале. Данный размер полагаем существенно меньшим по сравнению с длиной трещины, что позволяет считать движение среды в областях, удаленных от концов трещины, одно-

мерным. Далее будем считать, что внешнее давление в момент времени $t = 0$ меняется скачкообразно до значения P_0 на некоторой поверхности в материале $r = R_0$ ($R_0 \gg r_0$). При этом внутренняя поверхность (граница дефекта сплошности) остается свободной от нагружения. Данные условия являются граничными и в используемой далее цилиндрической системе координат (r, θ, z) записутся следующим образом:

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P_0, \quad \sigma_{\theta\theta}|_{r=s(t)} = 0. \quad (2.1)$$

В (2.1) $R(t)$ и $s(t)$ – радиусы внешней и внутренней цилиндрической поверхности соответственно в некоторый текущий момент времени.

Напряжения в среде определяются зависимостью (1.2) и (1.4):

$$\sigma_{rr} = -p(r) + \xi(\eta), \quad \sigma_{\theta\theta} = -p(r) + \xi(\eta^{-1}) \quad (2.2)$$

В (2.2) приняты следующие обозначения:

$$\xi(\eta) = a_1(1-\eta^{-3}) + a_2(1-\eta^{-2}) + a_3(1-\eta^{-1}) + a_4(\eta-1) + a_5(\eta^2-1)$$

$$a_1 = 3/4(\kappa+\theta), \quad a_2 = a+b-3/4(3\kappa+5\theta), \quad a_3 = \mu-2a-3b+5/2(\kappa+3\theta)$$

$$a_4 = b-3/4(\kappa+5\theta), \quad a_5 = 1/4(\kappa+3\theta), \quad d_{rr} = u_{r,r}-0.5u_{r,r}^2 = 0.5(1-\eta^{-1})$$

$$d_{\theta\theta} = u_{r,r}^{-1} - 0.5(u_{r,r}^{-1})^2 = 0.5(1-\eta), \quad u_{r,r} = \partial u_r / \partial r$$

Так как решение рассматривалось для несжимаемой среды ($(1-u_{r,r})(1-u_{r,r}^{-1})=1$), единственная отличная от нуля компонента перемещений $u_r = u$ зависит от некоторой функции времени $\phi(t)$:

$$u = r - (r^2 + \phi(t))^{1/2}, \quad \phi(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t), \quad \eta = 1 + \phi(t)r^{-2}$$

для которой из уравнения движения

$$\sigma_{rr,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})r^{-1} = \rho_0 d\psi / dt, \quad \dot{\psi}_r = -\phi(t)r^{-2} \quad (2.3)$$

и (2.2) с использованием граничных условий (2.1) следует обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\zeta(1+\phi(t)s^{-2}(t), 1+\phi(t)R^{-2}(t)) - P_0 = \psi(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t), s(t), R(t)) \quad (2.4)$$

В (2.3) ρ_0 – плотность среды в недеформированном состоянии, в (2.4) функции ζ и ψ определены следующим образом:

$$\psi(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t), s(t), R(t)) = \frac{\rho_0}{2} \left(\ddot{\phi}(t) \ln \frac{s(t)}{R(t)} + \frac{\dot{\phi}^2(t)}{4} (R^{-2}(t) - s^{-2}(t)) \right)$$

$$\zeta(x, y) = a_6 \ln xy^{-1} + a_7(x-y) + a_8((x-1)^2 + (y-1)^2) +$$

$$+ a_9((x-1)^3 - (y-1)^3) + a_{10}(y^{-1} - x^{-1}) + a_{11}((1-y^{-1})^2 - (1-x^{-1})^2)$$

$$a_6 = 1/2(\mu - a - b + 1/2(\kappa + 3\theta)), \quad a_7 = 1/2\mu, \quad a_8 = 1/4(a + b + 1/4(\kappa - 3\theta))$$

$$a_9 = 1/6a_1, \quad a_{10} = -a_6 + 1/2\mu, \quad a_{11} = 1/4a_1, \quad x = \eta(s(t)) = r_0^2 s^{-2}(t)$$

$$y = \eta(R(t)) = R_0^2 R^{-2}(t), \quad s(t) = (r_0^2 - \phi(t))^{1/2}, \quad R(t) = (R_0^2 - \phi(t))^{1/2}$$

Для дифференциального уравнения (2.4) примем следующие начальные условия:

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) с начальными условиями (2.5) имеет численное решение. Зависимость (2.2) для компонент напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ выпишем от функции $\phi(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \zeta(\eta, y) - P_0 - \psi(\phi(t), \dot{\phi}(t), \ddot{\phi}(t), r, R(t)) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - \xi(\eta) + \xi(\eta^{-1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

При этом граница дефекта в процессе деформирования будет изменяться по следующему закону

$$s(t) = (r_0^2 - \phi(t))^{1/2} \quad (2.7)$$

Численные расчеты показывают, что ударное (импульсное) нагружение сопровождается колебаниями на поверхности дефекта. В зависимости от прикладываемой внешней нагрузки P_0 колебания среды могут приводить к двум различным результатам.

Если прикладываемое внешнее давление P_0 не превышает P_1 , то среда деформируется упруго и в окрестности дефекта ($s(t) < r \leq R(t)$) выполняется условие

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \xi(\eta) - \xi(\eta^{-1}) < 2k \quad (2.8)$$

Условие пластичности

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \xi(\eta(s_0)) - \xi(\eta^{-1}(s_0)) = 2k \quad (2.9)$$

может быть выполнено лишь на поверхности дефекта $r = s_0$ в момент $t = t_1$. Тогда решение дифференциального уравнения (2.4) с ограничивающим условием (2.9) дает возможность связать параметр s_0 с параметром P_1 и получить для них численное решение.

Если прикладываемая нагрузка P_0 превышает значение P_1 ($P_0 > P_1$), то при таком нагружении в окрестности дефекта возникает пластическое течение. За счет включения такого мощного диссилиативного механизма, каким является пластичность, колебания граничной поверхности дефекта $r = s(t)$ гасятся. При этом условие (2.9) остается справедливо не только на самой границе дефекта $r = s(t)$, но и в некоторой прилегающей к ней области $s(t) \leq r \leq r_1(t)$. Таким образом, в дальнейшем возникает необходимость в отдельном рассмотрении такого процесса.

3. Диссилиативный процесс в окрестности дефекта сплошности. Развитие пластического течения или диссилиативный процесс в окрестности дефекта, как уже было определено, возникает при некоторой ударной нагрузке $P_0 > P_1$, при которой в процессе всего деформирования условие (2.9) остается справедливо в некоторой области $s(t) \leq r \leq r_1(t)$:

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|_{s(t) \leq r \leq r_1(t)} = 2k \quad (3.1)$$

Функция $r_1(t)$ задает движение границы пластического течения, делящей среду на две зоны: упругую $r_1(t) \leq r \leq R(t)$ и упругопластическую $s(t) \leq r \leq r_1(t)$.

Заметим, что деформирование среды осуществляется при граничных условиях (2.1). Теперь определить компоненты напряжений в области $r_1(t) \leq r \leq R(t)$ не составляет труда: они определены в п. 2. Таким образом, из (2.6) с учетом первого условия (2.1) следует

$$\sigma_{rr} = \zeta(\eta, y) - P_0 - \psi(\phi_1(t), \dot{\phi}_1(t), \ddot{\phi}_1(t), r, R(t)), \quad (3.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \xi(\eta) + \xi(\eta^{-1})$$

Теперь η и y определяются функцией $\varphi_1(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ следующим образом $\eta = 1 + \varphi_1(t)r^{-2}(t)$, $y = \eta(R(t))$.

Для определения нагружений в области $s(t) \leq r \leq r_1(t)$ необходимо проинтегрировать уравнение движения (2.3), заменив согласно (3.1) разность напряжений $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ на $2k$ и учитывая второе граничное условие (2.1). Таким способом найдем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2k \ln s(t) r^{-1} - \psi(\varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \ddot{\varphi}_1(t), r, s(t)) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - 2k\end{aligned}\quad (3.3)$$

Согласно модели, в рамках которой рассмотрено решение, на границе упругопластической области осуществляется предельный переход, позволяющий считать, что компоненты перемещений на этой границе не претерпевают разрыв, то есть значения напряжений, определяемые выражениями (3.2) и (3.3), на границе $r = r_1(t)$ совпадают. При этом $r_1(t)$ выражается через функцию $\varphi_1(t)$, для которой можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}\zeta(z, y) - P_0 - 2k \ln s(t) r_1^{-1}(t) - \psi(\varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \ddot{\varphi}_1(t), s(t), R(t)) &= 0 \\ z = \eta(r_1(t)) &= 1 + \varphi_1(t) r_1^{-2}(t), \quad r_1(t) = (\varphi_1(t)(x(s_0) - 1)^{-1})^{1/2}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) следует решить численно при следующих начальных условиях:

$$\varphi_1(t_1) = r_0^2 - s_0^2 = r_0^2(1 - x^{-1}(s_0)) = \varphi(t_1), \quad \dot{\varphi}_1(t_1) = \dot{\varphi}(t_1) = \text{const} \quad (3.5)$$

Напряженное состояние среды может быть вычислено зависимостями (3.2) и (3.3) при численном решении (3.4).

Далее для описания всего процесса остается рассмотреть разгрузочное состояние среды.

4. Остаточные напряжения после импульсного нагружения. В [3] было подробно описано разгрузочное состояние материала в окрестности дефекта сплошности, подвергавшегося медленному всестороннему сжатию. При этом было выявлено и рассмотрено очень важное явление повторного пластического течения, возникающее в процессе разгрузки в окрестности дефекта $s_p(t) \leq r \leq r_2(t)$, когда

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|_{s_p(t) \leq r \leq r_2(t)} = -2k \quad (4.1)$$

Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ при этом становятся растягивающими. Следует заметить, что данное явление в [3] не всегда имеет место. Возможны случаи, когда такой ситуации можно избежать.

Здесь же, предполагая, что прикладываемая ударная нагрузка $P_0 \gg P_1$, рассмотрим динамику процесса разгрузки в рамках граничных условий

$$\sigma_{rr}|_{r=s_p(t)} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_p(t)} = 0 \quad (4.2)$$

При этом условие (4.1) выполнится впервые на поверхности дефекта $r = s_p$, а далее, в процессе разгрузки, и в некоторой прилегающей к ней области $s_p(t) \leq r \leq r_2(t)$. Функция $r_2(t)$ задает движение границы зоны повторного пластического течения и делит упругопластическую область на две. Теперь область $r_2(t) \leq r \leq r_{1p}(t)$ – зона с накопленными в процессе деформирования необратимыми деформациями. Область $r_{1p}(t) \leq r \leq R_p(t)$ по-прежнему остается областью упругого деформирования, а напряжения в ней определяются зависимостью (2.6) с учетом второго условия (4.2):

$$\sigma_{rr} = \zeta(\eta, y) - \psi(\phi_2(t), \dot{\phi}_2(t), \ddot{\phi}_2(t), r, R_p(t)) \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} - \xi(\eta) + \xi(\eta^{-1})$$

Функция $\phi_2(t) = R_0^2 - R_p^2(t) = r_0^2 - s_p^2(t)$, при этом $\eta = 1 + \phi_2(t)r^{-2}$, $y = \eta(R_p(t)) = R_0^2 R_p^{-2}(t)$.

В области $r_2(t) \leq r \leq r_1(t)$ напряжения, следуя принятой модели, могут быть вычислены зависимостью (1.5) по найденным согласно (1.1) упругим деформациям через известные полные и не изменяющиеся в процессе разгрузки пластические деформации [3–5]:

$$\sigma_{rr} = -p(r) + \gamma(B), \quad \sigma_{\theta\theta} = -p(r) + \gamma(B^{-1}) \quad (4.4)$$

$$\gamma(B) - \gamma(B^{-1}) = a_1(B^3 - B^{-3}) + c_2(B^2 - B^{-2}) + c_3(B - B^{-1})$$

$$e_{rr} = 1 - B^{-1/2}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - B^{1/2}, \quad B = \eta_2 x(s_0)$$

$$\eta_2 = 1 + (\phi_2(t) - \phi_1(t_2))r^{-2}$$

Интегрируя уравнение движения (2.3) с учетом (4.4) и первого граничного условия (4.2), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \tau(y_1, \eta_2) - \psi(\phi_2(t), \dot{\phi}_2(t), \ddot{\phi}_2(t), r, s_p(t)) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + \gamma(B^{-1}) - \gamma(B) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \tau(y_1, \eta_2) &= c_3 \ln(\eta_2 - 1)(y_1 - 1)^{-1} + c_4(y_1 - \eta_2) + c_6(\eta_2^{-1} - y_1^{-1}) + \\ &+ c_5 \ln(\eta_2 - 1)(y_1 - 1)^{-1} y_1 \eta_2^{-1} + c_7((y_1 - 1)^2 - (\eta_2 - 1)^2) + \\ &+ c_8((y_1 - 1)^3 - (\eta_2 - 1)^3) + c_9((1 - \eta_2^{-1})^2 - (1 - y_1^{-1})^2) \end{aligned}$$

$$y_1 = \eta_2(s_p(t)) = 1 + (\phi_2(t) - \phi_1(t_2))s_p^{-2}(t), \quad x = x(s_0) = r_0^2 s_0^{-2}$$

$$c_3 = 0.5(xc_1 + x^2 c_2 + x^3 a_1), \quad c_4 = -0.5(xc_1 + 2x^2 c_2 + 3x^3 a_1)$$

$$c_5 = -0.5(x^{-1} c_1 + x^{-2} c_2 + x^{-3} a_1), \quad c_6 = -0.5(x^{-2} c_2 + x^{-3} a_1)$$

$$c_7 = -1/4(x^2 c_2 + 3x^3 a_1), \quad c_8 = -1/6 a_1 x^3, \quad c_9 = 1/4 a_1 x^{-3}$$

Уравнения (4.3) и (4.5) позволяют выписать дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\Phi_2(t)$:

$$\tau(y_1, y_3) - \zeta(y_4, y) - \psi(\phi_2(t), \dot{\phi}_2(t), \ddot{\phi}_2(t), R_p(t), s_p(t)) = 0 \quad (4.6)$$

$$r_{1p}(t) = (r_1^2(t_2) - \phi_2(t) + \phi_1(t_2))^{1/2}, \quad y_4 = \eta(r_{1p}(t)) = 1 + \phi_2(t)r_{1p}^{-2}(t)$$

$$y_3 = \eta_2(r_{1p}(t)) = 1 + (\phi_2(t) - \phi_1(t_2))r_{1p}^{-2}(t)$$

Решая (4.6) при начальных условиях

$$\phi_2(t_2) = \phi_1(t_2), \quad \dot{\phi}_2(t_2) = 0, \quad t_2 \leq t \leq t_3 \quad (4.7)$$

и условии $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|_{r=s_p} = -2k$, следующим из (4.1), определим радиус дефекта $r = s_p$, в окрестности которого в момент времени $t = t_3$ в процессе разгрузки среды возникает повторное пластическое течение.

Дальнейший процесс разгрузки, как уже отмечалось, следует рассматривать с учетом новой области $s_p(t) \leq r \leq r_2(t)$, напряжения в которой могут быть определены из уравнения движения (2.3) при выполнении условия (4.1) (при этом разность напряжений $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ в уравнении движения следует заменить $-2k$) и первого граничного условия (4.2):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -2k \ln s_p(t) r^{-1} - \psi(\phi_3(t), \dot{\phi}_3(t), \ddot{\phi}_3(t), r, s(t)) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + 2k\end{aligned}\quad (4.8)$$

В области упругого деформирования $r_{1p} \leq r \leq R_p(t)$ напряжения определяются как и в (4.3) зависимостью

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \zeta(\eta, y) - \psi(\phi_3(t), \dot{\phi}_3(t), \ddot{\phi}_3(t), r, R_p(t)) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + \xi(\eta) - \xi(\eta^{-1})\end{aligned}\quad (4.9)$$

теперь $\eta = 1 + \phi_3(t)r^{-2}$, $y = 1 + \phi_3(t)R_p^{-2}(t)$.

И, наконец, для области $r_2(t) \leq r \leq r_{1p}(t)$, с учетом интегрирования уравнения движения (2.3) как и для (4.5), но теперь уже в качестве граничного условия будем использовать равенство напряжений на границе упругопластической области $r_{1p}(t)$, получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \tau(y_2, \eta_2) - \zeta(z, y) - \psi(\phi_3(t), \dot{\phi}_3(t), \ddot{\phi}_3(t), r, R_p(t)) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + \gamma(B^{-1}) - \gamma(B) \\ y &= \eta_2(R_p(t)), \quad \eta_2 = 1 + (\phi_3(t) - \phi_1(t_2))r^{-2}, \quad y_2 = \eta_2(r_{1p}(t)), \\ z &= \eta(r_{1p}(t)) = 1 + \phi_3(t)r_{1p}^{-2}(t)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Движение границ $r_{1p}(t)$ и $r_2(t)$ вычисляются зависимостями

$$\begin{aligned}r_{1p}(t) &= (r_1^2(t_2) - \phi_3(t) + \phi_1(t_2))^{1/2} = \left(\frac{\phi_1(t_1)}{x-1} - \phi_3(t) + \phi_1(t_2) \right)^{1/2} \\ r_2(t) &= \left(\frac{x(\phi_3(t) - \phi_1(t_2))}{B(s_p) - x} \right)^{1/2} = s_p \left(\frac{\phi_3(t) - \phi_1(t_2)}{\phi_2(t_3) - \phi_1(t_2)} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (4.11)$$

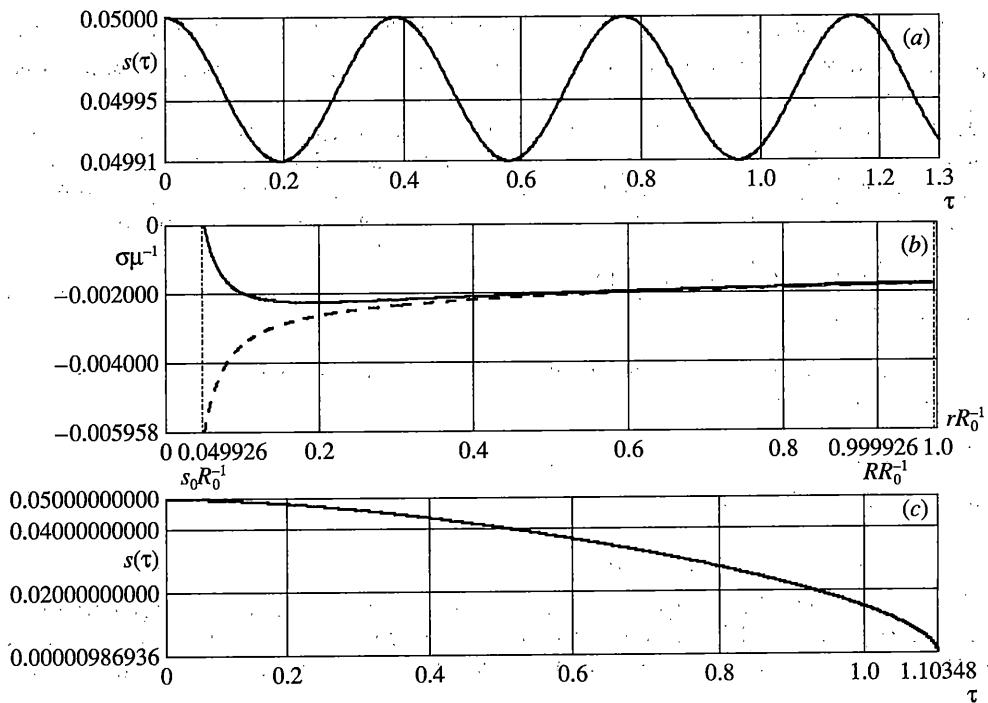
Условие равенства напряжений (4.8) и (4.10) на границе области повторного пластического течения $r = r_2(t)$ приводит к дифференциальному уравнению для функции $\phi_3(t)$:

$$\begin{aligned}\tau(y_2, y_5) - \zeta(z, y) + 2k \ln s_p(t) r_2^{-1}(t) - \psi(\phi_3(t), \dot{\phi}_3(t), \ddot{\phi}_3(t), s_p(t), R_p(t)) &= 0 \\ y_5 &= \eta_2(r_2(t)) = 1 + (\phi_3(t) - \phi_1(t_2))r_2^{-2}\end{aligned}\quad (4.12)$$

с начальными условиями:

$$\phi_3(t_3) = \phi_2(t_3), \quad \dot{\phi}_3(t_3) = \dot{\phi}_2(t_3) \quad (4.13)$$

Приведем здесь некоторые характерные результаты расчетов при импульсном нагружении материала с дефектом сплошности $r_0 R_0^{-1} = 0.05$ и следующих постоянных: $a\mu^{-1} = 0.9$, $b\mu^{-1} = 4$, $c\mu^{-1} = 20$, $\theta\mu^{-1} = 80$, $k\mu^{-1} = 0.00297933055$. При этом модуль сдвига



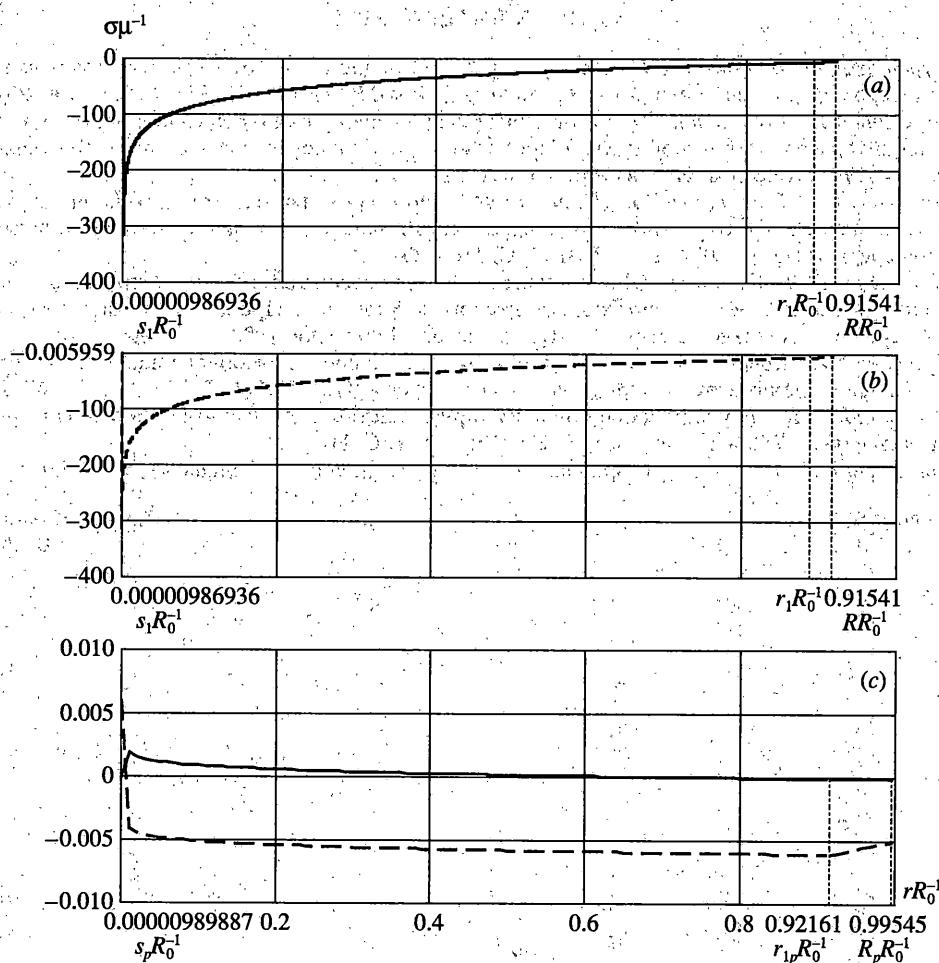
Фиг. 1

$\mu = 25 \cdot 10^9$ Па. На всех фигурах $\sigma_{rr}\mu^{-1}$ ($\sigma_{rr}\mu^{-1}$ показаны сплошными $\sigma_{\theta\theta}\mu^{-1}$ – штриховыми линиями) представлены в зависимости от значений rR_0^{-1} в процессе всего деформирования; $\tau = R_0^{-1}(\mu/\rho)^{1/2}t$ – безразмерное время.

Расчеты показывают, что при принятых постоянных материала, давление, при котором среда деформируется чисто упруго, $P_0\mu^{-1} \leq 0.001715$. Динамику дефекта иллюстрирует фиг. 1, а, при этом значительных изменений его размера не происходит; на фиг. 1, б представлено распределение напряжений, характерное для такого деформирования.

Если ударная нагрузка $P_0\mu^{-1} > 0.001715$, то уже на первом полупериоде таких колебаний возникает пластическое течение, демпфирующее колебания границы.

Если внешняя ударная нагрузка $P_0\mu^{-1} \geq 0.020960184$, то при таком активном нагружении размер дефекта может измениться до величины $s_1R_0^{-1} = 0.00000986936$ (динамика границы дефекта представлена на фиг. 1, с). Такое деформирование сопровождается “заличиванием” трещины. При этом в ее окрестности формируется высокий уровень напряжений (фиг. 2, а, б), удовлетворяющий условию $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}|_{s_1 \leq r \leq r_1} = 2k$. Характерный уровень остаточных напряжений при полной разгрузке среды $\sigma_{rr}(R_p) = 0$ представлен на фиг. 2, с. При этом радиус дефекта $s_pR_0^{-1} = 0.00000989887$. Как видно на фиг. 2, с присутствуют лишь две области: упругая $r_{1p} \leq r \leq R_p$ и упругопластическая $s_p \leq r \leq r_{1p}$. Здесь следует отметить некоторый интересный эффект, возникающий при таком де-



Фиг. 2

формировании. Оказывается, что при численном решении задачи разгрузки в окрестности дефекта ($s_p R_0^{-1} = 0.00000989880$) возникает область, в которой напряжения становятся растягивающими ($\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -2k$) – область повторного пластического течения. Но в силу того, что дефект становится маленьким ($\approx 10^{-5}$), связи, возникающие между частицами, позволяют размерам дефекта увеличиться до некоторой величины ($s_p(t) R_0^{-1} = 0.00356997271$), а потом возвращают его практически до того состояния ($s_p(t) R_0^{-1} = 0.00000989887$), при котором начиналось повторное пластическое течение. Возникает эффект дышащего отверстия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента РФ МК-501.2003.01 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-01134).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтаник Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
2. Буренин А.А., Ковтаник Л.В. Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций. Сборник статей к 70-летию Д.Д. Ивлева. М.: Физматлит, 2001. С. 75–95.
3. Буренин А.А., Ковтаник Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 316–323.
4. Ковтаник Л.В., Полоник М.В. Задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, изготовленной из несжимаемого упругопластического материала // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 77–96.
5. Буренин А.А., Ковтаник Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.
6. Ковтаник Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневост. мат. ж. 2004. Т. 5. № 1. С. 110–120.
7. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

Владивосток

Поступила в редакцию

11.02.2005