

**РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИ  
ПОВТОРЯЮЩИМИСЯ ВЫРЕЗАМИ**

В работе используется конформное отображение  $z/c = \zeta - 2a \sin \zeta$  ( $a, c = \text{const}$ ,  $\zeta = u + iv$ ) полосы  $\{|v| \leq v_0, |u| < \infty\}$  на область  $D$  – полосу с симметричными периодическими повторяющимися вырезами. Для области  $D$  в ортогональной системе изометрических координат  $u, v$  решается плоская задача теории упругости. Бигармоническая функция разыскивается в виде  $F = C\psi_0 + S\psi_0^* + x(C\psi_1 - S\psi_2) + y(C\psi_2 + S\psi_1)$ , где  $C(v), S(v)$  – оператор-функции, описанные в [1], а функции  $\psi_0(u), \dots, \psi_2(u)$  подлежат определению. Граничные условия для функции  $F$ , задаваемые при  $v = \pm v_0$ , эквивалентны двум операторным уравнениям относительно  $\psi_1(u), \psi_2(u)$  и двум обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка относительно  $\psi_0(u), \psi_0^*(u)$  [2]. Отыскивая функции  $\psi_j(u)$  в форме тригонометрических рядов с неопределенными коэффициентами и решая операторные уравнения, получим бесконечные системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Указывается эффективный способ решения этих систем, основанный на использовании устойчивых рекуррентных соотношений. В работе дается пример расчета конкретной полосы ( $a = 1/4, v_0 = 1$ ), загруженной на границе  $v = v_0$  нормальной нагрузкой интенсивности  $p$ . Найдены частные решения, отвечающие растяжению полосы продольной силой  $X^\infty$ , а также поперечному и чистому изгибам полосы, вызванным соответственно поперечной силой  $Y^\infty$  и постоянным моментом  $M^\infty$ . Приводятся графики нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении  $x = 0$ , исследуется эффект концентрации напряжений у дна выреза.

**1. Операторный метод.** Пусть функция комплексного переменного

$$z = f(\zeta) \quad (z = x + iy \equiv x^1 + ix^2, \zeta = u + iv \equiv u^1 + iu^2) \quad (1.1)$$

конформно отображает прямоугольник  $\{|u| \leq u_0, |v| \leq v_0\}$  в  $\zeta$  – плоскости на заданную область  $D$  в  $z$  – плоскости. Для области  $D$  в ортогональной системе изометрических координат  $u, v$  решается плоская задача теории упругости, которая сводится к отысканию бигармонической функции  $F$  по граничным условиям

$$v = v_j: \partial_u F = P_{2j}(u), \quad \partial_v F = P_{1j}(u) \quad (v_j \equiv u_j^2 = (-1)^j v_0) \quad (1.2)$$

$$u = u_j: F = Q_{2j}(v), \quad \partial_u F = Q_{1j}(v) \quad (u_j \equiv u_j^1 = (-1)^j u_0, j = 1, 2) \quad (1.3)$$

Интегрируя на линиях  $u = u_j, v = v_j$  соотношения

$$\partial_v(\partial_x F) = \sigma_u \partial_v x - \tau_{uv} \partial_v y, \quad \partial_v(\partial_y F) = \sigma_u \partial_v y + \tau_{uv} \partial_v x$$

$$\partial_u(\partial_x F) = \sigma_v \partial_u x + \tau_{uv} \partial_u y, \quad \partial_u(\partial_y F) = \sigma_v \partial_u y - \tau_{uv} \partial_u x$$

$$\partial_v F = (\partial_x F) \partial_v x + (\partial_y F) \partial_v y, \quad \partial_u F = (\partial_x F) \partial_u x + (\partial_y F) \partial_u y$$

и учитывая при этом условия

$$u = u_j: \sigma_u = \sigma_{1j}(v), \quad \tau_{uv} = \tau_{1j}(v) \quad (j = 1, 2) \quad (1.4)$$

$$v = v_j: \sigma_v = \sigma_{2j}(u), \quad \tau_{uv} = \tau_{2j}(u) \quad (1.5)$$

для функций  $P_{kj}(u), Q_{kj}(v)$  найдены выражения

$$\begin{aligned} P_{kj}(u) &= (\delta_j x_{s1} + Y_{kj}(u)) \partial_u x(u, v_j) + (-1)^k (\delta_j x_{k1} + Y_{sj}(u)) \partial_u y(u, v_j) \\ Q_{1j}(v) &= (\delta_j y_{21} + X_{1j}(v)) \partial_v y(u_j, v) - (\delta_j y_{11} + X_{2j}(v)) \partial_v x(u_j, v) \\ Q_{2j}(v) &= \delta_j (x(u_2, v) y_{21} + y(u_2, v) y_{11} - m_{21}) + x(u_j, v) X_{1j}(v) + y(u_j, v) X_{2j}(v) - \\ &- M_{1j}(v) \quad (\delta_1 = 0, \delta_2 = 1; j, k, s = 1, 2; k \neq s) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}$  – компоненты тензора напряжений,  $\sigma_{kj}(u^s), \tau_{kj}(u^s)$  – функции интенсивности внешних усилий,  $\partial_u \equiv \partial/\partial u, \dots, \partial_y \equiv \partial/\partial y$  – операторы дифференцирования. Используются также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Y_{kj}(u) &= \int_{u_1}^u (\sigma_{2j}(u) \partial_u x^s(u, v_j) + (-1)^k \tau_{2j}(u) \partial_u x^k(u, v_j)) du \quad (j, k, s = 1, 2; k \neq s) \\ X_{kj}(v) &= \int_{v_1}^v (\sigma_{1j}(v) \partial_v x^k(u_j, v) + (-1)^k \tau_{1j}(v) \partial_v x^s(u_j, v)) dv \quad (\partial_s \equiv \partial/\partial u^s) \\ 2M_{kj}(u^s) &= \int_a^b (\sigma_{kj}(u^s) \partial_s (x^2 + y^2) - \tau_{kj}(u^s) \partial_k (x^2 + y^2)) \Big|_{u^k = u^k} du^s \quad (a = u_1^s, b = u^s) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$Y_{kj}(u_2) = y_{kj}, \quad X_{kj}(v_2) = x_{kj}, \quad M_{kj}(u_2^s) = m_{kj}$$

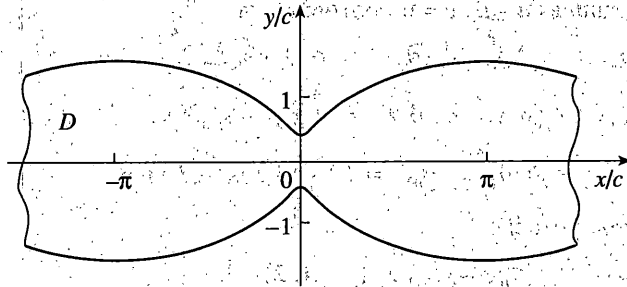
Формулы (1.6), (1.7) получены при условии, что в точке  $(u_1, v_1)$  выполняются равенства  $F = \partial_x F = \partial_y F = 0$ , а внешние усилия удовлетворяют уравнениям равновесия

$$y_{22} - y_{21} = x_{12} - x_{11}, \quad x_{22} - x_{21} = y_{12} - y_{11}, \quad m_{22} - m_{21} = m_{12} - m_{11} \quad (1.8)$$

Бигармоническая функция  $F$  разыскивается в виде

$$\begin{aligned} F &= C(v) \psi_0(u) + S(v) \psi_0^*(u) + x(u, v) (C(v) \psi_1(u) - S(v) \psi_2(u)) + \\ &+ y(u, v) (C(v) \psi_2(u) + S(v) \psi_1(u)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $\psi_0^*, \psi_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) – функции, подлежащие определению,  $C(v), S(v)$  – оператор-функции, определенные на множестве  $\omega$  аналитических функций  $\psi(u)$  следующим образом:  $C(v) \psi(u) = \text{Re}\{\psi(u + iv)\}$ ,  $S(v) \psi(u) = \text{Im}\{\psi(u + iv)\}$ , где точка  $u + iv$  принадлежит области аналитичности функции  $\psi(\zeta)$ .



Фиг. 1

Для частного случая, когда  $\omega$  – множество целых функций, справедливо представление  $C(v) \equiv \cos v \partial_u$ ,  $S(v) \equiv \sin v \partial_u$ .

Неизвестные функции  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$  находятся из системы двух операторных уравнений:

$$S(2v_0)\psi_1 + W_2\partial_u\psi_1 + W_1\partial_u\psi_2 = f_1, \quad S(2v_0)\psi_2 - W_2\partial_u\psi_2 + W_1\partial_u\psi_1 = f_2 \quad (1.10)$$

$$g_0W_1 = \partial_u x_0 \cdot S(2v_0)y_0 + \partial_u y_0 \cdot S(2v_0)x_0, \quad g_0W_2 = \partial_u x_0 \cdot S(2v_0)x_0 - \partial_u y_0 \cdot S(2v_0)y_0 \quad (1.11)$$

$$2(-1)^s f_k = x_{s1} + C(v_0)(Y_{k2} - Y_{k1}) + (-1)^s S(v_0)(Y_{s1} + Y_{s2}), \quad (k \neq s = 1, 2) \quad (1.12)$$

$$x_0 = x(u, 0), \quad y_0 = y(u, 0), \quad g_0 = (\partial_u x_0)^2 + (\partial_u y_0)^2$$

Функции  $\psi_0(u)$  и  $\psi_0^*(u)$  находятся интегрированием двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_u \psi_0 &= -\partial_u x_0 \cdot C(2v_0)\psi_1 - C(2v_0)x_0 \cdot \partial_u \psi_1 - \partial_u y_0 \cdot C(2v_0)\psi_2 - C(2v_0)y_0 \cdot \partial_u \psi_2 + \\ &+ f_1^* \partial_u x_0 + f_2^* \partial_u y_0, \quad \partial_u \psi_0^* = \partial_u y_0 \cdot C(2v_0)\psi_1 - C(2v_0)y_0 \cdot \partial_u \psi_1 - \\ &- \partial_u x_0 \cdot C(2v_0)\psi_2 + C(2v_0)x_0 \cdot \partial_u \psi_2 + f_2^* \partial_u x_0 - f_1^* \partial_u y_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$2f_k^* = x_{k1} + C(v_0)(Y_{s1} + Y_{s2}) + (-1)^s S(v_0)(Y_{k1} - Y_{k2}), \quad (k \neq s = 1, 2) \quad (1.14)$$

Заметим, что функциям  $\psi_1 = c_1' + c_7' y_0$ ,  $\psi_2 = c_2' - c_7' x_0$ ,  $\psi_0 = c_3' x_0 + c_4' y_0 + c_5'$ ,  $\psi_0^* = c_4' x_0 - c_3' y_0 + c_6'$  ( $c_k' - \text{const}$ ) отвечает жесткое смещение тела.

**2. Определение бигармонической функции.** Ниже решена задача для области  $D$  (фиг. 1 при  $a = 1/4$ ,  $v_0 = 1$ ), задаваемой конформным отображением  $z/c = \zeta - 2a \sin \zeta$  полосы  $\{|\nu| \leq v_0, |u| < \infty\}$  ( $v_0 < \text{arch}(2a)^{-1}$ ,  $0 \leq 2a < 1$ ). В этом случае

$$x = c(u - 2a \sin u \operatorname{ch} v), \quad y = c(v - 2a \cos u \operatorname{sh} v)$$

Пусть функции  $\sigma_{2j}(u)$ ,  $\tau_{2j}(u)$ , входящие в условия (1.5) и определяющие загрузку полосы с вырезами, заданы рядами

$$\sigma_{2j} = \sigma_0^j/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^j \cos nu + \sigma_n^{jj} \sin nu), \quad \tau_{2j} = \tau_0^j/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n^j \cos nu + \tau_n^{jj} \sin nu) \quad (2.1)$$

Опишем процедуру нахождения бигармонической функции  $F$ , учитывая в рядах (2.1), например, только коэффициенты  $\sigma_n^j$  ( $j = 1, 2; n = 0, 1, \dots$ ). Поочередно связывая эту процедуру и с другими коэффициентами  $\sigma_n^{jj}, \tau_n^j, \tau_n^{jj}$ , в итоге можно найти полное выражение функции  $F$ . Прежде всего, положив  $u_1 = 0$ , по формулам (1.7) находятся функции  $Y_{kj}(u)$  ( $k, j = 1, 2$ ):

$$c^{-1}Y_{1j} = (-1)^j a \operatorname{sh} v_0 \left( \sigma_j^* + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nu (\sigma_{n+1}^j - \sigma_{n-1}^j) / n \right)$$

$$c^{-1}Y_{2j} = u (\sigma_0^j / 2 - a \operatorname{ch} v_0 \sigma_1^j) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin nu (\sigma_n^j - a \operatorname{ch} v_0 (\sigma_{n-1}^j + \sigma_{n+1}^j)) / n \quad (2.2)$$

$$\sigma_j^* = \sigma_0^j + \sigma_1^j / 2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n^j / (n^2 - 1)$$

Затем по формулам (1.12), (1.14) находятся функции  $f_j(u), f_j^*(u)$ :

$$2c^{-1}f_1 = C^+ + \sum_{n=1}^{\infty} S_n^+ \cos nu, \quad 2c^{-1}f_2 = A^- + B^- u + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^- \sin nu \quad (2.3)$$

$$2c^{-1}f_1^* = A^+ + B^+ u + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^+ \sin nu, \quad 2c^{-1}f_2^* = C^- - \sum_{n=1}^{\infty} S_n^- \cos nu \quad (2.4)$$

$$nC_n^\pm = \sigma_n^\pm \operatorname{ch} n v_0 - a \sigma_{n-1}^\pm \operatorname{ch} (n+1) v_0 - a \sigma_{n+1}^\pm \operatorname{ch} (n-1) v_0, \quad \sigma_n^\pm = \sigma_n^1 \pm \sigma_n^2$$

$$nS_n^\pm = \sigma_n^\pm \operatorname{sh} n v_0 - a \sigma_{n-1}^\pm \operatorname{sh} (n+1) v_0 - a \sigma_{n+1}^\pm \operatorname{sh} (n-1) v_0, \quad A^\pm = \pm c^{-1} x_{11}$$

$$B^\pm = \sigma_0^\pm / 2 - a \sigma_1^\pm \operatorname{ch} v_0, \quad C^\pm = c^{-1} x_{21} + a (\sigma_2^* \pm \sigma_1^*) \operatorname{sh} v_0 \pm v_0 B^\pm \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Далее, определяя по формулам (1.11) функции  $W_j(u)$ :

$$W_1 = 0, \quad W_2 = (2v_0 - 2a \operatorname{sh} 2v_0 \cos u) / (1 - 2a \cos u)$$

и подставляя их в (1.10), получим два операторных уравнения относительно функций  $\psi_j(u)$ :

$$L_j \psi_j(u) = (1 - 2a \cos u) f_j(u) \quad (j = 1, 2) \quad (2.5)$$

$$L_j \equiv (1 - 2a \cos u) S(2v_0) - (-1)^j (2v_0 - 2a \operatorname{sh} 2v_0 \cos u) \partial_u$$

Неизвестные функции  $\psi_j(u)$  разыскиваются в виде рядов

$$2c^{-1}\psi_1 = D_0 u + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{D}_k \sin ku \quad (\Delta_k^\pm = \operatorname{sh} 2k v_0 \pm 2k v_0) \quad (2.6)$$

$$2c^{-1}\psi_2 = m^*(u^2 - 4a u \sin u) + A_0 [A^-(u^3 - 6a u^2 \sin u) + B^-(u^4 / 4 - 2a u^3 \sin u)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \{ (A^- u + B^- u^2 / 2) \tilde{A}_k \cos ku + (A^- + B^- u) \tilde{B}_k \sin ku + (m^* \tilde{E}_k + B^- \tilde{C}_k + \tilde{F}_k) \cos ku \}$$

$$\tilde{D}_k = D_k/\Delta_k^+, \quad \tilde{A}_k = A_k/\Delta_k^-, \dots, \tilde{F}_k = F_k/\Delta_k^- \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Здесь  $D_0, D_k, A_0, A_k, \dots, F_k$  – коэффициенты, подлежащие определению; постоянная  $m^*$  – произвольный множитель в однородном решении уравнения (2.5).

Подставляя (2.3) и (2.6) в (2.5) и учитывая тождественные соотношения и равенства

$$\begin{aligned} 2c^{-1}L_1\Psi_1(u) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos ku = 2c^{-1}f_1(u)(1-2a\cos u) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} S_k^* \cos ku \\ 2c^{-1}L_2\Psi_2(u) &\equiv (A^-u + B^-u^2/2) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin ku + (A^- + B^-u) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^* \cos ku + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (m^*\gamma_k + B^-\beta_k^* + \gamma_k^*) \sin ku = 2c^{-1}f_2(u)(1-2a\cos u) \equiv \\ &\equiv (A^- + B^-u)(1-2a\cos u) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* \sin ku \end{aligned}$$

получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $D_0, D_k, \dots, F_k$ :

$$\begin{cases} \alpha_0 \equiv 4v_0 D_0 - a_1^+ D_1 = S_0^* \equiv C^+ - aS_1^+, & (a_k^\pm = a(\operatorname{sh}2kv_0 \pm k\operatorname{sh}2v_0)/\Delta_k^\pm) \\ \alpha_1 \equiv -2a\Delta_1^+ D_0 + D_1 - a_2^+ D_2 = S_1^* \equiv -2aC^+ + S_1^+ - aS_2^+ \\ \alpha_k \equiv -a_{k-1}^+ D_{k-1} + D_k - a_{k+1}^+ D_{k+1} = S_k^* \equiv S_k^+ - aS_{k-1}^+ - aS_{k+1}^+ \quad (k = 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \beta_1 \equiv -A_1 + a_2^- A_2 - 24A_0 a v_0 (\operatorname{ch}2v_0 - 1) = 0 \\ \beta_2 \equiv -A_2 + a_3^- A_3 + 12A_0 a^2 (2v_0 \operatorname{ch}2v_0 - \operatorname{sh}2v_0) = 0 \\ \beta_k \equiv a_{k-1}^- A_{k-1} - A_k + a_{k+1}^- A_{k+1} = 0 \quad (k = 3, 4, \dots) \\ \alpha_0^* \equiv -A_0 (8v_0^3 + 24a^2 v_0^2 \operatorname{sh}2v_0) - b_1 \tilde{A}_1 = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \alpha_1^* \equiv B_1 - a_2^- B_2 - n_1 + A_0 a (16v_0^3 + 24v_0^2 \operatorname{sh}2v_0) = -2a \\ \alpha_2^* \equiv B_2 - a_3^- B_3 - n_2 - 24A_0 a^2 v_0^2 \operatorname{sh}2v_0 = 0 \\ \alpha_k^* \equiv -a_{k-1}^- B_{k-1} + B_k - a_{k+1}^- B_{k+1} - n_k = 0 \quad (k = 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$b_k = a(2v_0 \operatorname{ch}2kv_0 - \operatorname{sh}2v_0), \quad c_k = 2v_0 (\operatorname{ch}2kv_0 - 1) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$n_1 = -c_1 \tilde{A}_1 + b_2 \tilde{A}_2, \quad n_k = b_{k-1} \tilde{A}_{k-1} - c_k \tilde{A}_k + b_{k+1} \tilde{A}_{k+1} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$n_k = a(\tilde{A}_{k-1} + \tilde{A}_{k+1}) [\operatorname{sh}2v_0 (2kv_0 \operatorname{cth}kv_0 - 1) - 2v_0 \operatorname{ch}2v_0] + 4v_0 \tilde{A}_k (1 - kv_0 \operatorname{cth}kv_0) \quad (k = 3, 4, \dots)$$

$$\begin{cases} \beta_1^* \equiv -C_1 + a_2 C_2 + m_1 + 16A_0 a v_0^3 \operatorname{ch} 2v_0 = 0 \\ \beta_2^* \equiv -C_2 + a_3 C_3 + m_2 - 16A_0 a^2 v_0^3 \operatorname{ch} 2v_0 = 0 \\ \beta_k^* \equiv a_{k-1} C_{k-1} - C_k + a_{k+1} C_{k+1} + m_k = 0 \quad (k = 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 \tilde{B}_1 - b_2 \tilde{B}_2 + s_1 \tilde{A}_1 - a s_2 \tilde{A}_2, \quad m_k = -b_{k-1} \tilde{B}_{k-1} + c_k \tilde{B}_k - b_{k+1} \tilde{B}_{k+1} + s_k \tilde{A}_k - \\ &- a(s_{k-1} \tilde{A}_{k-1} + s_{k+1} \tilde{A}_{k+1}) \quad (k = 2, 3, \dots), \quad s_k = 2v_0^2 \operatorname{sh} 2kv_0, \quad m_k = 4v_0 \tilde{B}_k (kv_0 \operatorname{cth} kv_0 - 1) + \\ &+ a(\tilde{B}_{k-1} + \tilde{B}_{k+1}) [2v_0 \operatorname{ch} 2v_0 + \operatorname{sh} 2v_0 (1 - 2kv_0 \operatorname{cth} kv_0)] - 4kv_0^3 \tilde{A}_k + \\ &+ (2v_0 b_1 \operatorname{cth} kv_0 + a s_1 (k+3)) \tilde{A}_{k+1} + (2v_0 b_1 \operatorname{cth} kv_0 + a s_1 (k-3)) \tilde{A}_{k-1} \quad (k = 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 \equiv -E_1 + a_2 E_2 + 8av_0(1 - \operatorname{ch} 2v_0) = 0 \\ \gamma_2 \equiv -E_2 + a_3 E_3 + 4a^2(2v_0 \operatorname{ch} 2v_0 - \operatorname{sh} 2v_0) = 0 \\ \gamma_k \equiv a_{k-1} E_{k-1} - E_k + a_{k+1} E_{k+1} = 0 \quad (k = 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \gamma_1^* \equiv -F_1 + a_2 F_2 = C_1^* \equiv C_1^- - a C_2^- \\ \gamma_k^* \equiv a_{k-1} F_{k-1} - F_k + a_{k+1} F_{k+1} = C_k^* \equiv C_k^- - a C_{k-1}^- - a C_{k+1}^- \quad (k = 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (2.12)$$

Ниже дается эффективный способ решения квазирегулярных (2.7)–(2.8) и регулярных (2.9)–(2.12) систем уравнений [3]. Пусть, например, неизвестные  $B_k$ , входящие в систему (2.9), связаны рекуррентным соотношением

$$B_k = \varepsilon_{k-1} B_{k-1} + \lambda_k n_k \quad (k \geq 3) \quad (2.13)$$

Тогда, подставляя (2.13) в (2.9), нетрудно получить

$$\varepsilon_{k-1} = a_{k-1} / (1 - a_{k+1} \varepsilon_k), \quad \lambda_k n_k = (n_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} n_{k+1}) / (1 - a_{k+1} \varepsilon_k) \quad (2.14)$$

Если учесть, что  $a_k^\pm \rightarrow a$ ,  $n_{k+1}/n_k \rightarrow \alpha$  ( $\alpha = \varepsilon / \exp 2v_0$ ) при  $k \rightarrow \infty$ , то, как следует из (2.14), для величин  $\varepsilon_k$  и  $\lambda_k$  имеют место предельные соотношения

$$\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon = 2a / (1 + \sqrt{1 - 4a^2}), \quad \lambda_k \rightarrow \lambda = 1 / (1 - a(\varepsilon + a)) \quad (k \rightarrow \infty)$$

Теперь, положив  $\varepsilon_m = \varepsilon$ ,  $\lambda_{m+1} = \lambda$  ( $m > 20$ ), по формулам (2.14) можно последовательно вычислить  $\varepsilon_{m-1}$ ,  $\lambda_m n_m$ , ...,  $\varepsilon_2$ ,  $\lambda_3 n_3$  (рекуррентный процесс “назад”). Далее, исключая величину  $B_3$  ( $B_3 = \varepsilon_2 B_2 + \lambda_3 n_3$ ) из второго уравнения системы (2.9) и решая совместно уравнения  $\alpha_1^* = 0$ ,  $\alpha_2^* = 0$ , находим коэффициенты  $B_1$ ,  $B_2$  и затем по формуле (2.13) последовательно вычисляем  $B_3$ ,  $B_4$ , ...,  $B_{m+1}$  (рекуррентный процесс “вперед”). Важно отметить, что оба упомянутых процесса устойчивы [4].

Подставляя функции  $f_j^*(u)$ ,  $\psi_j(u)$ , определяемые формулами (2.4), (2.6), в соотношения (1.13) и учитывая, что  $x_0 = c(u - 2a \sin u)$ ,  $y_0^* = 0$ , получим два обыкновенных диффе-

ренциальных уравнения относительно функций  $\psi_0(u)$  и  $\psi_0^*(u)$ . Интегрируя эти уравнения, находим

$$2c^{-2}\psi_0 = A^+c^{-1}x_0 + u^2(B^+/2 - D_0) + 2a(D_0 - B^+)u\sin u - \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{D}_k u \sin ku + D_k^* \cos ku) \quad (2.15)$$

$$2c^{-2}\psi_0^* = R_0u + \sum_{k=1}^{\infty} (R_k \sin ku + \tilde{F}_k u \cos ku) + m^* \left\{ u^3/3 - 2au^2 \sin u + T_0u + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{E}_k u \cos ku - T_k \sin ku) \right\} + A^+ \left\{ A_0(u^4/2 - 4au^3 \sin u) + A^*u^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(M_k + u^2 \tilde{A}_k) \cos ku + (\tilde{B}_k - L_k)u \sin ku] \right\} + B^- \{ A^*u^3/3 + Q_0u + \quad (2.16)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [(\tilde{A}_k u^3/2 + H_k u) \cos ku - (G_k u^2/2 + Q_k) \sin ku] + A_0[0.15u^5 - 1.5au^4 \sin u - u^2(12\eta_2 a \sin u - 6\eta_3 a^2 \sin 2u) + u(8\eta_4 a \cos u - 6\eta_5 a^2 \cos 2u) + 8\eta_6 a \sin u + \eta_7 a^2 \sin 2u] \}$$

$$R_0 = C^- + aS_1^+ + 2a \operatorname{ch} 2v_0 \tilde{F}_1, \quad T_0 = 4\eta_1 + 2a \operatorname{ch} 2v_0 \tilde{E}_1, \quad A^* = 6A_0\eta_1 + a \operatorname{ch} 2v_0 \tilde{A}_1$$

$$Q_0 = 2a \operatorname{ch} 2v_0 (\tilde{C}_1 - v_0^2 \tilde{A}_1) - a \tilde{B}_1 (2v_0 \operatorname{sh} 2v_0 + \operatorname{ch} 2v_0) - 4A_0 v_0^3 (v_0 + 4a^2 \operatorname{sh} 2v_0)$$

$$\operatorname{ch} v_0 D_1^* = 2v_0 \operatorname{sh} v_0 (\tilde{D}_1 - 2aD_0) - a \tilde{D}_2 \operatorname{ch} 3v_0 + 2a(C^+ \operatorname{sh} v_0 + B^+ \operatorname{ch} v_0) + \Sigma_1^+$$

$$\operatorname{ch} v_0 D_k^* = 2v_0 \operatorname{sh} k v_0 \tilde{D}_k + a(\tilde{D}_{k-1} \operatorname{ch}(k-2)v_0 - \tilde{D}_{k+1} \operatorname{ch}(k+2)v_0) + k^{-1} \Sigma_k^+ \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$R_1 = -F_1^* - 2aC^- + \Sigma_1^- / \operatorname{sh} v_0, \quad R_k = -F_k^* + k^{-1} \Sigma_k^- / \operatorname{sh} k v_0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$\Sigma_1^\pm = \sigma_1^\pm (1 + a^2 \operatorname{ch} 2v_0/2) - a \operatorname{ch} v_0 (\sigma_0^\pm + 3\sigma_2^\pm/2) + a^2 \sigma_3^\pm/2$$

$$\Sigma_k^\pm = \sigma_k^\pm (k^{-1} + 2a^2 \operatorname{ch} 2v_0 / (k - k^{-1})) - a \operatorname{ch} v_0 (\sigma_{k-1}^\pm (2 - k^{-1}) / (k - 1) +$$

$$+ \sigma_{k+1}^\pm (2 + k^{-1}) / (k + 1)) + a^2 (\sigma_{k-2}^\pm / (k - 1) + \sigma_{k+2}^\pm / (k + 1)) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$T_k = E_k^* + t_k a^k, \quad t_1 = 8v_0^2, \quad t_2 = 4v_0 / \operatorname{sh} 2v_0, \quad M_k = B_k^* - A_k^0 - m_k^* a^k$$

$$m_1^* = 2 \operatorname{cth} v_0 (1 + 8A_0 v_0^3), \quad m_2^* = 12A_0 v_0^2 \operatorname{cth} 2v_0 / \operatorname{sh} 2v_0, \quad L_k = A_k^* + l_k a^k$$

$$l_1 = 24A_0 v_0^2, \quad l_2 = 12A_0 v_0 / \operatorname{sh} 2v_0, \quad H_k = B_k^* - A_k^0 - h_k a^k$$

$$h_1 = 2\text{cth}v_0 + A_0(16v_0^3\text{cth}v_0 + 8\eta_4), \quad h_2 = A_0(12v_0^2\text{ch}2v_0(\text{cth}^2 2v_0 - 2) + 6\eta_3)$$

$$G_k = A_k^* - g_k a^k, \quad g_1 = 24A_0v_0\text{sh}2v_0, \quad g_2 = 6A_0\text{ch}2v_0(1 - 2a\text{cth}2v_0)$$

$$Q_k = C_k^* + B_k^0 - A_k^0 v_0 \text{cth}kv_0 - q_k a^k, \quad q_1 = 2(\text{cth}v_0 + v_0/\text{sh}^2 v_0) + 8A_0(2v_0^4/\text{sh}^2 v_0 - 2v_0^3\text{sh}2v_0 - \eta_4),$$

$$q_2 = A_0[v_0^3(8\text{ch}2v_0\text{cth}2v_0 + 12/\text{sh}^3 2v_0) - 6v_0^2\text{ch}2v_0 + 3\eta_3]$$

$$\eta_1 = v_0^2 + a^2(\text{ch}2v_0 + 2v_0\text{sh}2v_0), \quad \eta_2 = v_0\text{sh}2v_0 + v_0^2, \quad \eta_3 = v_0\text{sh}2v_0 - \text{ch}2v_0/2$$

$$\eta_4 = 6v_0^2\text{sh}^2 v_0 - 3v_0\text{sh}2v_0, \quad \eta_5 = 2v_0^2\text{ch}2v_0 - \eta_3, \quad \eta_6 = v_0^3 + 2v_0^2\text{sh}2v_0 - \eta_4$$

$$\eta_7 = \eta_5 - \eta_3(2 + 8v_0^2) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (t_k = m_k^* = l_k = h_k = g_k = q_k = 0 \quad (k = 3, 4, \dots))$$

$$\begin{cases} \text{sh}kv_0 A_k^* = 2v_0 \text{ch}kv_0 \tilde{A}_k + a(\tilde{A}_{k-1} \text{sh}(k-2)v_0 - \tilde{A}_{k+1} \text{sh}(k+2)v_0) \\ \text{sh}^2 kv_0 A_k^0 = v_0(2v_0 \tilde{A}_k - a(\tilde{A}_{k-1} + \tilde{A}_{k+1})\text{sh}2v_0) \quad (k = 1, 2, \dots; \tilde{A}_0 \equiv 0) \end{cases} \quad (2.17)$$

В формулах (2.17) буквы  $A$  можно заменить на любую из букв  $B, C, E, F$ . Наконец, подставляя функции  $\psi_0, \dots, \psi_2$ , определяемые соотношениями (2.6), (2.15), (2.16), в формулу (1.9), найдем ту часть бигармонической функции, которая выражается через коэффициенты  $\sigma_n^j$  и постоянные величины  $x_{21}, x_{11}, m^*$ . В результате получим

$$2c^{-2}F = A^+ c^{-1}x(u, v) + B^+ [(u^2 - v^2)/2 - 2a(u \sin u \text{ch} v - v \text{sh} v \cos u)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} [\Phi_k^\sigma(v) + m^* \Phi_k^0(v) + (A^- u + B^- u^2/2)\Phi_k^*(v) + B^- \tilde{\Phi}_k(v)] \cos ku + \quad (2.18)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A^- + B^- u)\Phi_k(v) \sin ku \quad (\Phi_k^\sigma(v) = \Phi_k^+(v) + \Phi_k^-(v))$$

$$\Phi_0^+ = 2D_0 v^2 - a\tilde{D}_1 \text{ch}2v, \quad \Phi_1^+ = (2\tilde{D}_1 - 4aD_0)v \text{sh} v - D_1^* \text{ch} v - a\tilde{D}_2 \text{ch}3v \quad (2.19)$$

$$\Phi_k^+ = 2\tilde{D}_k v \text{sh}kv - D_k^* \text{ch}kv + a(\tilde{D}_{k-1} \text{ch}(k-2)v - \tilde{D}_{k+1} \text{ch}(k+2)v) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$\Phi_0^- = R_0 v - a\tilde{F}_1 \text{sh}2v, \quad \Phi_0^0 = T_0 v - 4v^3/3 - 4a^2 v \text{ch}2v - a\tilde{E}_1 \text{sh}2v$$

$$\Phi_k^- = 2\tilde{F}_k v \text{ch}kv + R_k \text{sh}kv + a(\tilde{F}_{k-1} \text{sh}(k-2)v - \tilde{F}_{k+1} \text{sh}(k+2)v) \quad (k = 1, 2, \dots; \tilde{F}_0 \equiv 0)$$

$$\Phi_k^0 = 2\tilde{E}_k v \text{ch}kv - E_k^* \text{sh}kv + a(\tilde{E}_{k-1} \text{sh}(k-2)v - \tilde{E}_{k+1} \text{sh}(k+2)v) + e_k^0(v)$$

$$e_1^0 = 8a \text{sh}v(v^2 - v_0^2), \quad e_2^0 = 4a^2(v - v_0 \text{sh}2v/\text{sh}2v_0) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\Phi_0^* = 2A^* v - A_0(4v^3 + 12a^2 v \text{ch}2v) - a\tilde{A}_1 \text{sh}2v$$

$$\Phi_k^* = 2\tilde{A}_k v \text{ch}kv - A_k^* \text{sh}kv + a(\tilde{A}_{k-1} \text{sh}(k-2)v - \tilde{A}_{k+1} \text{sh}(k+2)v) + 3A_0 e_k^0(v)$$

$$\tilde{\Phi}_0 = 2A_0(v^5/5 + a^2 v^3 \text{ch}2v) - A^* v^3/3 + Q_0 v + a\tilde{B}_1 v \text{ch}2v + a(\tilde{A}_1 v^2/2 - \tilde{C}_1) \text{sh}2v$$

$$\tilde{\Phi}_k = -\Phi_k^* v^2/2 + (2\tilde{C}_k + B_k^* - A_k^0) v \text{ch}kv - (C_k^* + B_k^0 + 2v^2 \tilde{B}_k - A_k^0 v_0 \text{cth}kv_0) \text{sh}kv +$$

$$+ av(\tilde{B}_{k+1} \text{ch}(k+2)v - \tilde{B}_{k-1} \text{ch}(k-2)v) + a(\tilde{C}_{k-1} \text{sh}(k-2)v - \tilde{C}_{k+1} \text{sh}(k+2)v) + \tilde{e}_k(v) a^k$$



$$\tilde{e}_1 = 2 \operatorname{sh} v [4A_0(2v_0^4 \operatorname{cth}^2 v_0 - v_0^4 + v^4) + \operatorname{cth} v_0 + v_0 / \operatorname{sh}^2 v_0] - m_1^* v \operatorname{ch} v$$

$$\tilde{e}_2 = 4A_0 \{ v^3 + [\operatorname{sh} 2v(3 \operatorname{cth}^2 2v_0 - 1)v_0 - 3v \operatorname{ch} 2v \operatorname{cth} 2v_0] v_0^2 / \operatorname{sh} 2v_0 \}$$

$$\Phi_k = (2\tilde{B}_k - A_k^*) v \operatorname{ch} kv + (2v^2 \tilde{A}_k - B_k^* + A_k^0) \operatorname{sh} kv + av(\tilde{A}_{k-1} \operatorname{ch}(k-2)v - \tilde{A}_{k+1} \operatorname{ch}(k+2)v) + a(\tilde{B}_{k-1} \operatorname{sh}(k-2)v - \tilde{B}_{k+1} \operatorname{sh}(k+2)v) - e_k(v) a^k$$

$$e_1 = 8A_0[(v^3 - 3v_0^2 v) \operatorname{ch} v + 2v_0^3 \operatorname{cth} v_0 \operatorname{sh} v] + 2 \operatorname{sh} v \operatorname{cth} v_0, \quad \tilde{E}_0 \equiv \tilde{B}_0 \equiv \tilde{C}_0 \equiv 0$$

$$e_2 = 12A_0(v_0 \operatorname{cth} 2v_0 \sin 2v - v \operatorname{ch} 2v) v_0 / \operatorname{sh} 2v_0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad e_k^0 = \tilde{e}_k = e_k = 0 \quad (k = 3, 4, \dots)$$

Ниже приводятся значения функций  $\Phi_k^\sigma, \dots, \Phi_k$  и их производных при  $v = \pm v_0$ :

$$\partial_v \Phi_0^\sigma = C^- \pm C^+ + a \operatorname{sh} v_0 (\sigma_1^- \mp \sigma_1^+) - a^2 \operatorname{sh} 2v_0 (\sigma_0^- \mp \sigma_0^+)$$

$$\Phi_1^\sigma = \pm \Sigma_1^- - \Sigma_1^+ - 2a \operatorname{ch} v_0 B^+ - 2a \operatorname{sh} v_0 (C^+ \pm C^-)$$

$$\partial_v \Phi_1^\sigma = \pm \tilde{\Sigma}_1^+ - \tilde{\Sigma}_1^- - 2a \operatorname{ch} v_0 (C^- \pm C^+) \mp 2a \operatorname{sh} v_0 B^+, \quad \partial_v \Phi_1 = 2a \operatorname{sh} v_0$$

$$\Phi_k^\sigma = k^{-1} (\pm \Sigma_k^- - \Sigma_k^+), \quad \partial_v \Phi_k^\sigma = \pm \tilde{\Sigma}_k^+ - \tilde{\Sigma}_k^-, \quad \tilde{\Sigma}_1^\pm = a \operatorname{sh} v_0 (\sigma_2^\pm / 2 - \sigma_0^\pm) + a^2 \operatorname{sh} 2v_0 \sigma_1^\pm / 2$$

$$\tilde{\Sigma}_k^\pm = a \operatorname{sh} v_0 (\sigma_{k-1}^\pm / (k^2 - k) + \sigma_{k+1}^\pm / (k^2 + k)) - 2a^2 \operatorname{sh} 2v_0 \sigma_k^\pm / (k^2 - 1) \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.20)$$

$$\Phi_0^0 = \pm (b_1 \tilde{E}_1 + 8v_0^3 / 3 + 8a^2 v_0^2 \operatorname{sh} 2v_0), \quad \Phi_0^* = \mp 1, \quad \Phi_k^0 = \Phi_k^* = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\partial_v \tilde{\Phi}_0 = v_0, \quad \tilde{\Phi}_1 = \pm 2a (\operatorname{ch} v_0 - v_0 \operatorname{sh} v_0), \quad \partial_v \tilde{\Phi}_1 = -2av_0 \operatorname{ch} v_0, \quad \Phi_1 = \pm 2a \operatorname{ch} v_0$$

$$\tilde{\Phi}_k = \Phi_k = \partial_v \tilde{\Phi}_k = \partial_v \Phi_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots), \quad \partial_v \Phi_k^0 = \partial_v \Phi_k^* = 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Используя выражения (2.20), нетрудно убедиться, что описываемая соотношениями (2.18), (2.19) бигармоническая функция  $F$  и определяемые через нее напряжения  $\sigma_v, \tau_{uv}$  удовлетворяют граничным условиям (1.2) и (1.5) соответственно.

**3. Анализ решения.** Условия (1.2) эквивалентны следующим:

$$v = v_j; \quad \partial_x F = Y_{2j} + \delta_j x_{11}, \quad \partial_y F = Y_{1j} + \delta_j x_{21} \quad (j = 1, 2) \quad (3.1)$$

Выясним теперь, какое напряженное состояние соответствует постоянным  $x_{21}, x_{11}, m^*$ , входящим в (2.18). Для этого мысленно рассежем полосу с вырезами и рассмотрим ту ее часть, которая при движении от точки  $A(u, v_1)$  к точке  $B(u, v_2)$  остается слева. Тогда главный вектор  $\{X; Y\}$  и главный момент  $M$  от внутренних усилий, действующих на оставленную часть полосы по поперечному сечению  $AB$ , определяются через функцию  $F$  так:

$$X = \partial_y F|_A^B, \quad Y = -\partial_x F|_A^B, \quad M = (F - x \partial_x F - y \partial_y F)|_A^B \quad (3.2)$$

Положив  $\sigma_n^j = m^* = 0$  и подставляя (2.18), (3.1) в (3.2), получим

$$X = x_{21}, \quad Y = -x_{11}, \quad M = -x(u, v_0) x_{11} \quad (x_{21} = X^\infty, x_{11} = -Y^\infty)$$

$k$	$A_k$	$B_k$	$C_k$	$D_k'$	$D_k''$
0	-0.25556105	-	-	0.27419912	0.38692045
1	4.06524421	-7.53496326	-11.21168382	0.30034812	-1.53057849
2	-0.79141983	2.87883929	5.61285366	0.10474053	-0.04319493
3	-0.18204778	0.57166086	0.89777954	0.03104666	-0.01280362
4	-0.04754541	0.14519908	0.21829848	8.517542E-3	-3.512629E-3
5	-0.01268304	0.03853393	0.05745511	2.292323E-3	-9.453525E-4
6	-3.395864E-3	0.01030817	0.01534730	6.146854E-4	-2.534959E-4
7	-9.098084E-4	2.761321E-3	4.110181E-3	1.647245E-4	-6.793228E-5
8	-2.437777E-4	7.398620E-4	1.101229E-3	4.413864E-5	-1.820275E-5
9	-6.531986E-5	1.982441E-4	2.950696E-4	1.182695E-5	-4.877426E-6
10	-1.750239E-5	5.311929E-5	7.906351E-5	3.169022E-6	-1.306903E-6

$k$	$E_k$	$F_k'$	$k$	$E_k$	$F_k'$
1	-5.30237841	-1.77394587	6	4.429292E-3	2.137746E-3
2	1.03226453	0.49821043	7	1.186681E-3	5.727378E-4
3	0.23744852	0.11460176	8	3.179641E-4	1.534617E-4
4	0.06201442	0.02993054	9	8.519798E-5	4.111981E-5
5	0.01654274	7.984161E-3	10	2.282872E-5	1.101801E-5

Отсюда следует, что величине  $x_{21}$  отвечает растяжение полосы постоянной продольной силой  $X^\infty$ , а величине  $x_{11}$  – поперечный изгиб. При этом постоянная поперечная сила  $Y^\infty$  и изгибающий момент  $M$  связаны формулой Журавского  $Y^\infty = \partial_x M$ .

Далее, положив  $\sigma_n^j = x_{11} = x_{21} = 0$  из (3.2) найдем

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad M = m^* c^2 \Phi_0^0(v_0) \quad (m^* = c^{-2} M^\infty / \Phi_0^0(v_0))$$

и, следовательно, величине  $m^*$  отвечает чистый изгиб полосы постоянным моментом  $M^\infty$ .

В работе дается пример расчета конкретной полосы ( $a = 1/4, v_0 = 1$ ), загруженной нормальной нагрузкой интенсивности  $p$ , а также усилиями и моментом  $X^\infty, Y^\infty, M^\infty$ :

$$\sigma_{22}(u) = \sigma_0^2/2 = p, \quad \sigma_{21}(u) = \tau_{2j}(u) = 0 \quad (p = \text{const}, j = 1, 2)$$

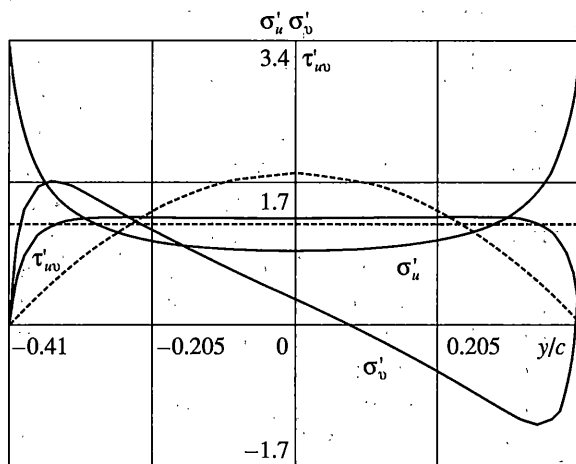
В этом случае

$$x = 0: X = X^\infty, \quad Y = Y^\infty, \quad M = M^\infty + 0.648044 p c^2$$

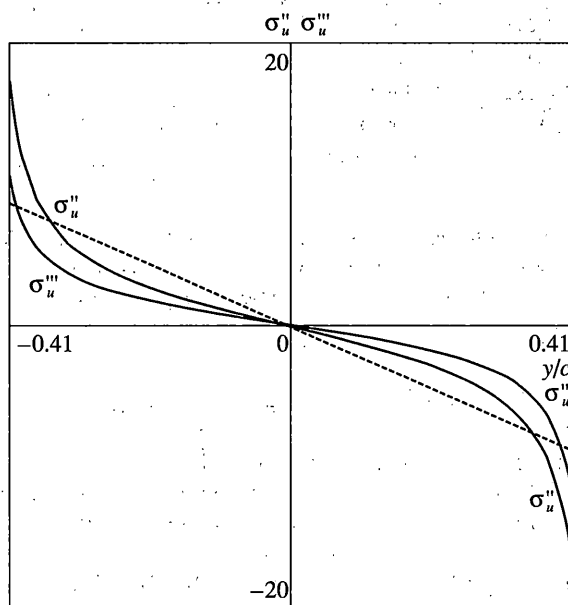
$$C_1^\pm = \mp 2ap \operatorname{ch} 2v_0, \quad S_1^\pm = \mp 2ap \operatorname{sh} 2v_0, \quad C_n^\pm = S_n^\pm = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$A^\pm = \mp c^{-1} Y^\infty, \quad B^\pm = \pm p, \quad C^\pm = c^{-1} X^\infty + (v_0 + 2a \operatorname{sh} v_0) p$$

В таблице приводятся значения коэффициентов  $A_k, B_k, \dots, D_k', D_k'', F_k'$  ( $D_k = c^{-1} X^\infty D_k' + p D_k'', F_k = p F_k'$ ), а на фиг. 2, 3 графики нормальных и касательных безразмерных напряжений  $\sigma_u', \sigma_u'', \dots, \sigma_v', \tau_{uv}$  в поперечном сечении полосы  $x = 0$  ( $\sigma_u =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$= c^{-1}X^{\infty}\sigma'_u + c^{-2}M^{\infty}\sigma''_u + p\sigma'''_u$ ,  $\sigma'_v = p\sigma'_v$ ,  $\tau_{uv} = c^{-1}Y^{\infty}\tau'_{uv}$ ). Расчет напряжений проводился по формулам

$$\sigma_u = g^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + (2g)^{-1} \left( \frac{\partial g \partial F}{\partial u \partial u} - \frac{\partial g \partial F}{\partial v \partial v} \right) \right\}, \quad g = (\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2$$

$$\sigma_v = g^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (2g)^{-1} \left( \frac{\partial g \partial F}{\partial v \partial v} - \frac{\partial g \partial F}{\partial u \partial u} \right) \right\}$$

$$\tau_{uv} = g^{-1} \left\{ -\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (2g)^{-1} \left( \frac{\partial g \partial F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial g \partial F}{\partial u \partial v} \right) \right\}$$

и соответствующие этим формулам графики показаны сплошными линиями. Для сравнения штриховыми линиями обозначены зависимости, полученные по формулам сопротивления материалов. На фиг. 2, 3 виден эффект концентрации напряжений у дна выреза [5]. Коэффициент концентрации при растяжении полосы равен 2.794, при изгибе – 2.092. Кроме того, представленные графики свидетельствуют о том, что сжатые продольные волокна полосы давят друг на друга ( $\sigma_v < 0$ ), а растянутые волокна стремятся оторваться друг от друга ( $\sigma_v > 0$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00119).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базаренко Н.А. Операторный метод решения плоской задачи теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 73–83.
2. Базаренко Н.А. Решение операторным методом плоской задачи теории упругости для области, ограниченной кривыми второго порядка // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 5. С. 50–61.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с.
5. Neuber H. Kerbspannungslehre. Berlin: Springer, 1958. 226 s.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
24.05.2004