

УДК 531.36

© 2007 г. Т.Е. ЧУРКИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ПЛОСКОГО РЕЗОНАНСНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите. Спутник представляет собой твердое тело, линейные размеры которого малы по сравнению с размерами орбиты. Исследован частный случай плоского движения, когда спутник вращается в плоскости орбиты, совершая в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите. Возмущения предполагаются произвольными (как плоскими, так и пространственными). В пространстве параметров задачи получены области неустойчивости по Ляпунову и области устойчивости в первом приближении. В областях устойчивости в первом приближении построены резонансные кривые третьего и четвертого порядков, на которых проведено нелинейное исследование устойчивости движения. При малых значениях эксцентриситета исследования проводились аналитически, при произвольных – численно.

1. Постановка задачи. Рассматривается движение спутника относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Спутник представляет собой твердое тело, линейные размеры которого малы по сравнению с размерами орбиты. Предполагается, что вращательное движение спутника не влияет на форму орбиты его центра масс, которая предполагается эллиптической [1].

Пусть O – центр масс спутника, $OXYZ$ – орбитальная система координат, ось OZ направлена по прямой, соединяющей притягивающий центр и центр масс O спутника, OX – по трансверсали, а OY – по бинормали. Введем систему координат $Oxyz$, жестко связанную со спутником, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Ориентацию спутника в орбитальной системе координат будем задавать при помощи углов Эйлера ψ , φ , θ .

Плоские движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите описываются дифференциальным уравнением второго порядка [1]:

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \varphi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\varphi}{dv} + \alpha \sin \varphi \cos \varphi = 2e \sin v, \quad \alpha = \frac{3(A - B)}{C}$$

где A , B , C – главные центральные моменты инерции спутника относительно осей Ox , Oy и Oz соответственно, e – эксцентриситет орбиты, φ – угол между главной осью инерции Oy и радиус-вектором центра масс спутника относительно притягивающего центра, v – истинная аномалия.

Известно [1], что при $\alpha = 6e$ данное уравнение допускает частное решение $\varphi = v/2$. Для этого решения спутник вращается в плоскости орбиты, совершая в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите (движение меркурианского типа [2]). Для такого движения при прохождении пе-

рицентра орбиты одна из главных центральных осей инерции тела совпадает с радиус-вектором, а при прохождении апоцентра эта же ось перпендикулярна радиус-вектору.

Задача об устойчивости такого вращения в плоскости эллиптической орбиты в линейной постановке была исследована в статье [3]. В [4] эта же задача решена в строгой нелинейной постановке.

Ниже исследуется задача об устойчивости данного частного случая движения при наличии и плоских, и пространственных возмущений.

Движение спутника относительно центра масс описывается каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{((A/B)\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{2\sin^2\theta(1+e\cos\nu)^2} p_\psi^2 + \frac{((A/B)\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{2(1+e\cos\nu)^2} p_\theta^2 + \\ & + \frac{1}{2(1+e\cos\nu)^2} \left[\left(\frac{A}{B} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) \operatorname{ctg}^2\theta + \frac{A}{C} \right] p_\varphi^2 - \\ & - \left(\frac{A}{B} - 1 \right) \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sin\theta(1+e\cos\nu)^2} p_\psi p_\theta - \left(\frac{A}{B} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta(1+e\cos\nu)^2} p_\psi p_\varphi + \\ & + \left(\frac{A}{B} - 1 \right) \frac{\sin\varphi \cos\varphi \operatorname{ctg}\theta}{(1+e\cos\nu)^2} p_\theta p_\varphi - \cos\psi \operatorname{ctg}\theta p_\psi - \sin\psi p_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta} p_\varphi + \\ & + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{B}{A} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) \sin^2\theta - \frac{C}{A} \sin^2\theta \right] (1+e\cos\nu) \end{aligned}$$

Здесь $\psi, \theta, \varphi, p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ – канонические переменные Гамильтона, при этом обобщенные импульсы обезразмерены при помощи множителя $A\omega_0$; ω_0 – среднее движение центра масс спутника. За независимую переменную принята истинная аномалия.

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану Γ , имеют следующее частное решение, отвечающее рассматриваемому случаю плоского движения

$$\psi = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\nu}{2}, \quad p_\psi = 0, \quad p_\theta = 0, \quad p_\varphi = \frac{3C(1+e\cos\nu)^2}{2A}$$

Введем параметр $J = (C - B)/A$, $|J| \leq 1$. Вторым параметром задачи является эксцентриситет орбиты e .

2. Линейная задача. Сделав в гамильтониане Γ замену переменных

$$\psi = \pi + q_1, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_2, \quad \varphi = \frac{\nu}{2} + q_3, \quad \Psi = p_1, \quad \theta = p_2, \quad \varphi = \frac{3C(1+e\cos\nu)^2}{2A} + p_3$$

получим функцию Гамильтона H возмущенного движения, которую можно представить в виде ряда по степеням q_i, p_i : $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$, где H_m – однородные функции степени m относительно q_i, p_i . Из-за громоздкости H_m при $m > 2$ в статье не приводятся, а H_2 имеет вид

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\nu/2) + \kappa \cos^2(\nu/2)}{(1+e\cos\nu)^2} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\cos^2(\nu/2) + \kappa \sin^2(\nu/2)}{(1+e\cos\nu)^2} p_2^2 + p_2 q_1 + \\ & + \left(-\frac{3}{4} \mu (1+e\cos\nu)^2 + \frac{9}{8} \mu^2 (1+e\cos\nu)^2 \left(\sin^2\left(\frac{\nu}{2}\right) + \kappa \cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right) \right) \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2}(1+e\cos v)\left(\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)+\frac{1}{\kappa}\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)-\mu\right)q_2^2+ \\
& +\sin v\frac{1-\kappa}{2(1+e\cos v)^2}p_1p_2+\frac{3}{4}\mu(1+e\cos v)^2q_1^2+ \\
& +\left(\frac{3}{2}\mu\left(\sin^2\left(\frac{v}{2}\right)+\kappa\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)\right)-1\right)p_1q_2+\frac{3}{4}\mu(1-\kappa)\sin v p_2q_2+ \\
& +\frac{3}{2}\cos v(1+e\cos v)\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)q_3^2+\frac{1}{2\mu}\frac{1}{(1+e\cos v)^2}p_3^2 \\
\kappa & =\frac{1+2e}{1-2eJ}, \quad \mu=\frac{1+J}{1+2e}
\end{aligned}$$

В случае эллиптической орбиты изучим сначала устойчивость в первом приближении. Для малых значений эксцентриситета рассмотрим задачу о параметрическом резонансе.

При $e=0$ можно построить каноническую замену переменных $q_i, p_i \rightarrow q'_i, p'_i$ [5]:

$$(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)^T = \mathbf{N}(q'_1, q'_2, q'_3, p'_1, p'_2, p'_3)^T, \quad \mathbf{N} = \|n_{ij}\|_{i,j=1}^6$$

приводящую форму H_2 к виду

$$H_2 = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{21+J}p_3^2, \quad \omega_1 > \omega_2 > 0$$

где $\omega_i, i=1, 2$ – корни уравнения частот

$$\omega^4 - ((9/4)J^2 + (9/2)J + 5/4)\omega^2 + (27/4)J^2 + 3J + 1/4 = 0$$

причем значения параметра J , при которых корни данного уравнения являются действительными, таковы: $-1/9 \leq J \leq 1$. Здесь введены обозначения

$$\Delta_i = \sqrt{\frac{(3J-1)^2\omega_i}{27J^3 + 9J^2 + 9J + 3 + 8\omega_i^4 - 24\omega_i^2J - 8\omega_i^2}}$$

$$n_{2i} = \frac{(3J+1-2\omega_i^2)\sqrt{2}}{(3J-1)\omega_i}\Delta_i, \quad n_{4i} = \frac{(9J^2+6J+1-4\omega_i^2)\sqrt{2}}{2(1-3J)\omega_i}\Delta_i$$

$$n_{5i+3} = -\frac{2(-1+\omega_i^2)\sqrt{2}}{3J-1}\Delta_i, \quad n_{1i+3} = \sqrt{2}\Delta_i \quad \text{при } i=1, 2; \quad n_{33} = n_{66} = 1$$

Невыписанные элементы n_{ij} матрицы \mathbf{N} равны нулю.

Отметим, что соответствующие линейной задаче уравнения движения распадаются на две независимые системы, связывающие q_1, q_2, p_1, p_2 и q_3, p_3 . При $e=0$ частота колебаний ω_3 , соответствующая переменным q_3, p_3 , тождественно равна нулю.

При $0 < e \leq 1$ возможна неустойчивость из-за явления параметрического резонанса. Используя теорему Крейна–Гельфанда–Лидского [5, 6], получим, что при малых e не-

Таблица 1

№	Резонанс	J_0	Границы областей неустойчивости
1	$2\omega_2 = 0$	$-\frac{1}{9} \approx -0.1111$	$J = J_0 + \frac{80}{81}e - \frac{3076}{729}e^2 + \dots$
2	$\omega_1 + \omega_2 = 1$	≈ -0.1048	$J = J_0 + 0.822e + \dots$ $J = J_0 + 1.156e + \dots$
3	$2\omega_1 = 2$	0	$J = J_0, J = J_0 + 2e + \dots$
4	$2\omega_2 = 1$		
5	$\omega_1 + \omega_2 = 2$	≈ 0.1667	$J = J_0 + 0.9722e + 3.1297e^2 + \dots$ $J = J_0 + 0.9722e + 1.7091e^2 + \dots$
6	$2\omega_2 = 2$	$\frac{1}{3} \approx 0.3333$	$J = J_0 + \frac{8}{9}e + \frac{4}{9}e^2 + \dots$ $J = J_0 + \frac{8}{9}e - \frac{4}{27}e^2 + \dots$
7	$2\omega_1 = 3$	$\frac{19 - \sqrt{241}}{9} \approx 0.3862$	$J = J_0 + 0.8508e + 1.3894e^2 - 0.0292e^3 + \dots$ $J = J_0 + 0.8508e + 1.3894e^2 - 0.6694e^3 + \dots$
8	$\omega_1 + \omega_2 = 3$	≈ 0.6005	$J = J_0 + 0.6393e + 0.3359e^2 + 0.2271e^3 + \dots$ $J = J_0 + 0.6393e + 0.3359e^2 - 0.2164e^3 + \dots$
9	$2\omega_1 = 4$	$\frac{-10 + \sqrt{145}}{3} \approx 0.6805$	$J = J_0 + 0.5369e + 0.7135e^2 - 0.6829e^3 + \dots$
10	$2\omega_1 = 5$	$\frac{-67 + \sqrt{11041}}{39} \approx 0.9763$	$J = J_0 + 0.0468e - 0.0094e^2 + 0.0206e^3 + \dots$

устойчивость возможна только вблизи таких значений параметра $J = J_0$, для которых хотя бы одна из величин $2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2$ будет целым числом. Соответствующие значения параметра J_0 приведены в табл. 1 в третьем столбце.

При $e \neq 0$ в плоскости (e, J) из порождающих точек J_0 , приведенных в табл. 1, исходят области неустойчивости. Там же приведены уравнения границ соответствующих областей неустойчивости, представленные в виде рядов по e . В тех случаях, когда приводится одно уравнение, различие в уравнениях “верхней” и “нижней” границ проявляется в более высоких приближениях по e , чем выписано в табл. 1.

Отметим отдельно, что случай $e = 0$ соответствует стационарному режиму движения, называемому цилиндрической прецессией, результаты исследования устойчивости цилиндрической прецессии приведены в книге [7].

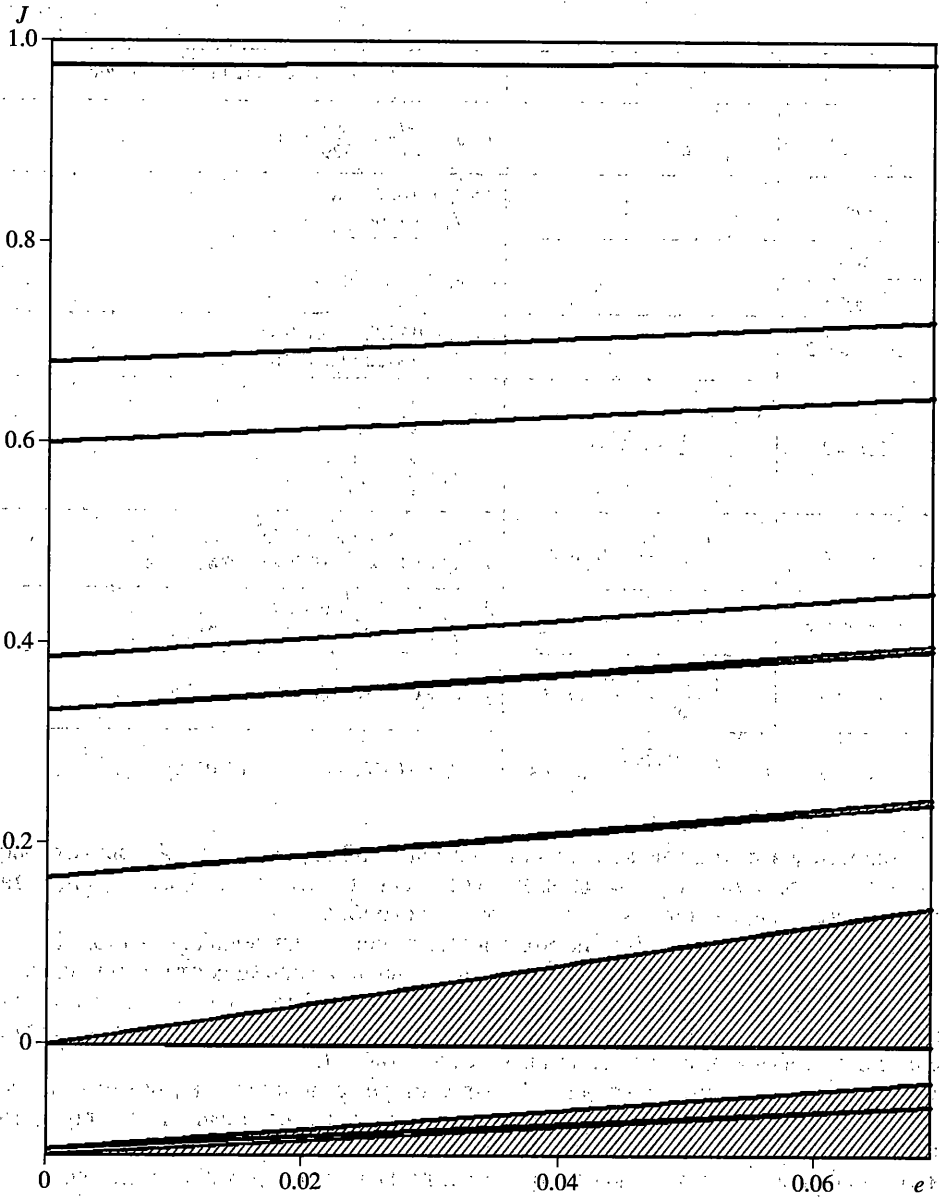
При больших значениях эксцентриситета исследование устойчивости требует привлечение численных расчетов на ЭВМ. Для этого при фиксированных значениях параметров e, J при $\nu = 2\pi$ находятся фундаментальные системы решений линейных систем дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану H_2 , а затем подсчитываются коэффициенты характеристических уравнений

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0, \quad \rho^2 - 2a\rho + 1 = 0$$

Если при этом выполняются неравенства

$$|a| < 1, \quad -2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2/4$$

то рассматриваемые значения параметров e, J лежат в области устойчивости в первом приближении [5, 8].



Фиг. 1

В статье [3] установлено, что при $0 < e < 0,069041$ величина a удовлетворяет неравенству $-1 < a < 1$. Область устойчивости в первом приближении имеет вид, указанный на фиг. 1. Толстыми сплошными линиями нанесены границы областей неустойчивости в первом приближении. Областям неустойчивости по Ляпунову соответствуют заштрихованные участки (либо, если область очень узкая, то она обозначена одной сплошной жирной линией), областям устойчивости в первом приближении – незаштрихованные участки.

3. Нелинейный анализ. Для проведения нелинейного анализа при значениях параметров из области устойчивости в первом приближении применяется алгоритм получения коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона для системы с тремя степенями свободы (аналог алгоритма нормализации систем с двумя степенями свободы, предложенного в статье [9]). Алгоритм основан на построении симплектического отображения окрестности положения равновесия на себя. Проводится нормализация не самой периодической по времени функции Гамильтона, а производящей функции отображения за период, порождаемого соответствующей этой функции Гамильтона канонической системой дифференциальных уравнений. Затем по нормальной форме производящей функции восстанавливается нормальная форма функции Гамильтона.

Будем рассматривать только однократные резонансы третьего и четвертого порядков.

Если нет резонансов до четвертого порядка включительно, то нормальная форма гамильтониана имеет вид

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \sigma_3 r_3 + c_{200} r_1^2 + c_{020} r_2^2 + c_{002} r_3^2 + c_{110} r_1 r_2 + c_{101} r_1 r_3 + c_{011} r_2 r_3 + O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2})$$

Если есть однократный резонанс третьего порядка вида $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3 = n$, то

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \sigma_3 r_3 + \frac{\sqrt{2}}{4\pi} r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} r_3^{k_3/2} (a_{k_1 k_2 k_3} \sin \gamma + b_{k_1 k_2 k_3} \cos \gamma) + O((r_1 + r_2 + r_3)^2)$$

Если резонансы третьего порядка отсутствуют, но есть однократный резонанс четвертого порядка вида $k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3 = n$, то

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \sigma_3 r_3 + c_{200} r_1^2 + c_{020} r_2^2 + c_{002} r_3^2 + c_{110} r_1 r_2 + c_{101} r_1 r_3 + c_{011} r_2 r_3 + r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2} r_3^{k_3/2} (\alpha_{k_1 k_2 k_3} \sin \gamma + \beta_{k_1 k_2 k_3} \cos \gamma) + O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2})$$

$$\gamma = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + k_3 \varphi_3 - nt$$

Здесь r_j, φ_j ($j = 1, 2, 3$) – вещественные канонически сопряженные переменные; коэффициенты нормальных форм вычисляются численно.

Для значений параметров e, J из области устойчивости в первом приближении неустойчивость возможна, и это может быть в первую очередь для тех значений параметров, при которых имеет место резонанс третьего или четвертого порядков

$$k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3 = n, \quad |k_1| + |k_2| + |k_3| = 3 \quad \text{или} \quad |k_1| + |k_2| + |k_3| = 4$$

где k_j, n – целые числа.

Оказывается, что для резонансов третьего порядка вида

$$3\sigma_1 = n, \quad 3\sigma_2 = n, \quad 2\sigma_1 + \sigma_2 = n, \quad \sigma_1 + 2\sigma_2 = n, \quad \sigma_1 + 2\sigma_3 = n, \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 = n$$

и для резонансов четвертого порядка вида

$$3\sigma_1 + \sigma_3 = n, \quad 3\sigma_2 + \sigma_3 = n, \quad \sigma_1 + 3\sigma_3 = n, \quad \sigma_2 + 3\sigma_3 = n$$

№	Резонанс	J_1	№	Резонанс	J_1	
1	$\sigma_2 - 2\sigma_3 = 0$	$\frac{1}{9} \approx -0.1111$	18	$2\sigma_1 - \sigma_2 = 2$	≈ 0.3995	
2	$2\sigma_2 - \sigma_3 = 0$		19	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3$	≈ 0.6005	
3	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$	≈ -0.1048	20	$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 3$		$\frac{-10 + \sqrt{145}}{3} \approx 0.6805$
4	$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 1$		21	$\sigma_1 - 2\sigma_3 = 2$		
5	$\sigma_1 - 2\sigma_3 = 1$	0	22	$2\sigma_1 + \sigma_3 = 4$	≈ 0.7332	
6	$2\sigma_1 + \sigma_3 = 2$		23	$2\sigma_1 - \sigma_3 = 4$		
7	$2\sigma_1 - \sigma_3 = 2$		24	$2\sigma_1 - \sigma_2 = 3$	≈ 0.7965	
8	$2\sigma_2 + \sigma_3 = 1$		25	$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 1$		
9	$2\sigma_2 - \sigma_3 = 1$		26	$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 1$		
10	$\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$		≈ 0.1667	27	$\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$	$\frac{\sqrt{281} - 11}{6} \approx 0.9605$
11	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2$			28	$2\sigma_1 + \sigma_3 = 5$	$\frac{-67 + \sqrt{11041}}{39} \approx 0.9763$
12	$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 2$		$\frac{1}{3} \approx 0.3333$	29	$2\sigma_1 - \sigma_3 = 5$	
13	$\sigma_2 - 2\sigma_3 = 1$			30	$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 1$	
14	$2\sigma_2 + \sigma_3 = 2$			31	$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 0$	
15	$2\sigma_2 - \sigma_3 = 2$	$\frac{19 - \sqrt{241}}{9} \approx 0.3862$	32	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 4$		
16	$2\sigma_1 + \sigma_3 = 3$					
17	$2\sigma_1 - \sigma_3 = 3$					

$$2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = n, \quad \sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 = n$$

в функции Гамильтона нет резонансных членов, а, следовательно, их можно не учитывать.

В области устойчивости в первом приближении резонансные кривые третьего и четвертого порядков исходят из порождающих точек на оси J . Порождающие точки $J = J_1$ для резонансных кривых третьего порядка и $J = J_2$ для резонансных кривых четвертого порядка приведены в табл. 2, 3. Резонансы, для которых порождающие точки не указаны, исходят из точек, лежащих вне области физически допустимых значений параметров (резонансы с номерами 30–32 из табл. 2 и с номерами 78–90 из табл. 3). Кроме того, существуют еще две вертикальные (в плоскости (e, J)) резонансные кривые, появляющиеся в ходе решения плоской задачи [4] и задаваемые уравнениями $e = e_3 = 0.059881$ ($3\sigma_3 = 1$) и $e = e_4 = 0.048967$ ($4\sigma_3 = 1$). На фиг. 2, 3 резонансные кривые, изображенные тонкими сплошными линиями, лежат в области устойчивости в первом приближении и пронумерованы в соответствии с табл. 2 (фиг. 2) и 3 (фиг. 3). Резонансная кривая $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 0$, исходящая из точки $e = 0, J = 0$, имеет две ветви и на фиг. 2 не приведена, т.к. идет очень близко от границ области неустойчивости, почти сливаясь с ними. Резонансные кривые четвертого порядка $\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3 = 1, \sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 1, \sigma_1 + 3\sigma_2 = 1$ и резонансные кривые третьего порядка $2\sigma_2 - \sigma_3 = 0, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$ идут внутри очень узкой области устойчивости в первом приближении, разделяющей области неустойчивости по Ляпунову, исходящие из порождающих точек $J_0 = -1/9$ и $J_0 = -0.1048$.

Таблица 3

№	Резонанс	J_2	№	Резонанс	J_2
1	$\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0$	$-\frac{1}{9} \approx -0.1111$	31	$4\sigma_1 = 5$	$\frac{86 - \sqrt{3049}}{138} \approx 0.2230$
2	$\sigma_1 + 3\sigma_2 = 1$	≈ -0.1103	32	$\sigma_1 + 3\sigma_2 = 4$	≈ 0.2358
3	$\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 1$	≈ -0.1093	33	$3\sigma_1 - \sigma_2 = 3$	≈ 0.2687
4	$\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3 = 1$	≈ -0.1048	34	$3\sigma_1 - \sigma_3 = 4$	$\frac{90 - \sqrt{3865}}{99} \approx 0.2811$
5	$\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 = 1$		35	$3\sigma_1 + \sigma_2 = 5$	≈ 0.2891
6	$2\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 2$	≈ -0.0923	36	$\sigma_2 - 3\sigma_3 = 1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3333$
7	$3\sigma_1 + \sigma_2 = 3$	≈ -0.08038	37	$2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 2$	
8	$4\sigma_2 = 1$	$\frac{\sqrt{1249} - 58}{282} \approx -0.08035$	38	$2\sigma_2 - 2\sigma_3 = 2$	
9	$\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$	≈ -0.0645	39	$3\sigma_2 - \sigma_3 = 3$	≈ 0.3703
10	$3\sigma_2 - \sigma_3 = 1$	$\frac{\sqrt{985} - 45}{234} \approx -0.0581$	40	$2\sigma_1 + 2\sigma_2 = 5$	
11	$\sigma_1 + 3\sigma_2 = 2$	0	41	$2\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 4$	≈ 0.3769
12	$2\sigma_1 - 2\sigma_2 = 1$		42	$2\sigma_1 + 2\sigma_3 = 3$	$\frac{19 - \sqrt{241}}{9} \approx 0.3862$
13	$2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 1$		43	$2\sigma_1 - 2\sigma_3 = 3$	
14	$2\sigma_2 - 2\sigma_3 = 1$		44	$2\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 2$	≈ 0.3995
15	$\sigma_1 - 3\sigma_3 = 1$		45	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 2$	≈ 0.4198
16	$\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 2$		46	$2\sigma_1 - 2\sigma_2 = 1$	
17	$2\sigma_1 + 2\sigma_3 = 2$		47	$3\sigma_1 + \sigma_2 = 6$	≈ 0.4693
18	$2\sigma_1 - 2\sigma_3 = 2$		48	$3\sigma_1 - \sigma_3 = 5$	$\frac{171 - \sqrt{26329}}{18} \approx 0.4854$
19	$\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 = 0$		49	$3\sigma_1 - \sigma_2 = 4$	≈ 0.5046
20	$\sigma_1 - 2\sigma_2 - \sigma_3 = 0$		50	$\sigma_1 + 3\sigma_2 = 5$	≈ 0.5066
21	$3\sigma_1 - \sigma_3 = 3$		≈ 0.0645	51	$4\sigma_1 = 7$
22	$\sigma_1 + 3\sigma_2 = 3$	52		$\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 4$	≈ 0.5453
23	$3\sigma_2 - \sigma_3 = 2$	$\frac{\sqrt{1129} - 18}{207} \approx 0.0753$	53	$\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3 = 3$	≈ 0.6005
24	$\sigma_1 - 3\sigma_2 = -1$	≈ 0.0914	54	$\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 = 3$	≈ 0.6367
25	$3\sigma_1 + \sigma_2 = 4$	≈ 0.0963	55	$2\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 5$	
26	$4\sigma_2 = 3$	$\frac{\sqrt{1465} - 10}{234} \approx 0.1208$	56	$3\sigma_1 + \sigma_2 = 7$	≈ 0.6504
27	$2\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 3$	≈ 0.1211	57	$\sigma_1 - 3\sigma_3 = 2$	$\frac{-10 + \sqrt{145}}{3} \approx 0.6805$
28	$\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3 = 2$	≈ 0.1667	58	$2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 4$	
29	$\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 = 2$		59	$2\sigma_2 - 2\sigma_3 = 2$	
30	$\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 3$	≈ 0.2117	60	$3\sigma_1 - \sigma_3 = 6$	≈ 0.7145
			61	$3\sigma_1 - \sigma_2 = 5$	

Окончание

№	Резонанс	J_2	№	Резонанс	J_2
62	$2\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 3$	≈ 0.7332	77	$\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3 = 5$	≈ 0.9856
63	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 3$		78	$\sigma_1 - \sigma_2 - 2\sigma_3 = 0$	
64	$\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3 = 1$	≈ 0.7965	79	$2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 0$	
65	$\sigma_1 - \sigma_2 - 2\sigma_3 = 1$		80	$2\sigma_1 - 2\sigma_3 = 1$	
66	$4\sigma_1 = 9$	$\frac{\sqrt{343249} - 422}{198} \approx 0.8276$	81	$\sigma_2 - 3\sigma_3 = 1$	
			82	$\sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$	
67	$3\sigma_1 + \sigma_2 = 8$	≈ 0.8360	83	$\sigma_1 - 2\sigma_2 - \sigma_3 = -1$	
68	$2\sigma_1 + 2\sigma_2 = 7$	≈ 0.8505	84	$2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 3$	
69	$3\sigma_1 - \sigma_3 = 7$	$\frac{\sqrt{314329} - 387}{198} \approx 0.8770$	85	$\sigma_1 - \sigma_2 - 2\sigma_3 = 0$	
			86	$\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 = 0$	
70	$\sigma_1 + 3\sigma_2 = 6$	≈ 0.8826	87	$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 3$	
71	$2\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 6$	≈ 0.9091	88	$\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3 = 2$	
72	$3\sigma_1 - \sigma_2 = 6$	≈ 0.9222	89	$2\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 4$	
73	$\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 = 0$	$\frac{\sqrt{281} - 11}{6} \approx 0.9605$	90	$2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 3$	
74	$\sigma_1 - 2\sigma_2 - \sigma_3 = 0$				
75	$2\sigma_1 + 2\sigma_3 = 5$	$\frac{-67 + \sqrt{11041}}{39} \approx 0.9763$			
76	$2\sigma_1 - 2\sigma_3 = 5$				

Если числа k_i имеют разные знаки, то имеет место формальная устойчивость (или устойчивость в любом сколь угодно высоком конечном нелинейном приближении относительно q_i, p_i), если отсутствуют другие резонансные соотношения любого порядка [10]. Поверх кривых на фиг. 2, 3, для которых k_i имеют одинаковые знаки, нанесены точки.

Для резонансов третьего порядка если $a_{k_1 k_2 k_3}^2 + b_{k_1 k_2 k_3}^2 \neq 0$, то имеет место неустойчивость по Ляпунову [5]. Для всех резонансов третьего порядка, приведенных в табл. 2 и для которых k_i имеют одинаковые знаки, соответствующая каждому из них величина $a_{k_1 k_2 k_3}^2 + b_{k_1 k_2 k_3}^2$ отлична от нуля, и имеет место неустойчивость по Ляпунову. Неустойчивым по Ляпунову резонансам третьего порядка соответствуют на фиг. 2 кривые с нанесенными поверх них точками.

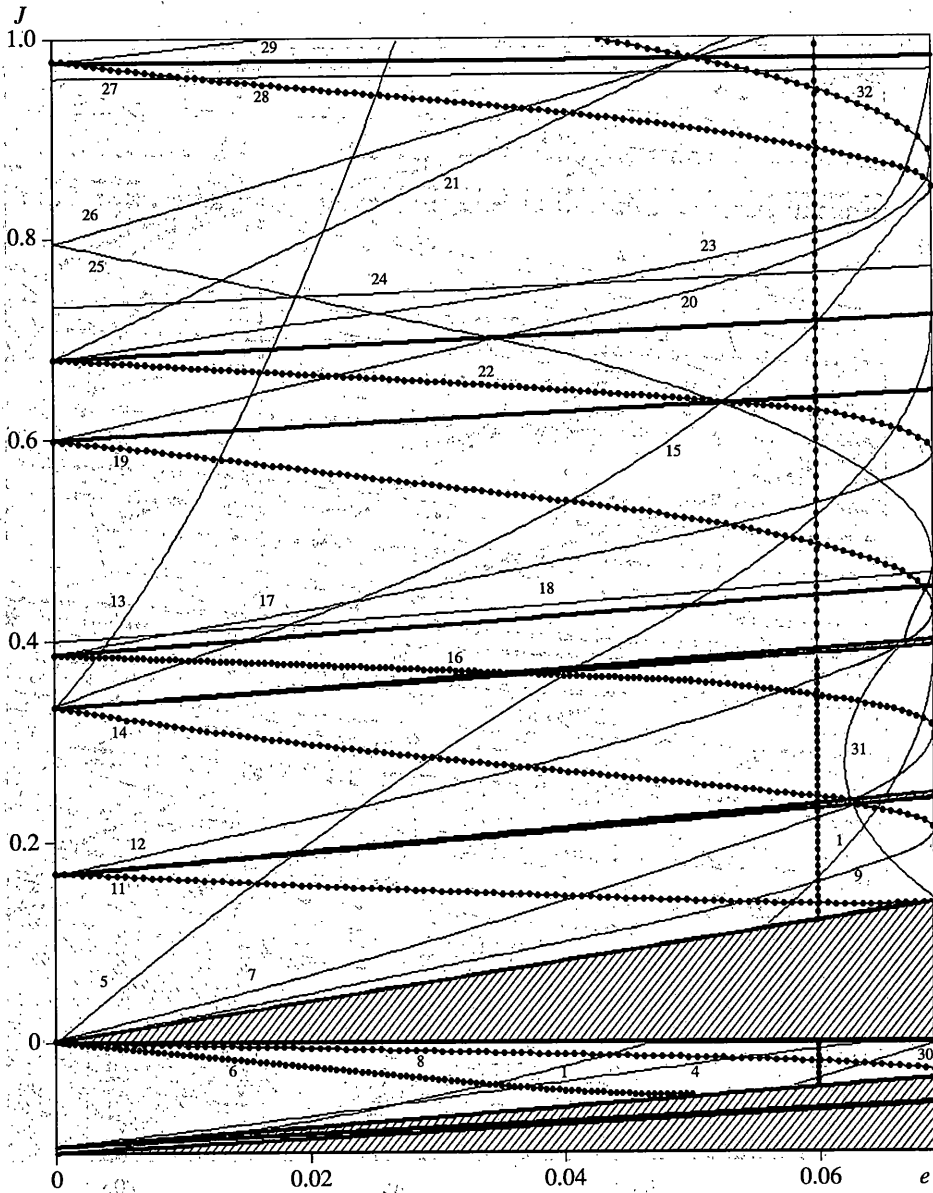
Если выполняется неравенство

$$|G(k_1, k_2, k_3)| < k_1^{1/2 k_1} k_2^{1/2 k_2} k_3^{1/2 k_3} \sqrt{\alpha_{k_1 k_2 k_3}^2 + \beta_{k_1 k_2 k_3}^2}$$

$$G(r_1, r_2, r_3) = c_{200} r_1^2 + c_{020} r_2^2 + c_{002} r_3^2 + c_{110} r_1 r_2 + c_{101} r_1 r_3 + c_{011} r_2 r_3 \quad (3.1)$$

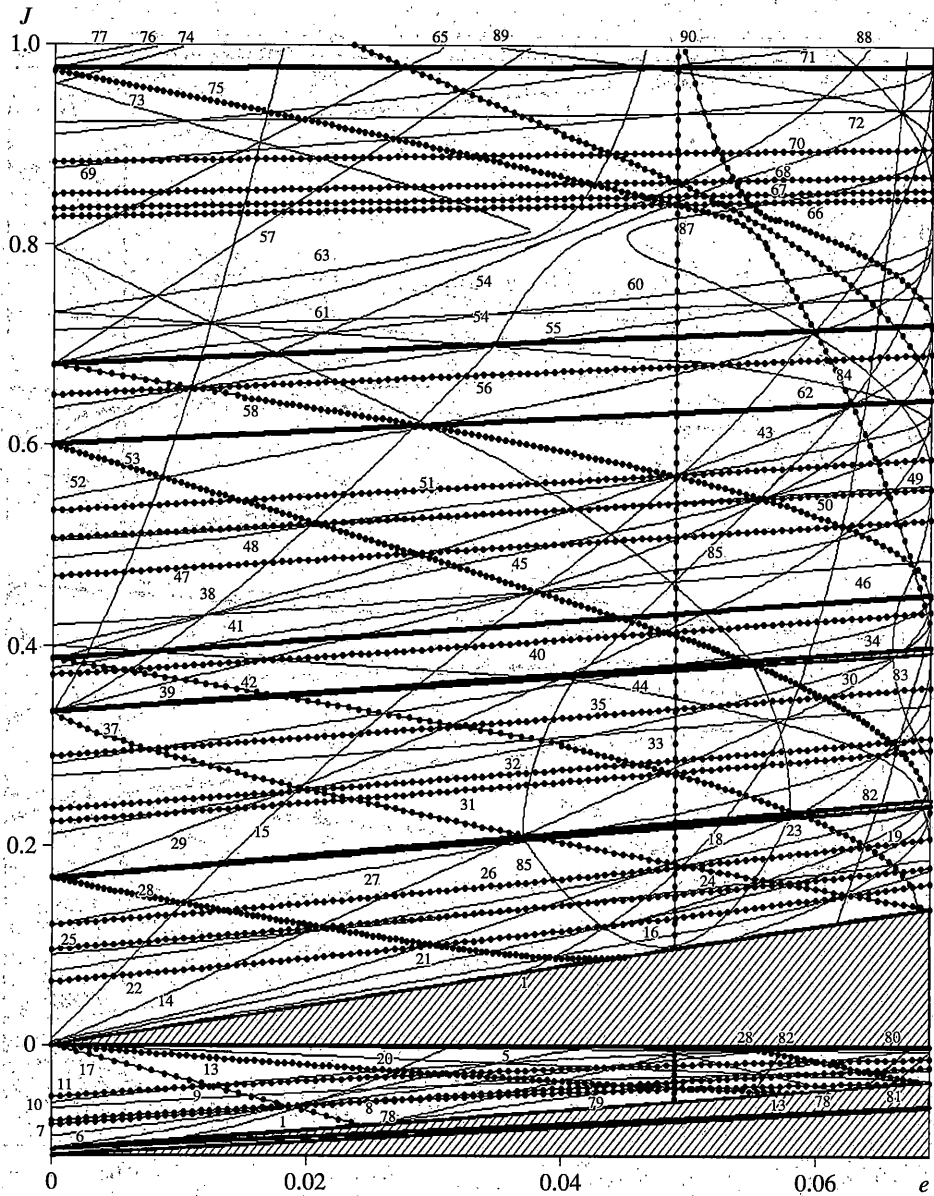
$$k_i^{1/2 k_i} = 1 \quad \text{при} \quad k_i = 0$$

то изучаемое движение неустойчиво по Ляпунову. При обратном знаке в неравенстве (3.1) имеет место устойчивость при учете в разложении гамильтониана форм по крайней мере до четвертого порядка включительно [11].



Фиг. 2

Расчеты показали, что все резонансы четвертого порядка, приведенные в табл. 3 и для которых k_i имеют одинаковые знаки, устойчивы по Ляпунову при учете в разложении гамильтониана форм до четвертого порядка включительно. Исключение составляет лишь участок резонансной кривой $2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 1$ (кривая номер 13 на фиг. 3) от точки $e = 0.048$, $J = -0.0415$ до точки $e = 0.055$, $J = -0.046$ и резонанс $4\sigma_3 = 1$. Отметим, что при исследовании вопроса об устойчивости движения при резонансах $3\sigma_3 = 1$ и $4\sigma_3 = 1$ в плоской задаче в статье [4] был также сделан вывод об их неустойчивости.



Фиг. 3

Автор выражает глубокую благодарность профессору А.П. Маркееву за внимание к данной работе и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Белецкий В.В., Лавровский Э.К. К теории резонансного вращения Меркурия // Астрон. журнал, 1975. Т. 52. Вып. 6. С. 1299–1308.

3. Хентов А.А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс // Космич. исследования. 1968. Т. 6. Вып. 5. С. 793–795.
4. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 6. С. 3–12.
5. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
7. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
8. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327–401.
9. Маркеев А.П. Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 355–371.
10. Mozer J. New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems // Commun Pure and Appl. Math. 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
11. Маркеев А.П. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 114–130.

Москва

Поступила в редакцию
23.01.2007