

УДК 539.3

© 2007 г. С.А. КУЛИЕВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ ОТ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ НАГРУЗКИ

Рассматривается напряженно-деформированное состояние пластинки, имеющей двухсвязную область S , ограниченной снаружи окружностью радиуса R , а изнутри эллипсом с двумя прямолинейными разрезами. Разрезы расположены симметрично на оси x . Пластинка находится под действием различных усилий: по контуру отверстия (эллипс) действуют равномерно распределенные усилия интенсивности q , а берега разрезов свободны от нагрузок; в точках $\pm id$ мнимой оси y на пластинку действуют сосредоточенные силы P .

Решение задачи сводится к определению двух аналитических функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям (в зависимости от вида действующих нагрузок).

Используя метод Колосова–Мусхелишвили, задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$. Для иллюстрации полученного решения рассмотрены числовые примеры.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние круглой пластинки, имеющей двухсвязную область, ограниченную извне окружностью радиуса R , а изнутри центрально расположенным эллипсом и двумя прямолинейными разрезами, примыкающими к эллипсу. Разрезы расположены симметрично, вдоль оси x . Координаты концевых точек разреза обозначены через $\pm e$ (фиг. 1).

На пластинку действуют различные нагрузки: на контуре эллипса приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , а берега разрезов–трещин свободны от внешних усилий; в точках $\pm id$ мнимой оси y приложены сосредоточенные силы P .

Как известно [1–10], решение задач такого типа сводится к определению двух аналитических в области S пластинки, функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) \text{ на } L_j \quad (1)$$

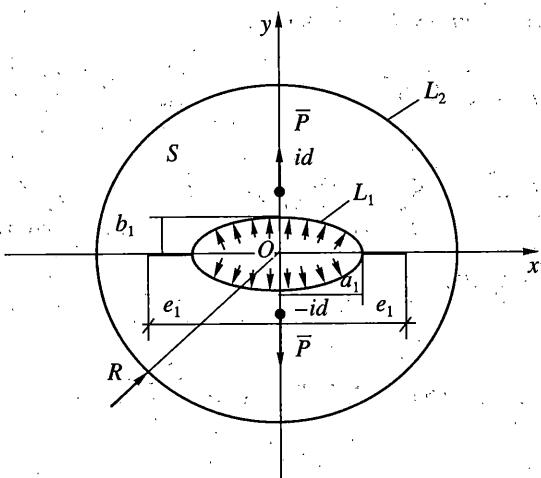
где t – аффикс точек контуров L_j ($j = 1, 2$). Функция $f(t)$ в зависимости от приложенных нагрузок имеет следующие значения [3; 4; 7]:

a) если на контуре эллиптического отверстия L_1 приложена нагрузка q , а берега разрезов свободны от внешних усилий, то

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ik\theta} \text{ на } L_1 \quad (2)$$

b) если в точках $\pm id$ мнимой оси y приложены сосредоточенные силы P , в силу отсутствия нагрузки на L_1 и L_2 :

$$f(t) = 0 \text{ на } L_j \quad (j = 1, 2) \quad (3)$$



Фиг. 1

Аналитические функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ представим в следующем виде [1–7]:

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{R}\right)^k + A(z) \quad (4)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{R}\right)^k + B(z) \quad (5)$$

причем

$$A(z) = B(z) = 0 \quad (6)$$

когда на контуре отверстия приложена нагрузка q . Если же во внутренних точках пластиинки $\pm id$ приложены силы P , то эти функции имеют следующие значения [1, 4, 7]:

$$A(z) = \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{z-id}{z+id}, \quad B(z) = \chi A(z), \quad \chi = \frac{3-v}{1+v} \quad (7)$$

Внешность внутреннего контура L_1 (эллипс с двумя прямолинейными разрезами) отображается на внешность единичной окружности с помощью функции [4–6]:

$$z = A_1 \xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \xi_1^{-n} \quad (8)$$

Функция $\xi_1 = \chi(z)$, обратная к отображающей функции (8), найдена в виде [4–6]:

$$\xi_1 = \frac{z}{A_1} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left(\frac{A_1}{z}\right)^n \quad (9)$$

Учитывая, что эти функции впервые получены автором и здесь приводятся без выводов.

В формулах (8) и (9) приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad \Pi_n = \sum_{k=0}^n \gamma_{k-1} T_{n-k}, \quad T_v = \sum_{v=n-2E(n/2)}^{*} m_1^{(v-n_1)/2} \gamma_{-1}^{n_1-v} \lambda_v \\
 m_1 &= \left| \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \right|, \quad E_n = \sum_{v=n-2E(n/2)}^{*} a_{(n-v)/2}^{(1)} H_v, \quad H_v = \sum_{k=v-2E(v/2)}^{*} \delta_{k-1} L_{(v-k)/2} \\
 \gamma_{k-1} &= \sum_{n=0}^k 2\lambda(-1)^{n/2} C_{1/2}^{n/2} (\alpha/2)^{1-n} C_{1-n}^{k-n} \\
 \delta_{n-1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k/2} C_{1/2}^{k/2} (1/2\alpha)^{1-k} C_{1-k}^{(k+n)/2}, \quad \alpha = \frac{e^2 + r^2}{2er}, \quad r = 1 \\
 e &= \frac{1}{2} \left[\frac{e_1}{A_1} + \sqrt{\left(\frac{e_1}{A_1} \right)^2 - 4m_1} \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

Звездочка над символами суммы означает, что индекс суммирования при переходе к следующему слагаемому изменится на 2. Символ $E(n/2)$ показывает, что из всех чисел $(n/2)$ нужно брать целую часть.

Величины λ_n или L_n определяются из условий

$$\begin{aligned}
 \lambda_n + \sum_{n_1=1}^n l_{n-n_1} q_{n_1}^{(k)} &= 0, \quad q_{n_1}^{(k)} = \sum_{k_1=0}^{n_1} q_{k_1}^{(1)} q_{k_1-n_1}^{(k-1)} \\
 L_n + \sum_{n_1=1}^n L_{n-n_1} a_{n_1}^{(k)} &= 0, \quad a_{n_1}^{(k)} = \sum_{k_1=0}^{n_1} a_{k_1}^{(1)} a_{k_1-n_1}^{(k-1)} \\
 q_{k_1}^{(1)} &= \gamma_{k_1-1}/\gamma_{-1} \quad (k=2, 3, \dots, n=0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Первые семь величин $a_k^{(1)}$ для эллиптического контура имеют следующие значения [4–6]:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(1)} &= 1, \quad a_1^{(1)} = -m, \quad a_2^{(1)} = -2m^2 \\
 a_3^{(1)} &= -5m^3, \quad a_4^{(1)} = -15m^4, \quad a_5^{(1)} = -42m^5, \quad a_6^{(1)} = -144m^6
 \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь определим значения аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на контурах L_1 и L_2 . Для этого необходимо установить зависимости между переменными ξ_1 и z и наоборот.

На внутреннем контуре L_1 второе слагаемое в правой части формулы (4) с учетом отображающей функции (8) после некоторых преобразований приводится к виду:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{R} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{A}{R} \right)^k \left[\xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \xi_1^{-n} \right]^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{A}{R} \right)^k \xi_1^k \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n^{(k)} \xi_1^{-n} = \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^v T_1(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \xi_1^{-v} T_2(v) \\
 T_1(v) &= \sum_{k=v}^{\infty} b_k \left(\frac{A}{R} \right)^k \Pi_{k-v}^{(k)}, \quad T_2(v) = \sum_{k=v}^{\infty} b_k \left(\frac{A}{R} \right)^k \Pi_{k+v}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Все величины $\Pi_n^{(k)}$ определяются как $q_{n_1}^{(k)}$ и $a_{n_1}^{(k)}$ в формуле (11). При этом имеет место равенство $\Pi_n^{(1)} = \Pi_n$, где Π_n определяются согласно (10).

Далее, необходимо преобразовать функции $A(z)$ и $B(z)$, найдя их значения на внутреннем контуре L_1 . И так имеем:

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{z - id}{z + id} = P_1 [\ln(z - id) - \ln(z + id)] \\ P_1 &= \frac{P}{2\pi i(1 + \chi)} \end{aligned} \quad (14)$$

Так как на L_1 имеем $z = t_2 < id$, то логарифмические функции можно разложить в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \ln(z - id) &= \ln(-id) + \ln\left(1 - \frac{z}{id}\right) = \ln(-id) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{id}\right)^k \\ \ln(z + id) &= \ln(id) + \ln\left(1 + \frac{z}{id}\right) = \ln(id) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{z}{id}\right)^k \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом отображающей функции (8) можно записать

$$\begin{aligned} \ln(z - id) &= \ln(-id) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A}{id}\right)^k \left[\xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \xi_1^{-n} \right]^k = \\ &= \ln(-id) - \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^v T_3(v) - \sum_{v=1}^{\infty} \xi_1^{-v} T_4(v) \\ T_3(v) &= \sum_{k=v}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A}{id}\right)^k \Pi_{k-v}^{(k)}, \quad T_4(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A}{id}\right)^k \Pi_{k+v}^{(k)} \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично будем иметь

$$\begin{aligned} \ln(z + id) &= \ln(id) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{z}{id}\right)^k = \\ &= \ln(id) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{A}{id}\right)^k \left[\xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \xi_1^{-n} \right]^k = \ln(id) + \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^v T_5(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \xi_1^{-v} T_6(v) \\ T_5(v) &= \sum_{k=v}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{A}{id}\right)^k \Pi_{k-v}^{(k)}, \quad T_6(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{A}{id}\right)^k \Pi_{k+v}^{(k)} \end{aligned} \quad (17)$$

Поступая аналогичным образом со вторым и третьим слагаемыми в формуле (5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{R}\right)^k &= \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^v T_7(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \xi_1^{-v} T_8(v) \\ T_7(v) &= \sum_{k=v}^{\infty} d_k \left(\frac{A}{R}\right)^k \Pi_{k-v}^{(k)}, \quad T_8(v) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{A}{R}\right)^k \Pi_{k+v}^{(k)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$B(z) = \chi A(z) = \chi P_1 [\ln(z - id) - \ln(z + id)] =$$

$$= \chi P_1 \left[\ln(-id) - \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^v T_3(v) - \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^{-v} T_4(v) - \ln(id) - \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^v T_5(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \xi_1^{-v} T_6(v) \right] \quad (19)$$

Таким образом, аналитические функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые формулами (4) и (5) на внутреннем контуре L_1 (эллипс с двумя прямолинейными разрезами) с учетом вышеизложенных выражений (13)–(19) и после перехода к новой переменной τ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi(t_1) = \phi(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tau^{-k} + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_1(v) + \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_2(v) + P_1 \left[\ln(-id) - \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_3(v) - \right. \\ &\left. - \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_4(v) - \ln(id) - \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_5(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} T_6(v) \right] \text{ на } L_1 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi(t_1) = \psi(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^{-k} + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_7(v) + \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_8(v) + \chi P_1 \left[\ln(-id) - \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_3(v) - \right. \\ &\left. - \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} T_4(v) - \ln(id) - \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v T_5(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} T_6(v) \right] \text{ на } L_1 \end{aligned} \quad (21)$$

Для того чтобы найти значения аналитических функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$ на внешнем контуре L_2 (окружность радиуса R), подставим выражения (9) в первые слагаемые формул (4) и (5). Проведя некоторые математические преобразования, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_1^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[\frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left(\frac{A}{z} \right)^n \right]^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{A}{z} \right)^k \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} E_n (A/z)^n} = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A}{z} \right)^v \Phi_1(v) \quad (22)$$

$$\Phi_1(v) = \sum_{k=0}^v \alpha_k L_{v-k}^*$$

Аналогично будем иметь

$$\sum_{k=1}^v \alpha_k \xi_1^{-k} = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A}{z} \right)^v \Phi_2(v) \quad \Phi_2(v) = \sum_{k=0}^v c_k L_{v-k}^* \quad (23)$$

Значения всех величин L_n^* находим из условия

$$L_n^* + \sum_{n_1=1}^{\infty} L_{n-n_1}^* E_{n_1}^{(k)} = 0 \quad (24)$$

$$E_{n_1}^{(k)} = \sum_{k_1=1}^n E_{k_1}^{(1)} E_{n-k_1}^{(k-1)}, \quad E_{n_1}^{(k)} = E_n$$

Значения E_n определяются разложением (10).

Таким образом, аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на внешнем контуре L_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(t_2) &= \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A}{t_2}\right)^v \Phi_1(v) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{t_2}{R}\right)^k + \\ &+ P_1 \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{id}{t_2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{id}{t_2}\right)^k \right] \\ \Psi(t_2) &= \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A}{t_2}\right)^v \Phi_2(v) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{t_2}{R}\right)^k + \\ &+ \chi P_1 \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{id}{t_2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{id}{t_2}\right)^k \right] \end{aligned} \quad (25)$$

При получении этих формул было учтено, что на внешнем контуре L_2 при $t_2 > id$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \ln(t_2 - id) &= \ln t_2 + \ln\left(1 - \frac{id}{t_2}\right) = \ln t_2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{id}{t_2}\right)^k \\ \ln(t_2 - id) &= \ln t_2 + \ln\left(1 + \frac{id}{t_2}\right) = \ln t_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} \left(\frac{id}{t_2}\right)^k \end{aligned} \quad (26)$$

Далее можно найти значения функции $t_1 \overline{\Phi'(t)}$ на внутреннем и на внешнем контурах:

$$\begin{aligned} t_1 \overline{\Phi'(t_1)} &= \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\Phi'(\tau)} = \frac{\tau \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \tau^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} (1-k) \Pi_k \tau^k} \overline{\Phi'(\tau)} = \tau \left[\sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} H_1(v) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v H_2(v) \right] \overline{\Phi'(\tau)} = \tau^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} W_1(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n W_2(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^* \tau^n W_3(n) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} W_4(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} W_5(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n W_6(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n W_7(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} W_8(n) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} W_9(n) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^* \tau^n W_9(n) \Big] + \tau^2 \bar{P}_1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} W_{10}(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} W_{11}(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n W_{12}(n) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n W_{13}(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} W_{14}(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^* \tau^n W_{15}(n) \right] \text{ на } L_1
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^* = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 2 \\ 1 & \text{при } n \geq 2 \end{cases}$$

Значения всех величин $W_1(n) - W_{15}(n)$ из-за громоздкости здесь не приводятся. Они получаются в результате перемножения двойных рядов (один пример приводим ниже):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} \sum_{n=v}^{\infty} \Pi_n \lambda_{n-v} \sum_{k=0}^{\infty} k \tau^{-k} \sum_{n=v_1}^{\infty} b_n \left(\frac{A}{R} \right)^k \Pi_{k-v_1} = \\
 & = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} H_1(v) \sum_{v=0}^{\infty} k \tau^{-k} T_1(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} W_4(n) \\
 & W_4(n) = \sum_{v=0}^n H_1(v)(n-v) T_1(n-v)
 \end{aligned} \tag{28}$$

На внешнем контуре L_2 (окружности $t_2 \bar{t}_2 = R^2$) функция $t \overline{\Phi'(t)}$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 t_2 \overline{\Phi'(t_2)} & = \sum_{v=1}^{\infty} (-v) \Phi_1(v) \left(\frac{A}{R} \right) \left(\frac{t_2}{R} \right)^{v+2} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left(\frac{R}{t_2} \right)^{k-2} + \\
 & + \bar{P}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{-id}{R} \right)^k \left(\frac{t_2}{R} \right)^{k+2} + (-1)^{k+1} \left(\frac{id}{R} \right)^k \left(\frac{t_2}{R} \right)^{k+2} \right] \text{ на } L_2
 \end{aligned} \tag{29}$$

При действии на контуре отверстий равномерно распределенной нагрузки q необходимо определить функцию $f(t)$, входящую в правую часть граничного условия (2).

Для этого нужно найти коэффициенты λ_k в зависимости от действующей нагрузки и формы отверстий (используя при этом отображающую функцию (8) и учитывая, что на единичной окружности $\tau = e^{i\theta}; \tau^{-1} = e^{-i\theta}$, где θ полярный угол):

$$\begin{aligned}
 \lambda_k & = -qA \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \left\{ \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} e^{i(k-n+1)\theta} d\theta - e^{i(1-n)} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} e^{ik\theta} d\theta + \right. \\
 & + \left. \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{i(k-n+1)\theta} d\theta + [e^{i(1-n)\alpha} - e^{-i(1-n)\alpha}] \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{ik\theta} d\theta + e^{i(1-n)\alpha} \int_{2\pi-\alpha}^{\alpha} e^{ik\theta} d\theta \right\} = \\
 & = -qA \Pi_n \left\{ \frac{\varepsilon_1}{k-n+1} [-(-1)^{k-n+1} \sin(k-n+1)\alpha - \sin(k-n+1)\alpha] + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ 2\epsilon_2(\pi - 2\alpha) + \frac{4}{k}\epsilon_3 \sin k\alpha [\cos(1-n)\alpha - \sin(1-n)\alpha] \left\{ \epsilon_4 + \lambda_0 \epsilon_5 \right\} \quad (30)$$

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } k-n = -1 \\ 1 & \text{при } k-n \neq -1 \end{cases}, \quad \epsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } k-n \neq -1 \\ 1 & \text{при } k-n = -1 \end{cases}$$

$$\epsilon_3 = 0 \quad \text{при } k \neq 1, 3, 5$$

$$\epsilon_4 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0; 2; 4 \dots \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad \epsilon_5 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_0 = -qA \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \left\{ \frac{2\epsilon_1^*}{1-n} \sin(1-\alpha)[1+(-1)^{n-1}] + \right. \\ \left. + 2(2\alpha-\pi) \cos(1-n)\alpha + 2(\pi-2\alpha)\epsilon_2^* + 2(\pi-2\alpha)\sin(1-n)\alpha \right\} \quad (31)$$

$$\epsilon_1^* = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 1 \\ 1 & \text{при } n \neq 1 \end{cases}, \quad \epsilon_2^* = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 1 \\ 1 & \text{при } n = 1 \end{cases}$$

Учитывая в (1) выражения (20), (21), (25), (27) и (29), граничные условия на внутреннем и на внешнем контурах L_j ($j = 1; 2; \dots$) сводятся к следующим двум системам уравнений (для обоих вариантов приложенных нагрузок):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tau^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k T_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} T_2(k) + \tau^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} W_1(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k W_2(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^* \tau^{-k} W_3(k) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} W_4(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} W_5(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k W_6(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k W_7(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} W_8(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^* \tau^k W_9(k) \right] + \quad (32)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^k + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} T_7(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k T_8(k) = f_1 \quad \text{на } L_1$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A}{t_2} \right)^v \Phi_1(v) + \sum_{v=0}^{\infty} b_v \left(\frac{t_2}{R} \right)^v + \sum_{v=1}^{\infty} (-v) \Phi_1(v) \left(\frac{A}{R} \right)^v \left(\frac{t_2}{R} \right)^{v+2} + \sum_{v=0}^{\infty} v b_v \left(\frac{t_2}{R} \right)^{v-2} + \\ + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{A}{R} \right)^v \left(\frac{t_2}{R} \right)^v \Phi_2(v) + \sum_{v=0}^{\infty} d_k \left(\frac{R}{t_2} \right)^v = f_2 \quad \text{на } L_2 \quad (33)$$

Для задачи, когда на мнимой оси у в точках $\pm id$ приложены сосредоточенные силы P , функции f_1 и f_2 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
f_1 = & P_1 \left[\ln(id) + \ln(-id) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k T_3(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} T_4(k) + \right. \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k T_5(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} T_6(k) \Big] + \chi \bar{P}_1 [\ln(-id) - \ln(id) + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} T_5(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k T_6(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} T_3(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k T_4(k)] - \\
& - \bar{P}_1 \tau^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} W_{10}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} W_{11}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} W_{14}(k) + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k W_{12}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k W_{13}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \epsilon^* W_{15}(k) \Big] \quad \text{на } L_1 \\
f_2 = & P_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{id}{R} \right)^k \left(\frac{R}{t_2} \right)^k [1 + (-1)^{k+1}] - \bar{P}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-id}{R} \right)^k \left(\frac{t_2}{R} \right)^{k+2} [1 + (-1)^{k+1}] + \\
& + \chi \bar{P}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{-id}{R} \right)^k \left(\frac{t_2}{R} \right)^{k+2} [1 + (-1)^{k+1}] \quad \text{на } L_2
\end{aligned} \tag{34}$$

Если на контуре эллиптического отверстия приложена равномерно-распределенная нагрузка q , а берега разрезов-трещин свободы от нагрузки, то

$$\begin{aligned}
f_1 = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ik\theta} = (-qA) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \left\{ 2\epsilon_2(\pi - 2\alpha) - \right. \\
& - \frac{\epsilon_1}{k-n+1} \sin(k-n+1)\alpha [1 + (-1)^{k-n+1}] + \\
& \left. + \frac{4\epsilon_3}{k} \sin k\alpha [\cos(1-n)\alpha - \sin(1-n)\alpha] \epsilon_4 \right\} + \lambda_0 \epsilon_5 \quad \text{на } L_1
\end{aligned} \tag{36}$$

причем $f_2 = 0$, так как на внешнем контуре L_2 нагрузка отсутствует. Значение λ_0 определяется согласно равенству (31).

Теперь, учитывая разложения (34) или же (36) в (32) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ или же при $e^{\pm ik\theta}$, а также учитывая (35) в (33) или же $f_2 = 0$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t_2/R , получим следующие четыре системы бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k , b_k , c_k и dk для обоих случаев приложенных нагрузок P или q :

$$\begin{aligned}
& \alpha_k + T_2(k) + W_1(k+2) + W_4(k+2) + W_5(k+2) + \\
& + W_8(k+2) + T_7(k) = f_1^- \quad \text{на } L_1
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} T_1(k) + W_1(1)\delta_1 + W_1(k+2)\delta_2 + \varepsilon^* W_3(k-2)\delta_2 + \\ + W_4(1)\delta_1 + W_5(1)\delta_1 + W_6(k-2)\delta_2 + W_7(k-2)\delta_2 + \\ + W_8(1)\delta_1 + \varepsilon^* W_9(k-2)\delta_2 + c_k + T_8(k) = f_1^+ \text{ на } L_1 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\Phi_1(k)(A/R)^k + kb_k\delta_4 + d_k = f_2^- \text{ на } L_2 \quad (39)$$

$$b_k + (2-k)\Phi_1(k-2)(A/R)^k\delta_2 + b_1\delta_1 + (A/R)^k\Phi_2(k) = f_2^+ \text{ на } L_1 \quad (40)$$

В этих уравнениях приняты обозначения:
для задачи, когда в точках $\pm ia$ приложена сосредоточенная сила:

$$\begin{aligned} f_1^- = P_1[T_6(k) + T_4(k)] + \chi \overline{P}_1[\overline{T}_5(k) + \overline{T}_3(k)] - \\ - \overline{P}_1[W_{10}(k-2)\delta_2 + W_{11}(k-2)\delta_2 + W_{14}(k-2)\delta_2] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} f_1^+ = P_1[T_5(k) + T_3(k)] + \chi \overline{P}_1[\overline{T}_6(k) + \overline{T}_4(k)] - \\ - \overline{P}_1[W_{10}(2-k)\delta_2 + W_{11}(1)\delta_1 + W_{14}(1)\delta_1 + \\ + W_{12}(k-2)\delta_2 + W_{13}(k-2)\delta_2 + \varepsilon^* W_{15}(k-2)\delta_2] \end{aligned} \quad (42)$$

$$f_2^- = P_1 \left(\frac{id}{R} \right)^k \frac{1}{k} [1 + (-1)^{k+1}] \quad (43)$$

$$f_2^+ = -\overline{P}_1(-id/R)^k [1 + (-1)^{k+1}] \delta_2 + \chi P_1 \frac{1}{k} (-id/R)^k [1 + (-1)^{k+1}] \quad (44)$$

для другой задачи, когда к контуру отверстия приложена нагрузка q , а на L_2 нагрузка отсутствует:

$$\begin{aligned} f_1^- = \lambda_{-k} = -qA \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n \{ 2\varepsilon_2(\pi - 2\alpha) - \\ - \frac{\varepsilon_1}{1-k-n} \sin(1-k-n)\alpha [1 + (-1)^{1-k-n}] + \\ + \frac{4\varepsilon_3}{k} \sin k\alpha [\cos(1-n)\alpha - \sin(1-n)\alpha] \} \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} f_1^+ = \lambda_k = -qA \sum_{n=0}^{\infty} \{ 2\varepsilon_2(\pi - 2\alpha) - \\ - \frac{\varepsilon_1}{1-k-n} \sin(k-n+1)\alpha [1 + (-1)^{k-n+1}] + \\ + \frac{4\varepsilon_3}{k} \sin k\alpha [\cos(1-n)\alpha - \sin(1-n)\alpha] \} \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (46)$$

$$f_2^- = f_2^+ = 0 \quad (47)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 1 \\ 0 & \text{при } k = 1 \end{cases}, \quad \delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \leq 2 \\ 1 & \text{при } k \geq 3 \end{cases}$$

$$\delta_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \geq 3 \\ 0 & \text{при } k \leq 2 \end{cases}, \quad \delta_4 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \leq 3 \\ 1 & \text{при } k \geq 3 \end{cases}$$

Величины f_1^- и f_2^- относятся к коэффициентам при отрицательных степенях переменных, а f_1^+ и f_2^+ при положительных.

Как видно, в обоих случаях нагружения рассматриваемой пластинки, решение задачи сводится к решению четырех систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k и d_k . Для обоих случаев нагружения левые части этих систем уравнений одинаковы, а правые части различны. Удерживая несколько первых членов в каждой системе (37)–(40) и решая их совместно, можно определить все неизвестные коэффициенты a_k, b_k, c_k и d_k и тем самым найти аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для каждого конкретного нагружения по формулам (4) и (5).

Компоненты напряжений σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ определяются по известным формулам Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 4R_e[\Phi'(z)] \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)]2e^{i\theta} \end{aligned} \quad (48)$$

Зная значения напряжений σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в характерных точках сечения рассматривающей пластинки, коэффициенты интенсивности напряжений K_1 в локальной близости концевых точек разрезов–трещин определяются согласно асимптотическим формулам [2, 4, 5, 11]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K}{4\sqrt{2\rho}} \begin{pmatrix} 5\cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{pmatrix} \quad (49)$$

В связи с наличием геометрической и силовой симметрии в данной задаче (в обоих случаях нагружения) $K_2 = 0$.

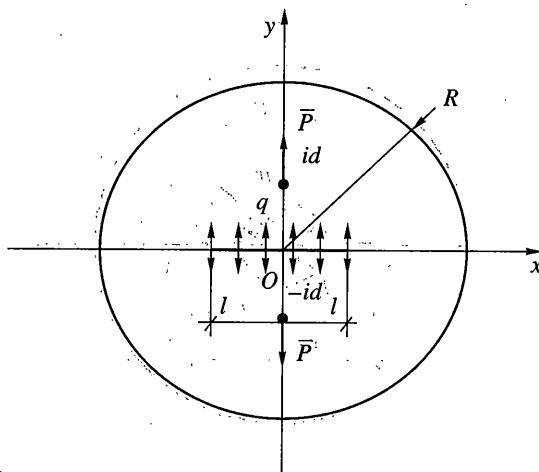
Найдя значения K_1 по известному критерию Ирвина [2, 4, 7, 10]:

$$K_1 = K_c/\sqrt{\pi} \quad (50)$$

где K_c – сопротивление материала на трещиностойкость, определяется величина критической нагрузки P или q , при которых начинается распространение трещины, то есть начинается хрупкое разрушение пластиинки. Между коэффициентом K_c и пределом прочности (выносливости) материала $[\sigma_b]$ существует зависимость

$$[\sigma_b] = 0.97 \frac{K_c}{\sqrt{\pi l}}, \quad l = l_1 - a_1 \quad (51)$$

где l – длина разреза–трещины.



Фиг. 2

Приведем значения технической прочности материала $[\sigma_b]$ для некоторых материалов: для серого чугуна СЧ28-48 $[\sigma_b] = 23.3 \text{ кГ/мм}^2$, для обычновенных сталей (СТ10-СТ40) $[\sigma_b] = 34-58 \text{ кГ/мм}^2$, для стали 20Х $[\sigma_b] = 80 \text{ кГ/мм}^2$.

Полученные решения иллюстрируются следующими числовыми примерами.

1. Круглая пластинка с центральной прямолинейной трещиной (фиг. 2). В системах уравнений (37)-(40) и в отображающей функции (8) примем малую ось эллипса равной нулю, $\epsilon_1 = 0$; $m_1 = 1$ и $l = a_1 = e$, тогда внутренний контур L_f превратится в прямолинейный разрез длиной $2l$, берега которого нагружены распределенной нагрузкой q , или в точках $\pm id$ мнимой оси приложены силы P .

Числовые расчеты проводили для следующих значений относительных размеров радиуса окружности R и длины трещины l : $l/R = 0.25, 0.5, 0.8$. При этом величины σ_θ для случая нагружения равномерно распределенной нагрузкой q в локальной близости концевых точек трещины имеют следующие значения соответственно для каждого варианта l/R : $\sigma_\theta = 1.84q$, $\sigma_\theta = 2.47q$, $\sigma_\theta = 4.56q$.

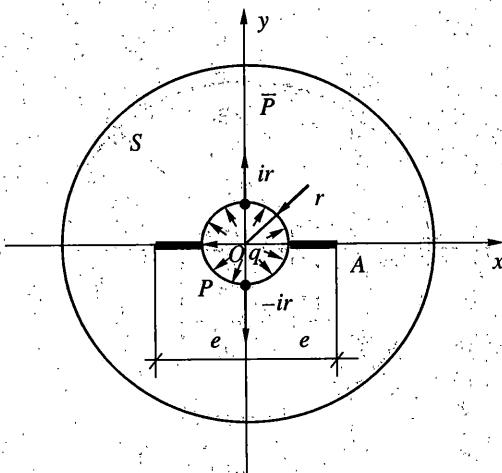
Коэффициенты интенсивности напряжений K_1 в долях $10K_1/q\sqrt{l}$ получились для указанных отношений l/R равными следующим значениям: 7.36, 9.88, 18.24.

Значения критической нагрузки q_{cr} , при которой начинается распространение трещины, таковы: 1.40 $[\sigma_\theta]$, 1.043 $[\sigma_\theta]$, 0.565 $[\sigma_\theta]$.

При действии в точках $\pm id$ мнимой оси у сосредоточенных сил P (берега трещины и внешний контур свободы от нагрузки) в локальной близости концевых точек трещины при $\pm 1.01a_1$ напряжения σ_θ имеют следующие значения: $\sigma_\theta = 0.8 P$ при $l/R = 0.5$, $d = 0$; $\sigma_\theta = 0.88 P$ при $l/R = 0.5$, $d = 0.5l$; $\sigma_\theta = 0.752 P$ при $l/R = 0.5$, $d = 1.0l$; $\sigma_\theta = 0.72 P$ при $l/R = 0.25$, $d = 1.5l$; $\sigma_\theta = 0.56 P$ при $l/R = 0.25$, $d = 2.0l$.

Значения K_1 для указанных отношений l/R равны соответственно следующим величинам (в долях $10K_1/P\sqrt{l}$): 1.0; 1.1; 0.94; 0.84; 0.7. При этом величина критической нагрузки P_{cr} имеет следующие значения: $P_{cr} = 3.22 [\sigma_\theta]$, 2.93 $[\sigma_\theta]$, 3.43 $[\sigma_\theta]$, 3.84 $[\sigma_\theta]$ и 4.6 $[\sigma_\theta]$.

Известно, что такой пример методом интегральных уравнений был рассмотрен в работе [11] для бесконечной пластиинки, когда на берегах обеих трещин приложена равномерно распределенная нагрузка. Значения коэффициентов интенсивности напряжений K_1 (в силу геометрической и силовой симметрии $K_2 = 0$) в долях $10K_1/q\sqrt{l}$ для указ-



Фиг. 3

занных отношений l/r , получены в виде: 10.07, 9.49, 8.74, 8.46, 8.3. Максимальное отклонение получилось в последнем варианте ($l/r = 2.0$). Это можно объяснить тем, что $R/r = 4$. (Из литературы известно, что при $R \geq 5r$ пластину без заметного ущерба можно принять бесконечной.)

2. Круглая пластина с центральной круглой полостью и двумя прямолинейными разрезами, выходящими на внутренний контур (фиг. 3).

Если в отображающей функции (8) и в системах уравнений (37)–(40) принять $m = 0$; $a_1 = b_1 = r_1$, то внутренний контур L_1 становится окружностью радиуса r с двумя прямолинейными разрезами, выходящими в эту окружность.

Расчеты проводились для следующих вариантов отношений e/R и r/R : $e/R = 0.2, 0.4, 0.8, 1.0, 2.0$.

Для первых трех вариантов $r/R = 0.5$, для двух последних было взято $e/R = 0.8$, где $e = r + l$, координаты концевых точек разрезов.

Напряжения σ_θ для случая нагружения контура окружности радиуса r , равномерно распределенной нагрузкой q , в локальной близости концевых точек разрезов-трещин имеют следующие значения: $\sigma_\theta = 2.77q, 2.25q, 1.91q, 1.21q, 0.83q$.

Коэффициенты K_1 в долях $10K_1/(q\sqrt{l})$, полученные для указанных вариантов, имеют значения: 11.21, 9.14; 7.65; 4.83; 3.25. Значения критической нагрузки q таковы: $q_{cr} = 0.865 [\sigma_b], 1.06 [\sigma_b], 1.27 [\sigma_b], 2.08 [\sigma_b], 2.89 [\sigma_b]$.

В случае, когда в точках кругового отверстия $\pm ir$ приложены сосредоточенные силы P , напряжения σ_θ в локальной близости концевых точек разрезов при $\pm 1.01e$ и при тех же отношениях e/r и e/R имеют следующие значения: $\sigma_\theta = 0.81 P, 1.26 P, 1.72 P, 1.85 P, 2.14 P$.

Значения коэффициента K_1 в долях $10K_1(q\sqrt{l})$ таковы 3.24, 5.04, 6.88, 7.4, 8.56.

Критическая сосредоточенная сила P_{cr} имеет следующие значения: $P_{cr} = 3.18 [\sigma_b], 2.05 [\sigma_b], 1.5 [\sigma_b], 1.2 [\sigma_b], 1.02 [\sigma_b]$.

Случай бесконечной пластинки с круговым отверстием радиуса r , на контур которого выходят две трещины, рассмотрен в работе [11] при действии на контуре отверстий в точках $b = \pm ir$ приложенных двух сосредоточенных сил P . Коэффициент концентраций напряжений K_1 в долях $10 K_1/(P\sqrt{l})$ для указанных отношений l/r получил соответственно следующие значения: 3.27, 5.02, 7.54, 8.27, 8.54.

Как видно из сравнений с данными публикуемой работы максимальное отклонение не превышает 3%.

Значения σ_0 , вычисленные в локальной близости концевых точек разрезов-трещин, показывают, что резкое увеличение (почти до бесконечности) напряжений в концевой точке трещин носит местный характер. При удалении от концевых точек эти напряжения резко падают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1976. 272 с.
2. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
3. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев: Вища шк., 1975. 227 с.
4. Кулиев С.А. Двумерные задачи теории упругости. М.: Стройиздат, 1991. 351 с.
5. Кулиев С.А. Конформное отображение. Баку: Изд-во Азерб. политехн. ин-та, 1995. 130 с.
6. Kuliev S.A. Stressed state of polygonal plate with central circular hollow and two linear cracks // Eng-nng Fracture Mech. 1987. V. 27. № 6. P. 601–613.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
9. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
10. Шерман Д.И. Упругая плоскость с прямолинейными разрезами // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. № 7. С. 635–638.
11. Си Г.С., Парис П., Эрдоган Ф. Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин // Тр. Амер. Об-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1962. № 2. С. 102–108.
12. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Баку

Поступила в редакцию

30.12.2004