

УДК 539.3

© 2007 г. П.Г. МОРЕВ

## **ВАРИАНТ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ТРЕНИЕМ**

Предлагается методика решения контактных задач с трением, основанная на включении в число степеней свободы исследуемой системы обобщенных координат абсолютно жестких тел и варьировании по этим координатам функционала вариационной задачи. В результате оказывается возможным включить обобщенные координаты или энергетически сопряженные им обобщенные силы непосредственно в правую часть разрешающей системы уравнений, что позволяет без труда учитывать любые законы движения или нагружения абсолютно жестких тел.

**Введение.** Для численного решения контактных задач предложено немало алгоритмов и пакетов программ (например, [1–7]). Однако, ввиду большой вычислительной сложности этих задач разработка более экономичных и простых в программировании способов решения остается актуальной. В настоящей работе предложен новый, превосходящий наиболее известные по нескольким параметрам, подход для важного частного случая формоизменения упругопластического тела (“заготовки”) при контактировании с абсолютно жесткими телами (“инструментами”), когда заданы интегральные нагрузки на последних (например, силы или моменты сил). Прежде чем перейти к его изложению, остановимся вкратце на трех самых популярных методах для контактных задач: методе штрафных функций, методе множителей Лагранжа и методе множителей Лагранжа с добавками (augmented Lagrangian method).

Метод штрафных функций использует подстроечные параметры (один или несколько штрафных множителей), оптимальный выбор которых может вылиться в самостоятельную проблему, требующую экстраполяции результатов нескольких расчетов [8]. Это особенно неудобно для задач, требующих длительные компьютерные вычисления. Еще одна неприятная особенность – влияние штрафных множителей на обусловленность разрешающей системы уравнений, в результате чего обусловленность может значительно ухудшаться в процессе оптимизации этих множителей.

Метод множителей Лагранжа приводит к матрицам, обладающим одновременно несколькими нежелательными свойствами: знаконеопределенность, несимметричность, плохая обусловленность, присутствие нулей на главной диагонали. Это нередко приводит к сравнительно большому объему вычислений.

Чтобы уменьшить этот объем, метод множителей Лагранжа комбинируют с методом штрафных функций и приходят к так называемому методу множителей Лагранжа с добавками. При этом каждый лагранжевый множитель оказывается суммой двух слагаемых, одно из которых пропорционально параметру штрафа. Хотя обусловленность матриц существенно улучшается, их все же рекомендуется подвергать специальному преобразованию с целью дальнейшего улучшения [7]. От метода множителей Лагранжа наследуются также и все остальные нежелательные свойства матриц.

Метод, предлагаемый в настоящей статье, не содержит подгоночные параметры и приводит к хорошо обусловленным матрицам. Их обусловленность обычно не намного

хуже, чем у глобальной матрицы жесткости, получающейся сразу после поэлементной сборки (в противном случае можно выполнить элементарную процедуру масштабирования, т.е. удобного выбора единиц измерения обобщенных координат). Диагональные элементы оказываются максимальными по абсолютной величине в своих строках или близкими к максимальным. Более того, в упругопластических расчетах на основе формулировок, приводящих к матрицам, представляющим собой сумму положительно определенного симметричного слагаемого и несимметричной добавки, существует практика отбрасывания этой добавки с сохранением сходимости итераций Ньютона–Рафсона, по-видимому, для большинства технических задач. Данный прием позволяет существенно упростить программное обеспечение, используя простые, эффективные и общедоступные алгоритмы [9.10]. При этом увеличение числа итераций из-за округления матриц может компенсироваться увеличением скорости их прохождения за счет более эффективных матричных алгоритмов (вопрос о количественных оценках на этот счет требует отдельного исследования и здесь не рассматривается). Такая практика совместима с предлагаемым методом, но не совместима, например, с методом множителей Лагранжа, включая его версию с добавками.

Важно учитывать еще одно обстоятельство. При работе с фирменными программными продуктами предлагаемые пользователю способы описания движения абсолютно жестких тел могут оказаться неудобными в каком-то частном случае. Предлагаемый метод позволяет работать с любыми обобщенными координатами жестких тел (системы обобщенных координат выбираются независимо друг от друга, поэтому они не обязательно одинаковые для разных тел) и задавать интегральные нагрузки в энергетически сопряженных обобщенных силах.

**1. Постановка задачи и дискретизация.** Сложность учета интегральных нагрузок связана с тем, что не известно их распределение по поверхности контакта, а следовательно, и по узлам конечноэлементной сетки. Предлагается простое и естественное решение этой проблемы посредством включения в число степеней свободы заготовки, наряду с координатами узлов, еще и обобщенных координат, по 6 на каждый инструмент, определяющих положение инструментов в пространстве (например, координат центра масс и углов Эйлера для каждого инструмента). После этого скорости инструментов и суммарные нагрузки на них, выраженные в обобщенных координатах и силах, можно вводить непосредственно в правую часть разрешающей системы уравнений МКЭ аналогично узловым скоростям и силам.

Перейдем к вариационной формулировке задачи. Для простоты считаем, что инструмент один (обобщение на несколько инструментов дается ниже), а положение его в пространстве задается обобщенными координатами  $q^1, \dots, q^6$ , причем для некоторых из них задан закон перемещения (пусть  $L$  – множество их номеров), для остальных закон нагружения ( $I = \{1, \dots, 6\} \setminus L$  – множество их номеров). Инструмент и заготовка контактируют по зависящей от времени  $t$  и заранее неизвестной поверхности  $S(t) = S_w(t) \cup S_g(t)$ , где  $S_g(t)$  – поверхность скольжения, на которой заданы условия скольжения: закон трения и направление скольжения;  $S_w(t)$  – поверхность прилипания. Все эти поверхности определяются далее в процессе пошагового расчета. Включим в постановку задачи еще одну поверхность  $S_u(t)$ , которая изменяется по заранее заданному закону. Она может понадобиться, в частности, при задании условий закрепления. Случай отсутствия в задаче поверхности  $S_u(t)$  также допускается, если число инструментов больше одного. Исключим из рассмотрения все объемные и неконтактные поверхностные нагрузки (они при необходимости могут быть внесены сразу в правую часть разрешающей системы уравнений по известным формулам). Будем исходить из скоростного вариационного принципа [11] в форме

$$\int_{V(t)} \int \delta \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}) dV =$$

$$= \int_{S(t)} \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}(\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{n})) dS \quad (1.1)$$

Интегрирование производится по актуальным объему тела  $V(t)$  и площади контакта  $S(t)$ , соответствующим моменту времени  $t$ ;  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – тензоры истинного напряжения Коши, деформации скорости и вихря;  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{n}$  – давление и нормаль, относящиеся к актуальной поверхности контакта  $S(t)$ ;  $\mathbf{r} \boldsymbol{\sigma}$  – коротационная производная тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  в определяющем соотношении для материала заготовки, связанная со спином  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}$ , тип которой можно варьировать в зависимости от решаемой задачи (в частности, если используется производная Яумана, то  $\mathbf{Q} = 0$ ). Условия варьирования следующие:  $\delta \mathbf{v} = 0$  на поверхности  $S_u(t)$ ; на поверхностях  $S_w(t)$  и  $S_\sigma(t)$  выполнены условия прилипания и скольжения, которые в явном виде приводятся ниже.

Прежде чем перейти к дискретизации, преобразуем правую часть (1.1): Пусть  $x^1, x^2, x^3$  – координаты в неподвижной декартовой системе отсчета. Введем на всей рабочей поверхности инструмента произвольную и жестко связанную с ним криволинейную систему координат  $(\xi^1, \xi^2)$  с касательным базисом  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  и сопряженным ему силовым базисом  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$  (т.е.  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, 1 \leq i, j \leq 2$ ), который дополним до трехмерного  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  вектором единичной нормали к поверхности инструмента  $\mathbf{n} = \mathbf{e}^3$ . Тогда для точек заготовки, находящихся в зоне контакта, имеем:

$$x^i = x^i(q^1, \dots, q^6, \xi^1, \xi^2), \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \dot{\xi}^j \quad (1.2)$$

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \xi^j \quad (1 \leq i \leq 3, 1 \leq k \leq 6, 1 \leq j \leq 2)$$

По повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование за исключением следующих двух случаев: эти индексы пробегает не все возможные значения, и тогда сумма указывается явно; суммирование по повторяющимся индексам не производится, и тогда они помечаются чертой сверху. Поскольку у разных индексов могут быть разные диапазоны возможных значений, то все эти диапазоны будут указываться в примечаниях к формулам.

Из второго равенства (1.2) видно, что скорость  $\mathbf{v}$  в зоне контакта распадается на сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от обобщенных скоростей  $\dot{q}^k$  (и координат) и является скоростью точки инструмента  $\mathbf{v}_r$ , а другое – только от скоростей  $\dot{\xi}^j$  (и координат) и является скоростью скольжения по поверхности инструмента  $\mathbf{v}_s$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_s$$

То же самое справедливо и для вариаций скоростей:

$$\delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_r + \delta \mathbf{v}_s \quad (1.3)$$

Пусть  $\dot{\lambda} = \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}$  есть скорость относительного изменения элемента площади поверхности заготовки в зоне контакта  $S(t)$ . Тогда [12]:

$$\dot{\lambda} = \nabla_i \dot{\xi}^i = g^{-1} \frac{\partial(g \dot{\xi}^i)}{\partial \dot{\xi}^i} \quad (1 \leq i \leq 2) \quad (1.4)$$

$$g = \sqrt{|\det(g_{kl})|}$$

где  $g_{kl} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l$  – метрика на поверхности инструмента (ввиду недеформируемости инструмента она не зависит от  $t$ );  $1 \leq k, l \leq 2$ . С учетом равенства (1.3) правую часть (1.1) приведем к виду

$$\int_{S(t)} \int \delta \mathbf{v} \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \dot{\lambda}) dS = \int_{S(t)} \int \delta \mathbf{v}_t \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \dot{\lambda}) dS + \int_{S(t)} \int \delta \mathbf{v}_s \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \dot{\lambda}) dS \quad (1.5)$$

Введем скорости обобщенных сил

$$\dot{Q}_k = \int_{S(t)} \int \frac{\partial x^i}{\partial q^k} (\dot{p}_i + p_i \dot{\lambda}) dS \quad (1 \leq i \leq 3, 1 \leq k \leq 6)$$

где  $p_i$  – компоненты давления на поверхности контакта в неподвижном декартовом базисе и преобразуем первое слагаемое в (1.5) к виду

$$\int_{S(t)} \int \delta \mathbf{v}_t \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \dot{\lambda}) dS = \sum_{k \in I} \dot{Q}_k \delta \dot{q}^k \quad (1.6)$$

Перейдем ко второму слагаемому в (1.5). Сначала выразим скорость давления  $\dot{\mathbf{p}}$  в базисе  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ . Пусть  $\Xi_j$  – компоненты давления  $\mathbf{p}$  в этом базисе ( $\Xi_3 \mathbf{e}^3$  – нормальная составляющая давления,  $\Xi_1 \mathbf{e}^1 + \Xi_2 \mathbf{e}^2$  – касательная). Тогда

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{\Xi}_i + \Xi_j \gamma_i^j) \mathbf{e}^i \quad (1 \leq i, j \leq 3) \quad (1.7)$$

Учтено изменение базиса  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  со скоростью  $\boldsymbol{\gamma}$ , вызванное вращением инструмента и скольжением по поверхности инструмента  $\mathbf{e}^j = \gamma_i^j \mathbf{e}^i$ . Очевидно, что тензор  $\boldsymbol{\gamma}$  – линейная однородная функция обобщенных скоростей  $\dot{q}^k$  и скоростей скольжения  $\dot{\xi}^l$ :

$$\gamma_i^j = a_{ik}^j \dot{q}^k + b_{il}^j \dot{\xi}^l \quad (1 \leq i, j \leq 3; 1 \leq k \leq 6; 1 \leq l \leq 2)$$

явный вид коэффициентов  $a_{ik}^j$  и  $b_{il}^j$ , которой определяется способом введения обобщенных координат  $q^k$  и криволинейных координат  $\xi^l$  на поверхности инструмента. Подставляя эту функцию в (1.7), а после этого во второе слагаемое (1.5) и выражая вариацию  $\delta \mathbf{v}_s$  в касательном базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , а также воспользовавшись (1.4), получим:

$$\int_{S(t)} \int \delta \mathbf{v}_s \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \dot{\lambda}) dS = \int_{S(t)} \int \delta \dot{\xi}^j \left[ \dot{\Xi}_j + \Xi_i (a_{jk}^i \dot{q}^k + b_{jn}^i \dot{\xi}^n) + \Xi_j g^{-1} \frac{\partial(g \dot{\xi}^l)}{\partial \dot{\xi}^l} \right] dS \quad (1 \leq i \leq 3; 1 \leq k \leq 6; 1 \leq j, l, n \leq 2)$$

Это равенство вместе с (1.6) и (1.5) позволяет придать требуемую форму правой части (1.1):

$$\int_{S(t)} \int \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}(\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{n})) dS = \sum_{k \in I} \dot{Q}_k \delta \dot{q}^k + \int_{S(t)} \delta \xi^j \left[ \dot{\Xi}_j + \Xi_i (a_{jm}^i \dot{q}^m + b_{jn}^i \dot{\xi}^n) + \Xi_j g^{-1} \frac{\partial (g \xi^l)}{\partial \xi^l} \right] dS \quad (1.8) \quad (1 \leq i \leq 3; 1 \leq m \leq 6; 1 \leq j, l, n \leq 2)$$

Теперь перейдем к дискретизации вариационного принципа (1.1). Для упрощения обозначений поля и их аппроксимации будем приравнивать друг другу. Введем конечно-элементную аппроксимацию поля скорости  $v^j = \dot{x}^j = \dot{x}_n^i H^n(x)$  ( $1 \leq i \leq 3, 1 \leq n \leq N$ ), где  $H^n(x)$  – базисная функция, связанная с  $n$ -м узлом  $A_n(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$  КЭ сетки,  $N$  – число этих узлов. На поверхности контакта  $S(t)$  перейдем к определенным ранее криволинейным координатам:  $\xi^j = \xi_n^j H^n(\xi)$  ( $1 \leq j \leq 2$ ), где  $(\xi_n^1, \xi_n^2)$  – криволинейные координаты узла  $A_n \in S(t)$ . Правая часть выражения (1.8) после этого принимает вид

$$\sum_{k \in I} \delta \dot{q}^k \dot{Q}_k + \delta \xi_n^j \dot{\Xi}_n^j + \delta \xi_n^j \xi_n^i \int_{S(t)} H^n \Xi_i [b_{ji}^l H^m + a_{jr}^l \Xi_r H^n] dS + \delta \xi_n^j g^{-1} \frac{\partial (g H^m)}{\partial \xi^i} \int_{S(t)} a_{jr}^l \Xi_r H^n dS \quad (1.9)$$

$$1 \leq l \leq 3; 1 \leq r \leq 6; 1 \leq i, j \leq 2; 1 \leq m, n \leq N$$

где величины

$$\dot{\Xi}_j^n = \int_{S(t)} H^n \dot{\Xi}_j dS$$

являются скоростями узловых сил трения.

Следующим шагом дискретизируем левую часть (1.1), предварительно записав ее в декартовых координатах (при этом верхние и нижние тензорные индексы не различаются) и используя определяющее уравнение в виде [11]  $\sigma = \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{v})$ . Имеем:

$$\int_{V(t)} \int \delta \dot{x}_j^i [D^{jilk} \dot{x}_{,l}^k - (d_{jk} - Q_{jk}) \sigma^{ki} - \sigma^{jk} (\omega_{ki} + Q_{ki})] dV = \quad (1.10)$$

$$= \int_{V(t)} \int \delta \dot{x}_m^i H_j^m [\dot{x}_n^k D^{jilk} H_{,l}^n - \dot{x}_n^l (B_{lj}^n \sigma^{ki} + \sigma^{jk} C_{lki}^n)] dV = K_{ik}^{mn} \delta \dot{x}_m^i \dot{x}_n^k$$

$$1 \leq i, j, k, l \leq 3; 1 \leq m, n \leq N$$

где запятой обозначено дифференцирование по декартовым координатам;  $B_{lj}^n$  и  $C_{lki}^n$  – коэффициенты пропорциональности, возникающие при дискретизации тензоров  $\mathbf{d} - \mathbf{Q}$  и  $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q}$ :

$$d_{jk} - Q_{jk} = \dot{x}_n^l B_{lj}^n, \quad \omega_{ki} + Q_{ki} = \dot{x}_n^l C_{lki}^n$$

В частности, если в определяющем уравнении используется коротационная производная Яумана, то  $Q = 0$ ,  $2B_{ljk}^n = \delta_{lj}H_{,k}^n + \delta_{lk}H_{,j}^n$ ,  $2C_{lki}^n = \delta_{lk}H_{,i}^n - \delta_{li}H_{,k}^n$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Матрица

$$K_{ik}^{mn} = \int \int_{V(t)} \int H_{,j}^m (D^{jilk} H_{,l}^n - B_{kjl}^n \sigma^{li} - \sigma^{jl} C_{kli}^n) dV \quad (1.11)$$

есть глобальная матрица жесткости МКЭ.

Теперь приступим к основной задаче – введению в схему КЭ дискретизации обобщенных координат инструмента. Для этого разобьем последнюю сумму в (1.10) на четыре слагаемых:

$$K_{ik}^{mn} \delta x_m^i \delta x_n^k = \sum_{A_m, A_n \in S} \dots + \sum_{A_m, A_n \in S} \dots + \sum_{A_m \in S, A_n \notin S} \dots + \sum_{A_m \notin S, A_n \in S} \dots \quad (1.12)$$

причем многоточия всюду заменяют одно и то же выражение  $K_{ik}^{mn} \delta x_m^i \delta x_n^k$ . Для упрощения формул и комментариев к ним примем, начиная с (1.12), следующие соглашения: Зависящие от времени поверхности  $S(t)$ ,  $S_w(t)$ ,  $S_\sigma(t)$ ,  $S_u(t)$  будем обозначать просто  $S$ ,  $S_w$ ,  $S_\sigma$ ,  $S_u$ . Диапазоны изменения верхних индексов у обобщенных  $q$ , декартовых  $x$ , криволинейных  $\xi$  координат – соответственно от 1 до 6, от 1 до 3 и от 1 до 2. Нижние индексы у декартовых  $x$  и криволинейных  $\xi$  координат, нумерующих узлы КЭ сетки, пробегают значения от 1 до  $N$ . Соглашения об индексах суммирования, принятые ранее, остаются в силе.

Первую сумму в правой части равенства (1.12) перепишем в виде

$$\sum_{A_m, A_n \in S} K_{ik}^{mn} \delta x_m^i \delta x_n^k = \sum_{A_m, A_n \in S} \mathbf{K}_{(x_m)(x_n)} \delta x_m^i \delta x_n^k \quad (1.13)$$

$$\mathbf{K}_{(x_m)(x_n)} = K_{ik}^{mn}, \text{ если } A_m, A_n \in S$$

а остальные три преобразуем с помощью (1.2) и новых обозначений

$$\left. \frac{\partial x_n^k}{\partial \xi^l} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^l} \right|_{A_n}, \quad \left. \frac{\partial x_n^k}{\partial q^r} = \frac{\partial x^k}{\partial q^r} \right|_{A_n}, \text{ если } A_n \in S$$

Вторая сумма имеет вид

$$\sum_{A_m, A_n \in S} K_{ik}^{mn} \delta x_m^i \delta x_n^k = \mathbf{K}_{(q^p)(q^r)} \delta q^p \delta q^r + \sum_{A_n \in S} \mathbf{K}_{(q^p)(\xi_n^l)} \delta q^p \delta \xi_n^l +$$

$$+ \sum_{A_m \in S} \mathbf{K}_{(\xi_m^j)(q^r)} \delta \xi_m^j \delta q^r + \sum_{A_n \in S} \mathbf{K}_{(\xi_m^j)(\xi_n^l)} \delta \xi_m^j \delta \xi_n^l \quad (1.14)$$

$$\mathbf{K}_{(q^p)(q^r)} = \sum_{A_m, A_n \in S} K_{ik}^{mn} \frac{\partial x_m^i}{\partial q^p} \frac{\partial x_n^k}{\partial q^r}$$

$$\mathbf{K}_{(q^p)(\xi_n^l)} = \sum_{A_m \in S} K_{ik}^{mn} \frac{\partial x_m^i}{\partial q^p} \frac{\partial x_n^k}{\partial \xi_n^l}, \text{ если } A_n \in S \quad (1.15)$$

$$\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(q^r)} = \sum_{A_n \in S} K_{ik}^{\bar{m}n} \frac{\partial x_m^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x_n^k}{\partial q^r}, \quad \text{если } A_m \in S$$

$$\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(\xi_n^l)} = K_{ik}^{\bar{m}n} \frac{\partial x_m^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x_n^k}{\partial \xi^l}, \quad \text{если } A_m, A_n \in S$$

Третья сумма представляется следующим образом

$$\sum_{A_m \in S, A_n \notin S} K_{ik}^{mn} \delta \dot{x}_m^i \dot{x}_n^k = \sum_{A_n \notin S} \mathbf{K}_{(q^p)(x_n^k)} \delta \dot{q}^p \dot{x}_n^k + \sum_{A_m \in S, A_n \notin S} \mathbf{K}_{(\xi_m^j)(x_n^k)} \delta \xi_m^j \dot{x}_n^k$$

$$\mathbf{K}_{(q^p)(x_n^k)} = \sum_{A_m \in S} K_{ik}^{mn} \frac{\partial x_m^i}{\partial q^p}, \quad \text{если } A_n \notin S \quad (1.16)$$

$$\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(x_n^k)} = K_{ik}^{\bar{m}n} \frac{\partial x_m^i}{\partial \xi^j}, \quad \text{если } A_m \in S, A_n \notin S \quad (1.17)$$

Наконец, четвертую сумму запишем в виде

$$\sum_{A_n \in S, A_m \notin S} K_{ik}^{mn} \delta \dot{x}_m^i \dot{x}_n^k = \sum_{A_m \notin S} \mathbf{K}_{(x_m^i)(q^p)} \delta \dot{x}_m^i \dot{q}^p + \sum_{A_n \in S, A_m \notin S} \mathbf{K}_{(x_m^i)(\xi_n^j)} \delta \dot{x}_m^i \dot{\xi}_n^j$$

$$\mathbf{K}_{(x_m^i)(q^p)} = \sum_{A_n \in S} K_{ik}^{mn} \frac{\partial x_n^k}{\partial q^p}, \quad \text{если } A_m \notin S \quad (1.18)$$

$$\mathbf{K}_{(x_m^i)(\xi_n^j)} = K_{ik}^{m\bar{n}} \frac{\partial x_n^k}{\partial \xi^j}, \quad \text{если } A_m \notin S, A_n \in S \quad (1.19)$$

Соберем теперь все эти четыре преобразованные суммы из правой части (1.12) вместе и приравняем результат выражению (1.9), перенося слагаемые с  $\delta \dot{\xi}_n^j \dot{\xi}_m^i$  и  $\delta \dot{\xi}_n^j \dot{q}^r$  в левую часть равенства и переопределяя  $\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(\xi_n^l)}$ , если  $A_m, A_n \in S$  и  $\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(q^r)}$ , если  $A_m \in S$ , следующим образом:

$$\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(\xi_n^l)} = K_{ik}^{\bar{m}n} \frac{\partial x_m^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x_n^k}{\partial \xi^l} - \iint_S H^m \Xi_i \left[ b_{ji}^i H^n + \delta_{ij}^i g^{-1} \frac{\partial (g H^n)}{\partial \xi^l} \right] dS, \quad \text{если } A_m, A_n \in S \quad (1.20)$$

$$\mathbf{K}_{(\xi_m^j)(q^r)} = \sum_{A_n \in S} K_{ik}^{\bar{m}n} \frac{\partial x_m^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x_n^k}{\partial q^r} - \iint_S a_{jr}^i \Xi_i H^m dS, \quad \text{если } A_m \in S \quad (1.21)$$

Добавляя к полученному равенству (его для краткости опустим) условия варьирования степеней свободы, в которые включим теперь и обобщенные координаты инструмента ( $\delta \dot{x}_n^k = 0$  при  $A_n \in S_w$ ;  $\delta \dot{\xi}_n^j = 0$  при  $A_n \in S_w$ ;  $\delta \dot{q}^i = 0$  при  $i \in L$ ; при  $A_n \in S_\sigma$  вариация скорости узла  $e_1 \delta \dot{\xi}_n^1 + e_2 \delta \dot{\xi}_n^2$  параллельна силе трения  $e^1 \Xi_1^n + e^2 \Xi_2^n$ , где  $e_i \cdot e^j = \delta_i^j$ ), получим дискретную форму вариационного принципа (1.1). Переходя к одноиндексной нуме-

рации всех степеней свободы  $q^j$ ,  $x_n^k$  для  $A_n \notin S$ ,  $\xi_n^i$  для  $A_n \in S$ , выведем из этой дискретной формы типичную для МКЭ линейную систему ОДУ  $\mathbf{K}_{min} \dot{u}^n = \dot{F}_n$ , где  $u^n$  – степени свободы в одноиндексной нумерации,  $F_n$  – энергетически сопряженные им силы. После некоторых преобразований этой системы (заполнения нулями строк матрицы  $\mathbf{K}$ , соответствующих неварьируемому степеням свободы за исключением элементов этих строк, находящихся на главной диагонали, которые замещаются единицами, а также замены в правой части скоростей сил на скорости координат для неварьируемых степеней свободы) получим разрешающую систему ОДУ. Заметим, что силы трения задаются неявно законом трения, однако при вычислениях учесть их не составляет труда.

Таким образом, предлагаемая методика по сути заключается в переходе от обычной КЭ матрицы жесткости  $K$ , определяемой (1.11), к новой матрице  $\mathbf{K}$ , определяемой (1.13)–(1.21). Формально можно считать, что к КЭ сетке добавлены  $b$  новых узлов с одной степенью свободы в каждом, связанных со всеми узлами тех элементов, которые соприкасаются с инструментом. Обобщение на случай  $N$  инструментов очевидно, если КЭ сетка достаточно мелкая, так что никакой элемент не соприкасается сразу с двумя инструментами. В этом случае потребуется  $bN$  обобщенных координат  $q^j$ , а матрица  $\mathbf{K}$  вычисляется по тем же самым формулам (1.13)–(1.21), причем под  $S$  в них нужно понимать поверхность контакта с тем инструментом, которому принадлежит узел  $A_m$  или  $A_n$  в этих формулах. Что касается блок-схемы алгоритма, то она стандартна (см., например, [3]). Отметим лишь, что переход к новой матрице  $\mathbf{K}$  целесообразно продумать на стадии вычисления матриц конечных элементов, так как в этом случае можно без изменений использовать стандартные программы МКЭ.

**2. Алгоритмы.** Программное обеспечение оказывается самым простым по сравнению с известными методами решения контактных задач: штрафных функций, множителей Лагранжа, множителей Лагранжа с добавками, вариационных неравенств, математического программирования и, по существу, может быть создано в результате несложной модернизации типичного пакета программ для МКЭ, работающего с узловыми силами и скоростями конечноэлементной сетки. Описание таких программ можно найти в обширной литературе по МКЭ.

Модернизация заключается в следующем. Матрицы жесткости конечных элементов, имеющих общие узлы с поверхностью инструмента, пересчитываются по формулам (1.13)–(1.21), в которых под  $K$  и  $\mathbf{K}$  нужно понимать не глобальные матрицы жесткости, а конечноэлементные, а под  $H^n$  – функции формы элемента (при этом матрица  $\mathbf{K}$  расширяется по сравнению с  $K$  за счет добавления степеней свободы инструмента); матрицы элементов, не имеющих узлов на поверхности инструмента, остаются без изменений. Создается набор программ, отслеживающих различные события в контакте (касание поверхности инструмента, отход от нее, прилипание, скольжение), который определяет поверхности контакта, прилипания и скольжения  $S(t)$ ,  $S_w(t)$ ,  $S_c(t)$  на каждом шаге нагружения и необходим при реализации любого метода для контактных задач. Отслеживание можно производить как без дробления шага нагружения [3], так и с дроблением. Изложим второй способ, который использовался в приводимых ниже тестовых расчетах и обеспечивал большую точность.

Во-первых, для каждого граничного узла известно его состояние в начале шага нагружения. Возможны состояния: свободный узел, коснувшийся инструмента узел, скользящий узел, прилипший узел, отходящий от инструмента узел, удаляющийся от инструмента узел (необходимость этого состояния выяснится в дальнейшем). Во-вторых, в конце шага нагружения для каждого граничного узла проверяется, остался ли он в прежнем состоянии или вышел из него. При этом используются естественные критерии: расстояние до поверхности инструмента, значение нормальной к поверхности инструмента реакции в узле (изменение этой реакции с положительной на отрицательную



говорит о том, что узел является отходящим от инструмента), мощность силы трения в узле (изменение этой мощности с отрицательной на положительную говорит о том, что узел прилип, так как для скользящего узла скорость направлена против силы трения). В-третьих, если изменение состояния узла на шаге нагружения произошло, то необходимо точно вычислить, в какой именно момент времени, т.е. на какой доле шага это случилось. Все изменяющиеся на шаге величины аппроксимируются линейными функциями, и ищется коэффициент дробления шага нагружения, при котором искомое изменение состояния должно в точности произойти. Затем этот коэффициент дробления минимизируется по всем возможным переходам для данного узла и по всем граничным узлам с целью выявить тот переход, который происходит раньше других. В-четвертых, шаг нагружения пересчитывается заново, но при этом его величина умножается на найденный минимизированный коэффициент дробления, и теперь наступление искомого перехода должно уложиться в интервал погрешности, заданный пользователем. Если это происходит, то данная часть шага нагружения пройдена и можно приступить к оставшейся. В противном случае подгоняется коэффициент дробления до тех пор, пока искомый переход не уложится в требуемый интервал погрешности.

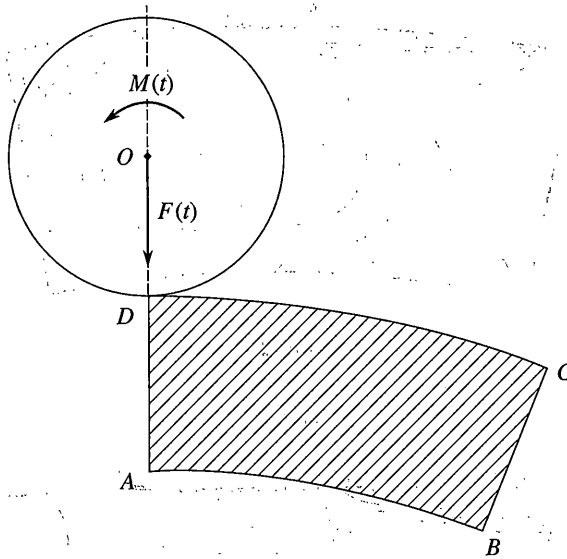
При работе с отходящими узлами следует указать на две тонкости: 1) при освобождении узла в нем остается реакция инструмента, уложившаяся в интервал погрешности при определении момента отрыва, которую для уменьшения ошибок целесообразно обнулить приложением противоположной силы на следующем шаге нагружения, либо выполнить эту разгрузку как отдельный шаг; 2) освобожденный узел в течение следующих нескольких шагов может находиться на близком от поверхности инструмента расстоянии, меньшим погрешности касания, поэтому чтобы программа не приняла его за коснувшийся узел, ему присваивается состояние удаляющегося, по которому подпрограмма отслеживания касания его обходит. Необходимо иметь в виду, что, возможно, этот узел, так и не пересекая границу касания, начнет снова приближаться к инструменту, что может привести к серьезным ошибкам расчета. Поэтому погрешность касания берется достаточно малой.

В набор отслеживающих подпрограмм целесообразно включить также отслеживание различных переходов в конечных элементах: из упругого состояния в пластическое и наоборот, в состояние поврежденности, заживаемости и т. д.

Погрешности отслеживания событий не имеют ничего общего с подстроечными параметрами, о которых говорилось во Введении; первые используются для нахождения зон контакта, прилипания и скольжения и без них, в принципе, можно обойтись, если использовать алгоритмы отслеживания без дробления шага нагружения [3]. Что же касается вторых, то они нужны при решении разрешающих уравнений и являются обязательными в методе штрафных функций и методе множителей Лагранжа с добавками.

**3. Тестирование.** Описанный метод разрабатывался для систем с большой упругопластической деформацией, вызванной сложными движением и нагружением абсолютно жестких тел. К сожалению, автору неизвестно ни одного точного решения такого рода задач, поэтому для тестирования использовался пакет программ ANSYS.

*Пример 1.* Заготовка в виде сектора кольца с внешним радиусом  $3 \cdot 10^{-2}$  м, внутренним радиусом  $2.5 \cdot 10^{-2}$  м и углом  $\pi/8$  закреплена по внутренней дуге  $AB$  и обкатывается по внешней дуге  $CD$  роликом радиуса  $1.5 \cdot 10^{-2}$  м с центром  $O$  (см. фиг.1, где показано исходное положение). При этом центр ролика равномерно поворачивается по часовой стрелке на угол  $\pi/16$  вокруг центра сектора, к ролику прикладывается линейно возрастающая от нуля сила прижима, направленная к центру сектора, а также линейно возрастающий от нуля тормозной момент относительно центра  $O$ . Деформация считается плоской. Максимальные погонные значения прижимающей силы и тормозного момента равны  $F_0 = 7.5 \cdot 10^5$  Н/м,  $M_0 = 2 \cdot 10^3$  Н · м/м. Остальные условия задачи следующие:



Фиг. 1

модуль сдвига и коэффициент Пуассона равны  $G = 2.7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 0.32$ , трение подчиняется закону Кулона с коэффициентом 0.2, пластическое поведение материала считается изотропным с линейным упрочнением, начальный предел текучести и модуль упрочнения равны  $\bar{\sigma}_0 = 1.93 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $H' = 9.62 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

Похожие задачи возникают при исследовании новой технологии поверхностного упрочнения деталей. Отметим некоторые их особенности. Поверхность контакта перемещается на расстояния, много большие ее размеров и сравнимые с размером заготовки, что требует отслеживания большого числа переходов узлов и элементов КЭ сетки из одного состояния в другое. Контакт является концентратором напряжения, поэтому необходимо сильно измельчать сетку не только в его области, но и под всей прокатанной поверхностью. Не вполне решает проблему автоматическое перестроение КЭ сетки, поскольку существует остаточная пластическая деформация под прокатанной поверхностью, и эта деформация может резко меняться в зависимости от пространственных координат, что и требует измельчения сетки на значительной области. Все это создает серьезные трудности при расчете уже в двумерном случае, поэтому достижение 10% погрешности на персональном компьютере можно считать хорошим результатом.

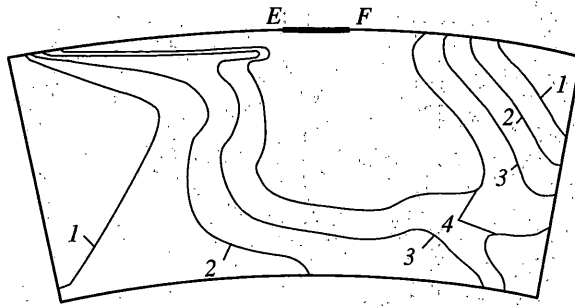
Выясним теперь условия применимости к примеру 1 одного из самых простых определяющих соотношений [13]

$$j\sigma = D \cdot d \tag{3.1}$$

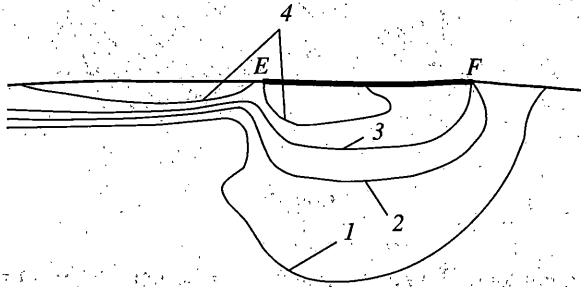
с коротационной производной Яумана ( $j$ ). Тензор  $D$  в глобальных декартовых координатах имеет вид

$$D^{ijkl} = E^{ijkl} - \frac{3GS^{ij}S^{kl}}{\bar{\sigma}^2(1 + H'/(3G))}$$

где  $E^{ijkl}$  – изотропный тензор упругости,  $S^{ij}$  – девиатор тензора напряжения,  $\bar{\sigma}$  – интенсивность напряжения. В [14] и ряде других работ демонстрировалось неестественное ос-



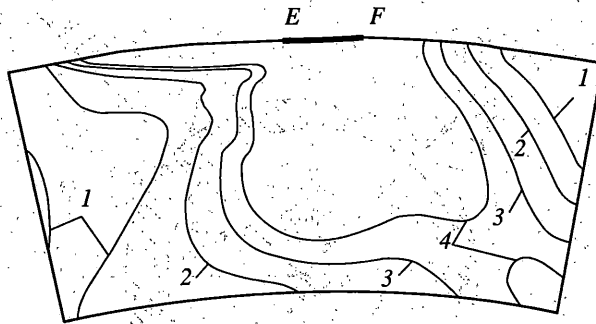
Фиг. 2



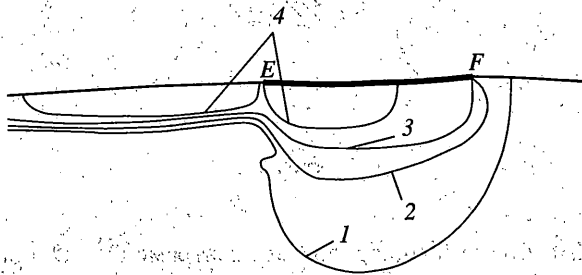
Фиг. 3

циллирующее поведение компонент тензора напряжения, обусловленное уравнением (3.1). Однако из тех же работ можно сделать вывод: если упругая деформация мала, а параметр Оджвиста не превышает 0.3, то (3.1) приводит практически к тем же результатам, что и более корректные определяющие соотношения. Отличие гораздо меньше той погрешности, которую в данном случае можно ожидать от пространственно-временной дискретизации. Таким образом, если в конце расчета максимальное по заготовке значение параметра Оджвиста окажется меньше 0.3, то это будет свидетельствовать о приемлемости определяющего соотношения (3.1), поскольку упругая деформация в данном случае мала (алюминиевый сплав Ал4), а параметр Оджвиста не убывает по времени.

Расчеты производились на последовательно измельчаемых сетках до достижения следующего критерия: при измельчении сетки в два раза интенсивность напряжения меняется в пределах 10% в той области, где она не слишком мала (не менее 10% от максимальной). Использовались линейные треугольные конечные элементы. Результаты расчета на самой мелкой сетке представлены на фиг. 2, 3. Показаны изолинии интенсивности напряжения  $\bar{\sigma}$  [ $10^8$  Н/м<sup>2</sup>], соответствующие следующим значениям: на фиг. 2: 1 – 0.43, 2 – 0.87, 3 – 1.3, 4 – 1.73 и на фиг. 3: 1 – 2.2, 2 – 2.6, 3 – 3.0, 4 – 3.5. Дуги заготовки AB и CD разбиты равномерно на 40 и 1200 частей соответственно, а стороны DA и CB – одинаково неравномерно на 80 частей. Число узлов около 30000. Параметр Оджвиста в конце процесса нагружения не превышал 0.25, что свидетельствует о приемлемости определяющего соотношения (3.1) для данного расчета. Та же задача решалась пакетом ANSYS на сетке примерно с той же густотой узлов, но с использованием треугольных 6-узловых квадратичных конечных элементов. Результаты расчета представлены на фиг. 4, 5.



Фиг. 4



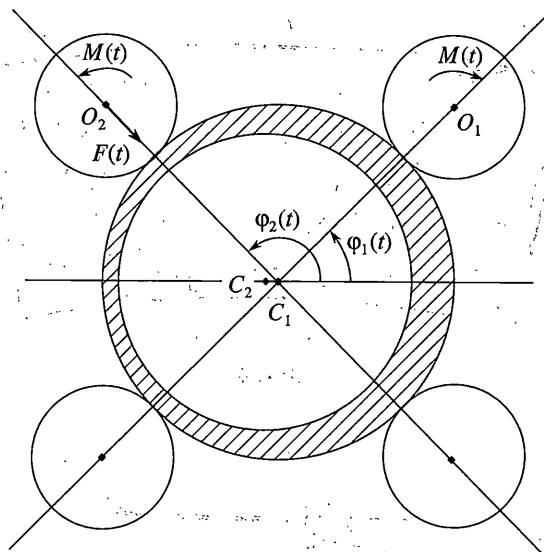
Фиг. 5

Значения интенсивности напряжения  $\bar{\sigma}$  [ $10^8$  Н/м<sup>2</sup>] для изолиний этих графиков на фиг. 4 следующие: 1 – 0.4, 2 – 0.8, 3 – 1.2, 4 – 1.55; на фиг. 5: 1 – 2.5, 2 – 2.9, 3 – 3.3, 4 – 3.9.

Перейдем к сравнению результатов (фиг. 2–5). Для удобства изолинии интенсивности напряжения ниже и выше начального предела текучести показаны на разных графиках и в разных масштабах. Дуга контакта  $EF$  всюду выделена жирной линией. Видно, что изолинии фиг. 2, 3 и фиг. 4, 5, соответствующие близким значениям интенсивности напряжения (эти значения различаются на 9–12%), имеют сходную форму. Учитывая отмеченную выше вычислительную сложность примера 1, согласование изолиний можно признать удовлетворительным и достаточным для подтверждения работоспособности предлагаемого метода.

**Пример 2.** Цель данного примера – продемонстрировать возможности, недоступные пакету ANSYS. Кольцо переменной толщины внешнего радиуса  $3 \cdot 10^{-2}$  м и внутреннего  $2.5 \cdot 10^{-2}$  м с центрами  $C_1$  и  $C_2$  внешней и внутренней окружностей, отстоящими на  $10^{-3}$  м, обкатывается четырьмя роликами по симметричной относительно прямой  $C_1C_2$  схеме (фиг. 6). Обратим внимание, что  $C_1$  и  $C_2$  – начальные положения центров внешней и внутренней границ кольца, поскольку в дальнейшем кольцо деформируется. Центр  $O_1$  одного ролика поворачивается вокруг  $C_1$  по закону  $\varphi_1(t) = 59^\circ + 11^\circ t$ , при  $0 \leq t \leq 1$ , где  $t$  – параметр нагружения, оставаясь на неизменном расстоянии от  $C_1$ , а центр  $O_2$  другого ролика поворачивается вокруг  $C_1$  по закону  $\varphi_2(t) = 121^\circ - 11^\circ t$  при  $0 \leq t \leq 1$ , причем углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  отсчитываются против часовой стрелки от направления  $C_2C_1$ . Ко второму ролику прикладывается направленная к  $C_1$  прижимающая погонная сила, изменяющаяся по закону

$$F(t) = \begin{cases} 4F_0t(1-t) & \text{при } 0 \leq t \leq 0.5 \\ F_0 & \text{при } 0.5 < t \leq 1 \end{cases}$$



Фиг. 6

где  $F_0 = 2.36 \cdot 10^3$  Н/м. Кроме того, к роликам с центрами  $O_1$  и  $O_2$  прикладываются одинаковые по величине и противоположные по направлению тормозные погонные моменты относительно их центров, изменяющиеся по закону

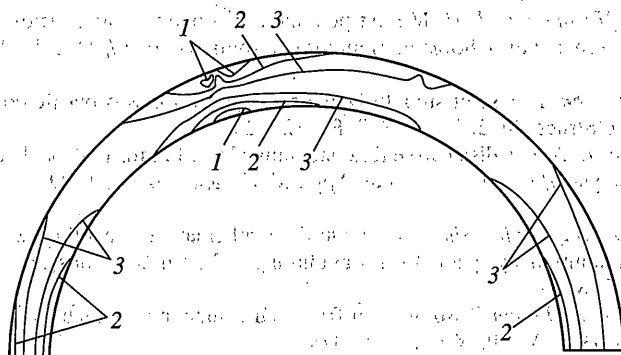
$$M(t) = \begin{cases} 4M_0 t(1-t) & \text{при } 0 \leq t \leq 0.5, \\ M_0 & \text{при } 0.5 < t \leq 1 \end{cases}$$

где  $M_0 = 6.3$  Н·м/м. Оставшиеся два ролика движутся и нагружаются симметрично первым двум. Точкам заготовки на оси симметрии  $C_1 C_2$  запрещается перемещаться в вертикальном направлении и разрешается в горизонтальном: Все остальные условия задачи и определяющее уравнение взяты из примера 1.

Схемы упрочняющей обкатки с несколькими роликами имеют ряд преимуществ: они позволяют либо увеличить производительность, либо уменьшить скорость пластической деформации, а с ней и вызывающие разупрочнение тепловые эффекты. Кроме того, можно добиться обнуления суммарных силы и момента, действующих на заготовку, тем самым снизив требования к закрепляющим ее приспособлениям и, в частности, упрочнять находящиеся в эксплуатации детали конструкции без ее демонтажа. Это демонстрирует практическую значимость задач примера 2.

Результаты расчета представлены на фиг. 7. Показаны изолинии интенсивности напряжения  $\bar{\sigma}$  [ $10^8$  Н/м<sup>2</sup>] со следующими значениями: 1 – 1.93, 2 – 1.72, 3 – 0.87. В силу симметрии показана половина заготовки. Параметр Одквиста не превысил 0.03, что говорит о приемлемости определяющего соотношения (3.1) для данного расчета. Зона пластичности ограничена изолинией 1. Видно, что один ролик пластическую деформацию не вызывает, тогда как под воздействием другого она развивается не только под прокатанной поверхностью, но и с обратной стороны заготовки. С практической точки зрения это свидетельствовало бы о необходимости изменения данной схемы упрочнения.

**Выводы.** Предложен новый метод решения контактных задач, выгодно отличающийся от наиболее распространенных методов штрафных функций, множителей



Фиг. 7

Лагранжа, множителей Лагранжа с добавками (augmented Lagrangian method), используемых в пакетах ANSYS и NASTRAN: 1) отсутствием подгоночных параметров типа штрафных множителей; 2) хорошей обусловленностью системы разрешающих уравнений; 3) хорошей структурой матрицы разрешающей системы уравнений, представляющей собой сумму симметричной положительно определенной матрицы с заполненной главной диагональю и несимметричной из-за геометрической нелинейности добавки. Это позволяет использовать практику отбрасывания несимметричного слагаемого и существенно упростить программное обеспечение вместе с уменьшением требуемой памяти компьютера.

Программное обеспечение проще, чем у всех известных методов и может быть получено в результате несложной модернизации стандартного пакета МКЭ для упругопластичности, работающего с узловыми силами и скоростями. Это достигнуто благодаря тому, что, по существу, исследования не выходили за рамки МКЭ (т.е. все разрешающие уравнения получены исключительно в результате варьирования степеней свободы системы) и не были привлечены другие методы вычислительной математики (штрафных функций, множителей Лагранжа и др.).

Метод позволяет работать с любыми обобщенными координатами абсолютно жестких тел (инструментов), тогда как у фирменных программных продуктов выбор этих координат ограничен, что не всегда позволяет описать движения и нагружения таких тел.

Появление дополнительных степеней свободы (обобщенных координат инструментов) лишь незначительно увеличивает размер системы разрешающих уравнений, поскольку число узлов в КЭ сетке намного больше числа инструментов.

Проведена успешная апробация на расчете технологических процессов со сложными напряженно-деформированными состояниями и законами движения и нагружения инструментов.

Автор благодарит Г. П. Короткого за помощь в расчетах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольник Э.Р., Гундорова Н.И., Успехов А.А. Инкрементальное дискретное моделирование фрикционных контактных систем упругих тел на базе неинкрементального алгоритма // Изв. вузов. Машиностроение. 2000. № 3. С. 9–14.
2. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 340 с.

3. Давыдов В.С., Чумаченко Е.Н. Метод реализации модели контактного взаимодействия в МКЭ при решении задач о формоизменении сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 53–63.
4. Peter W., Christensen A. A semi-smooth Newton method for elasto-plastic contact problems // Intern. J. Solids and Struct. 2002. V. 39. № 8. P. 2323–2341.
5. Armero F., Petocz E. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis // Comput. methods Appl. Mech. and eng-ng. 1999. V. 179. № 1–2. P. 151–178.
6. Guo Xiaoming, Zhang Roulei, She Yinghe. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // Intern. J. Solids and Struct. 2001. V. 38. № 44–45. P. 8133–8150.
7. Alart P., Barboteu M., Lebon F. Solution of frictional contact problems by an EBE preconditioner // Computat. Mech. 1997. V. 20. № 4. P. 370–378.
8. Barlam D., Zahavi E. The reliability of solution in contact problems // Comput. and Struct. 1999. V. 70. № 1. P. 35–45.
9. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.
10. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 424 с.
11. Поздеев А.А., Трусцов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 231 с.
12. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
13. Унксов Е. П., Джонсон У., Колмогоров В. Л. и др. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
14. Schieck B., Stumpf H. The appropriate corotational rate, exact formula for plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity // Intern. J. Solids and Struct. 1995. V. 32. № 24. P. 3643–3667.

Орел

Поступила в редакцию  
12.04.2004