МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2007

УДК 539.3

© 2007 г. Ю.И. БУТЕНКО

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЕ

В последнее время в литературе обсуждается вопрос об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) у краев однослойных и многослойных конструкций [1–4]. Для этого, кроме решения внутренней задачи, необходимо для каждого слоя иметь решение задачи погранслоя, что и является целью данной работы.

**1. Постановка задачи погранслоя.** Рассмотрим задачу определения НДС многослойной прямоугольной в плане пластины с размерами $a \times b \times 2H$ в физически и геометрически линейной постановке. Будем считать, что пластина состоит из $n$ ортотропных слоев, отсчет которых ведется от нижнего слоя. Каждый $k$-ый слой имеет толщину $2h_k$ и описывается индивидуальной ортогональной системой координат $x_k$, $y_k$, $z_k$, в которой оси $x_k$, $y_k$ связаны со срединной плоскостью слоя, а ось $z_k$ нормальна к ней. Оси ортотропии слоев совпадают с осями координат.

Для $k$-го слоя задача погранслоя описывается однородными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial y_k} + \frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial z_k} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial y_k} + \frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial z_k} = 0 \tag{1.1}$$
$$\partial\tau_{xz}^{(k)}/\partial x_k + \partial\tau_{zy}^{(k)}/\partial y_k + \partial\sigma_z^{(k)}/\partial z_k = 0$$

и физическими соотношениями ортотропного тела

$$\sigma_x^{(k)} = B_{11}^{(k)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k} + B_{12}^{(k)}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k} + B_{13}^{(k)}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z_k}, \quad \sigma_y^{(k)} = B_{21}^{(k)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k} + B_{22}^{(k)}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k} + B_{23}^{(k)}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z_k}$$
$$\sigma_z^{(k)} = B_{31}^{(k)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k} + B_{32}^{(k)}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k} + B_{33}^{(k)}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z_k} \tag{1.2}$$
$$\tau_{xy}^{(k)} = G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial y_k} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x_k}\right), \quad \tau_{yz}^{(k)} = G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial y_k} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial z_k}\right), \quad \tau_{zx}^{(k)} = G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_k}\right)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжения; $\overline{U}^{(k)}$ $(U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)})$ – вектор перемещения $k$-го слоя; $G_{ij}^{(k)}$ – модули сдвига в соответствующих плоскостях, а $B_{ij}^{(k)}$ – некоторые постоянные, которые записываются через модули упругости $E_i^{(k)}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ следующим образом:

$$B_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(1 - \nu_{23}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}), \quad B_{12}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{12}^{(k)} + \nu_{13}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}), \quad B_{13}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{13}^{(k)} + \nu_{12}^{(k)}\nu_{23}^{(k)})$$

$$B_{21}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{21}^{(k)} + \nu_{23}^{(k)}\nu_{31}^{(k)}), \quad B_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(1 - \nu_{13}^{(k)}\nu_{31}^{(k)}), \quad B_{23}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{23}^{(k)} + \nu_{21}^{(k)}\nu_{13}^{(k)})$$

$$B_{31}^{(k)} = \frac{E_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{31}^{(k)} + \nu_{32}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}), \quad B_{32}^{(k)} = \frac{E_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{32}^{(k)} + \nu_{31}^{(k)}\nu_{12}^{(k)}), \quad B_{33}^{(k)} = \frac{E_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)})$$

$$\Delta^{(k)} = 1 - \nu_{31}^{(k)}\nu_{12}^{(k)}\nu_{23}^{(k)} - \nu_{13}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}\nu_{21}^{(k)} - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)} - \nu_{23}^{(k)}\nu_{32}^{(k)} - \nu_{31}^{(k)}\nu_{13}^{(k)}, \quad B_{ij}^{(k)} = B_{ji}^{(k)}, \quad i \neq j$$

В системах уравнений (1.1)–(1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi_k = x_k/a, \quad \eta_k = y_k/a, \quad \zeta_k = z_k/H, \quad u = U/a, \quad \upsilon = V/a, \quad w = W/a$$

$$H = \sum_{k=1}^{n} h_k, \quad \varepsilon = H/a, \quad \alpha_k = h_k/H$$

где $a$ – наименьший размер пластины в плане, $H$ – полутолщина многослойной пластины. Введем также параметры: $\varepsilon$ – малый геометрический параметр, $\alpha_k$ – безразмерная полутолщина слоя. Тогда уравнения теории упругости ортотропного тела $k$-го слоя принимают вид

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial\xi_k} + \frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial\eta_k}\right) + \frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial\zeta_k} = 0, \quad \varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial\xi_k} + \frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial\eta_k}\right) + \frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\zeta_k} = 0$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\xi_k} + \frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\eta_k}\right) + \frac{\partial\sigma_z^{(k)}}{\partial\zeta_k} = 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_x^{(k)} = B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi_k} + B_{12}^{(k)}\frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\eta_k} + \varepsilon^{-1}B_{13}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k}, \quad \sigma_y^{(k)} = B_{21}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi_k} + B_{22}^{(k)}\frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\eta_k} + \varepsilon^{-1}B_{23}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k}$$

$$\sigma_z^{(k)} = B_{31}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi_k} + B_{32}^{(k)}\frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\eta_k} + \varepsilon^{-1}B_{33}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k} \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}^{(k)} = G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\xi_k}\right), \quad \tau_{yz}^{(k)} = G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\eta_k} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\zeta_k}\right), \quad \tau_{zx}^{(k)} = G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\xi_k} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\zeta_k}\right)$$

Рассмотрим погранслой у кромки $\xi_k = \mathrm{const}$. Проведем растяжение координаты $\xi_k = t_k\varepsilon$, в результате чего уравнения погранслоя примут вид

$$\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial t_k} + \varepsilon\frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial\zeta_k} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial t_k} + \varepsilon\frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\zeta_k} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial t_k} + \varepsilon\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\sigma_z^{(k)}}{\partial\zeta_k} = 0 \tag{1.5}$$

$$\sigma_x^{(k)} = \varepsilon^{-1}B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t_k} + B_{12}^{(k)}\frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\eta_k} + \varepsilon^{-1}B_{13}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k}$$

$$\sigma_y^{(k)} = \varepsilon^{-1}B_{21}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t_k} + B_{22}^{(k)}\frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\eta_k} + \varepsilon^{-1}B_{23}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k}$$

$$\sigma_z^{(k)} = \varepsilon^{-1}B_{31}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t_k} + B_{32}^{(k)}\frac{\partial \upsilon^{(k)}}{\partial \eta_k} + \varepsilon^{-1}B_{33}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta_k} \tag{1.6}$$

$$\tau_{xy}^{(k)} = G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial \eta_k} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \upsilon^{(k)}}{\partial t_k}\right), \quad \tau_{yz}^{(k)} = G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial \eta_k} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \upsilon^{(k)}}{\partial \zeta_k}\right)$$

$$\tau_{zx}^{(k)} = G_{31}^{(k)}\varepsilon^{-1}(\partial w^{(k)}/\partial t_k + \partial u^{(k)}/\partial \zeta_k)$$

**2. Решение задачи погранслоя "плоская деформация".** Система уравнений (1.5)–(1.6) содержит два вида краевых решений: плоскую и антиплоскую деформации (краевое скручивание) [1, 2]. В задаче о плоской деформации решение обозначим индексом $p$ сверху. Для основных величин ищем решение в виде асимптотического представления

$$\begin{gathered}(\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)}, \overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)}, \overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)}, \overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_p}(\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s}, \overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s}, \overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s}, \overset{p}{\tau}{}_{zx}^{(k)s}) \\ (\overset{p}{u}{}^{(k)}, \overset{p}{w}{}^{(k)}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_p+1}(\overset{p}{u}{}^{(k)s}, \overset{p}{w}{}^{(k)s})\end{gathered} \tag{2.1}$$

а для вспомогательных величин в виде

$$(\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)}, \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_p+1}(\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s}, \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}), \quad \overset{p}{\upsilon}{}^{(k)} = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_p+2}\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s}, \quad q_p = s + k_p \tag{2.2}$$

Параметр $\kappa_p$ должен выбираться из условия согласования краевых условий внутренней задачи и задачи погранслоя.

После подстановки соотношений (2.1) и (2.2) в уравнения (1.5)–(1.6) для коэффициентов рядов (2.1)–(2.2) получены следующие уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial \overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial \overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial \zeta_k} = 0, \quad \frac{\partial \overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial \overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)(s)}}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial \zeta_k} = 0 \\ \frac{\partial \overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s}}{\partial \zeta_k} = 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

и соотношения упругости

$$\begin{gathered}\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s} = B_{11}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B_{12}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k} + B_{13}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial \zeta_k} \\ \overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} = B_{21}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B_{22}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k} + B_{23}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial \zeta_k} \\ \overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s} = B_{31}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B_{32}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k} + B_{33}^{(k)}\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial \zeta_k} \\ \overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s} = G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right), \quad \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s} = G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial \zeta_k}\right), \quad \overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s} = G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial \zeta_K}\right)\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь и далее величины с отрицательными индексами $s$ тождественны нулю.

Система уравнений (2.3)–(2.4) распадается на основную и вспомогательную системы уравнений. Основная система уравнений служит для определения перемещений $\overset{p}{u}{}^{(k)}$, $\overset{p}{w}{}^{(k)}$ и состоит из уравнений равновесия

$$\frac{\partial\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}=0,\quad \frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s}}{\partial\zeta_k}=0 \tag{2.5}$$

и соотношений упругости

$$\begin{aligned}
\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s} &= B_{11}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+B_{13}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\\
\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} &= B_{21}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+B_{23}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\\
\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s} &= B_{31}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+B_{33}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k},\quad \overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Вспомогательная система уравнения содержит уравнение равновесия

$$\partial\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s}/\partial t_k+\partial\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s}/\partial\eta_k+\partial\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}/\partial\zeta_k=0 \tag{2.7}$$

и соотношения упругости

$$\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)(s)}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right),\quad \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\right) \tag{2.8}$$

В основной системе уравнений (2.5)–(2.6) при $s = 0.1$ исключаются из рассмотрения напряжения $\overset{p}{\tau}{}_{xy}$, $\overset{p}{\tau}{}_{yz}$ и перемещение $\overset{p}{\upsilon}$, которые затем находятся из вспомогательной системы уравнений при известных основных параметрах. При $s \geq 2$ вспомогательные величины являются известными функциями.

Для решения основной системы после подстановки (2.6) в (2.5) получим уравнения равновесия в перемещениях $\overset{p}{u}{}^{(k)s}$, $\overset{p}{w}{}^{(k)s}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k^2}+\nu_1^{(k)}\frac{\partial^2\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k^2}+\nu_2^{(k)}\frac{\partial^2\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k\partial\zeta_k} &= \overset{p}{R}{}_1^{(k)s-2}\\
\nu_3^{(k)}\frac{\partial^2\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k^2}+\frac{\partial^2\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k^2}+\nu_4^{(k)}\frac{\partial^2\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k\partial\zeta_k} &= \overset{p}{R}{}_3^{(k)s-2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Эту систему можно назвать некоторой плоской задачей теории упругости в плоскости $x$, $z(t, \zeta)$. Здесь введены обозначения

$$\nu_1^{(k)}=G_{31}^{(k)}/B_{11}^{(k)},\quad \nu_2^{(k)}=(B_{13}^{(k)}+G_{31}^{(k)})/B_{11}^{(k)},\quad \nu_3^{(k)}=G_{31}^{(k)}/B_{33}^{(k)},\quad \nu_4^{(k)}=(B_{31}^{(k)}+G_{31}^{(k)})/B_{33}^{(k)}$$

$$\overset{p}{R}{}_1^{(k)s-2}=-\frac{B_{12}^{(k)}+G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}}\frac{\partial^2\overset{p}{\upsilon}{}^{(k)s-2}}{\partial t_k\partial\eta_k}-\frac{G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}}\frac{\partial^2\overset{p}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k^2} \tag{2.10}$$

$$\overset{p}{R}{}_3^{(k)s-2} = -\frac{B_{32}^{(k)} + G_{23}^{(k)}}{B_{33}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{p}{v}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k \partial\zeta_k} - \frac{G_{23}^{(k)}}{B_{33}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{p}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k^2}$$

"Массовые" силы $\overset{p}{R}{}_1^{(k)s-2}$, $\overset{p}{R}{}_3^{(k)s-2}$, неравные нулю лишь при $s \geq 2$, могут привести к незатухающим решениям, и поэтому необходимо получить условия существования затухающих решений краевой плоской задачи.

Решение однородной системы уравнений (2.9) при $s = 0, 1$ ищем методом Фурье

$$\overset{p}{u}{}^{(k)s}(t_k, \zeta_k, \eta_k) = \overset{p}{u}{}_1^{(k)s}(\zeta_k)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}, \quad \overset{p}{w}{}^{(k)s}(t_k, \zeta_k, \eta_k) = \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}(\zeta_k)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \quad (2.11)$$

Здесь $\lambda > 0$ – показатель изменяемости погранслоя. Решение отыскивается с точностью до некоторой функции $\varphi^{(k)s}$. После подстановки (2.11) в (2.9) получим однородную систему уравнений для определения функций $\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}$, $\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}$ по толщине слоя ($\zeta_k$):

$$\nu_1^{(k)} \frac{d^2 \overset{p}{u}{}_1^{(k)s}}{\partial\zeta_k^2} + \lambda^2 \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} - \nu_2^{(k)}\lambda \frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{d\zeta_k} = 0, \quad \frac{d^2 \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{d\zeta_k^2} + \nu_3^{(k)}\lambda^2 \overset{p}{u}{}_3^{(k)s} - \nu_4^{(k)}\lambda \frac{d\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}}{d\zeta_k} = 0 \quad (2.12)$$

Соотношения упругости (2.6) записываются в виде

$$\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s} = \bar{E}_1^{(k)}\varphi^{(k)s}(\eta_k)\left(-\lambda \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} + \mu_{13}^{(k)} \frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{d\zeta_k}\right)e^{-\lambda t_k}$$

$$\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} = \bar{E}_2^{(k)}\varphi^{(k)s}(\eta_k)\left(-\lambda\mu_{21}^{(k)} \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} + \mu_{23}^{(k)} \frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{d\zeta_k}\right)e^{-\lambda t_k} \quad (2.13)$$

$$\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s} = \bar{E}_3^{(k)}\varphi^{(k)s}(\eta_k)\left(\frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{d\zeta_k} - \mu_{31}^{(k)}\lambda \overset{p}{u}{}_1^{(k)s}\right)e^{-\lambda t_k}$$

$$\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s} = G_{31}^{(k)s}\varphi^{(k)s}(\eta_k)(d\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}/d\zeta_k - \lambda \overset{p}{u}{}_3^{(k)s})e^{-\lambda t_k}$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения

$$\bar{E}_1^{(k)} = B_{11}^{(k)}, \quad \bar{E}_2^{(k)} = B_{22}^{(k)}, \quad \bar{E}_3^{(k)} = B_{33}^{(k)}, \quad \mu_{12}^{(k)} = B_{12}^{(k)}/B_{11}^{(k)}, \quad \mu_{13}^{(k)} = B_{13}^{(k)}/B_{11}^{(k)}$$

$$\mu_{21}^{(k)} = B_{21}^{(k)}/B_{22}^{(k)}, \quad \mu_{23}^{(k)} = B_{23}^{(k)}/B_{22}^{(k)}, \quad \mu_{31}^{(k)} = B_{31}^{(k)}/B_{33}^{(k)}, \quad \mu_{32}^{(k)} = B_{32}^{(k)}/B_{33}^{(k)}$$

Выражения $\mu_{ij}$ играют роль специфичных коэффициентов Пуассона и для плоского напряженного состояния совпадают с ними $\mu_{ij} = \nu_{ij}$.

Решение системы однородных уравнений (2.12) ищем в виде

$$\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}(\zeta_k) = C_1^{(k)s}e^{\gamma\zeta_k}, \quad \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}(\zeta_k) = C_2^{(k)s}e^{\gamma\zeta_k} \quad (2.14)$$

где $C_1^{(k)s}$, $C_2^{(k)s}$ – постоянные интегрирования $k$-го слоя.

После подстановки (2.14) в (2.12) придем к однородной алгебраической системе уравнений относительно постоянных $C_1^{(k)s}$, $C_2^{(k)s}$:

$$(\nu_1^{(k)}\gamma^2 + \lambda^2)C_1^{(k)s} - \nu_2^{(k)}\lambda\gamma C_2^{(k)s} = 0, \quad -\nu_4^{(k)}\lambda\gamma C_1^{(k)s} + (\gamma^2 + \nu_3^{(k)}\lambda^2)C_2^{(k)s} = 0 \quad (2.15)$$

Наличие ненулевого решения требует, чтобы определитель коэффициентов этой системы был равен нулю. Из этого следует алгебраическое уравнение относительно $\gamma$:

$$\nu_1^{(k)}\gamma^4 + \lambda^2(1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)})\gamma^2 + \nu_3^{(k)}\lambda^4 = 0 \qquad (2.16)$$

Для плоского напряженного состояния уравнение (2.16) хорошо изучено [2] и его корни имеют вид

$$\gamma_{1,2}^2 = -\lambda^2\frac{1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)}}{2\nu_1^{(k)}} \pm \lambda^2\frac{1}{2\nu_1^{(k)}}\sqrt{D^{(k)}}$$

$$D^{(k)} = (1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)})^2 - 4\nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)}$$

В зависимости от значений упругих постоянных характеристическое уравнение имеет корни следующих вариантов [2]:

*задача* A *при* $D^{(k)} = 0$:

$$\gamma_{1,2}^{(k)} = i\lambda\beta^{(k)}, \quad \gamma_{3,4}^{(k)} = -i\lambda\beta^{(k)}, \quad \beta^{(k)} = \sqrt[4]{\frac{\nu_3^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}} = \sqrt[4]{\frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}\frac{1 - \nu_{23}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}}} \qquad (2.17)$$

*задача* B *при* $D^{(k)} > 0$:

$$\gamma_{1,2}^{(k)} = \pm i\lambda\beta_1^{(k)}, \quad \gamma_{3,4}^{(k)} = \pm i\lambda\beta_2^{(k)}, \quad \beta_1^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2\nu_1^{(k)}}[1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)} - \sqrt{D^{(k)}}]}$$

$$\beta_2^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2\nu_1^{(k)}}[1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)} + \sqrt{D^{(k)}}]} \qquad (2.18)$$

*задача* C *при* $D^{(k)} < 0$:

$$\gamma_{1-4}^{(k)} = \pm\alpha^{(k)} \pm i\beta^{(k)}, \quad \alpha^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2\nu_1^{(k)}}\left[\sqrt{\nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)}} - \frac{1}{2}(1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)})\right]}$$

$$\beta^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2\nu_1^{(k)}}\left[\sqrt{\nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)}} + \frac{1}{2}(1 + \nu_1^{(k)}\nu_3^{(k)} - \nu_2^{(k)}\nu_4^{(k)})\right]} \qquad (2.19)$$

В соотношениях (2.17)–(2.19) $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$, $\beta_1^{(k)}$, $\beta_2^{(k)}$ положительны.

Решение задачи A при корнях $\gamma$ (2.17) записывается в виде

$$u_1^{p(k)s} = q_1^{(k)}\left[A_1^{(k)s} - \frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}q_2^{(k)}A_2^{(k)s}\right]\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + q_1^{(k)}\left[A_3^{(k)s} + \frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}q_2^{(k)}A_4^{(k)s}\right]\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k +$$

$$+ q_1^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4^{(k)s}\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)$$

$$u_3^{p(k)s} = A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - A_2^{(k)s}\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - A_3^{(k)s}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k \qquad (2.20)$$

$$q_1^{(k)} = \frac{\nu_2^{(k)}}{1 - \nu_2^{(k)}}, \quad q_2^{(k)} = \frac{1 + \nu_1^{(k)}}{1 - \nu_1^{(k)}}$$

Напряжения в слое $k$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^{p(k)s} &= -\bar{E}_1^{(k)}\lambda\beta^{(k)}\left[\left(b_1^{(k)}A_1^{(k)s}-\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_2^{(k)}A_2^{(k)s}\right)\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+\left(b_1^{(k)}A_3^{(k)s}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_2^{(k)}A_4^{(k)s}\right)\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+b_1^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+A_4\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\right]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}\\
\sigma_y^{p(k)s} &= -\bar{E}_2^{(k)}\lambda\beta^{(k)}\left[\left(b_3^{(k)}A_1^{(k)s}-\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_4^{(k)}A_2^{(k)s}\right)\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+\left(b_3^{(k)}A_3^{(k)s}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_4^{(k)}A_4^{(k)s}\right)\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+b_3^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+A_4\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\right]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}\\
\sigma_z^{p(k)s} &= -\bar{E}_3^{(k)}\lambda\beta^{(k)}\left[\left(b_5^{(k)}A_1^{(k)s}-\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_6^{(k)}A_2^{(k)s}\right)\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+\left(b_5^{(k)}A_3^{(k)s}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_6^{(k)}A_4^{(k)s}\right)\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+b_5^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+A_4\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\right]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}\\
\tau_{xz}^{p(k)} &= G_{31}^{(k)}\lambda\beta^{(k)}\left[-\left(b_7^{(k)}A_1^{(k)s}-\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_8^{(k)}A_2^{(k)s}\right)\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+\left(b_7^{(k)}A_3^{(k)s}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\lambda\beta^{(k)}}b_8^{(k)}A_4^{(k)s}\right)\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k+b_7^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k-A_4\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\right]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

$$
b_1^{(k)} = \frac{\nu_2^{(k)}}{1-\nu_1^{(k)}}-\mu_{13}^{(k)},\quad b_2^{(k)} = \frac{\nu_2^{(k)}(1+\nu_1^{(k)})}{(1-\nu_2^{(k)})^2}-\mu_{13}^{(k)},\quad b_3^{(k)} = \mu_{21}^{(k)}\frac{\nu_2^{(k)}}{1-\nu_1^{(k)}}-\mu_{23}^{(k)}
$$

$$
b_4^{(k)} = \mu_{21}^{(k)}\frac{\nu_2^{(k)}(1+\nu_1^{(k)})}{(1-\nu_2^{(k)})^2}-\mu_{23}^{(k)},\quad b_5^{(k)} = \mu_{31}^{(k)}\frac{\nu_2^{(k)}}{1-\nu_1^{(k)}}-1,\quad b_6^{(k)} = \mu_{31}^{(k)}\frac{\nu_2^{(k)}(1+\nu_1^{(k)})}{(1-\nu_2^{(k)})^2}-1
$$

$$
b_7^{(k)} = 1+\frac{\nu_2^{(k)}}{1-\nu_1^{(k)}},\quad b_8^{(k)} = \frac{2\nu_2^{(k)}}{(1-\nu_2^{(k)})^2}
$$

Решение задачи $B$, которая чаще всего имеет место для ортотропного материала [2], записывается следующим образом

$$
\begin{aligned}
u_1^{p(k)s} &= -q_1^{(k)}A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k+q_1^{(k)}A_2^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k-q_2^{(k)}A_3^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k+\\
&+q_2^{(k)}A_4^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k\\
u_3^{p(k)s} &= A_1^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k+A_2^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k+A_3^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k+A_4^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

$$
q_1^{(k)} = \frac{\nu_2^{(k)}\beta_1^{(k)}}{1-\nu_1^{(k)}\beta_1^{(k)2}},\quad q_2^{(k)} = \frac{\nu_2^{(k)}\beta_2^{(k)}}{1-\nu_1^{(k)}\beta_2^{(k)2}}
$$

Напряжения определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\overset{p(k)s}{\sigma_x} &= \overline{E}_1^{(k)}\lambda(b_1^{(k)}A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_1^{(k)}A_2^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_2^{(k)}A_3^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\
&- b_2^{(k)}A_4^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
\overset{p(k)s}{\sigma_y} &= \overline{E}_2^{(k)}\lambda(b_3^{(k)}A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_3^{(k)}A_2^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_4^{(k)}A_3^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\
&- b_4^{(k)}A_4^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
\overset{p(k)}{\sigma_z} &= -\overline{E}_3^{(k)}\lambda(b_5^{(k)}A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_5^{(k)}A_2^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_6^{(k)}A_3^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\
&- b_6^{(k)}A_4^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
\overset{p(k)s}{\tau_{xz}} &= -G_{31}^{(k)}\lambda(b_7^{(k)}A_1^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_7^{(k)}A_2^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}A_3^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k + \\
&+ b_8^{(k)}A_4^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
b_1^{(k)} &= q_1^{(k)} - \mu_{13}^{(k)}\beta_1^{(k)}, \quad b_2^{(k)} = q_2^{(k)} - \mu_{13}^{(k)}\beta_2^{(k)}, \quad b_3^{(k)} = \mu_{21}^{(k)}q_1^{(k)} - \mu_{23}^{(k)}\beta_1^{(k)} \\
b_4^{(k)} &= \mu_{21}^{(k)}q_2^{(k)} - \mu_{23}^{(k)}\beta_2^{(k)}, \quad b_5^{(k)} = \beta_1^{(k)} - \mu_{31}^{(k)}q_1^{(k)}, \quad b_6^{(k)} = \beta_2^{(k)} - \mu_{31}^{(k)}q_2^{(k)} \\
b_7^{(k)} &= 1 + q_1^{(k)}\beta_1^{(k)}, \quad b_8^{(k)} = 1 + q_2^{(k)}\beta_2^{(k)}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Для задачи $C$ перемещения вычисляются по соотношениям

$$\begin{aligned}
\overset{p(k)s}{u_1} &= e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(A_1^{(k)s}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_2^{(k)s}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(A_3^{(k)s}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + \\
&+ A_4^{(k)s}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) \\
\overset{p(k)s}{u_3} &= A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(a^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + \\
&+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + a^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) - \\
&- A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{k}\lambda\zeta_k}(a^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + \\
&+ A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - a^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) \\
a^{(k)} &= \frac{\alpha^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\left(\nu_1^{(k)} + \frac{1}{\alpha^{(k)2} + \beta^{(k)2}}\right), \quad b^{(k)} = \frac{\beta^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\left(\nu_1^{(k)} - \frac{1}{\alpha^{(k)2} + \beta^{(k)2}}\right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Напряжения записываются в виде

$$\begin{aligned}
\overset{p(k)s}{\sigma_x} &= \overline{E}_1^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_2^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + \\
&+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_2^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + \\
&+ b_2^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_2^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} &= \bar{E}_2^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_4^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + \\
&+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_4^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + \\
&+ b_4^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_4^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s} &= \bar{E}_3^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_6^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + \\
&+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_6^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + \qquad (2.25) \\
&+ b_6^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_6^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s} &= G_{31}^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_7^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_8^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + \\
&+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_7^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(-b_7^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - \\
&- b_8^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(-b_7^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k} \\
b_1^{(k)} &= -1 + \mu_{13}^{(k)}(\alpha^{(k)}a^{(k)} - \beta^{(k)}b^{(k)}), \quad b_2^{(k)} = \mu_{13}^{(k)}(\alpha^{(k)}b^{(k)} + \beta^{(k)}a^{(k)}) \\
b_3^{(k)} &= -\mu_{21}^{(k)} + \mu_{23}^{(k)}(\alpha^{(k)}a^{(k)} - \beta^{(k)}b^{(k)}), \quad b_4^{(k)} = \mu_{23}^{(k)}(\alpha^{(k)}b^{(k)} + \beta^{(k)}a^{(k)}) \\
b_5^{(k)} &= -\mu_{31}^{(k)} + (\alpha^{(k)}a^{(k)} - \beta^{(k)}b^{(k)}), \quad b_6^{(k)} = (\alpha^{(k)}b^{(k)} + \beta^{(k)}a^{(k)}) \\
b_7^{(k)} &= \alpha^{(k)} - a^{(k)}, \quad b_8^{(k)} = \beta^{(k)} - b^{(k)}
\end{aligned}
$$

В различных вариантах решений (2.20), (2.22), (2.24) содержится неизвестный пока параметр $\lambda$, который определяется из условия существования ненулевого решения постоянных $A_1^{(k)}, \ldots, A_4^{(k)}$ многослойной пластины. Для получения уравнений запишем краевые условия на лицевых поверхностях: $\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(1)s} = \overset{p}{\sigma}{}_z^{(1)s} = 0$ при $\zeta_1 = -\alpha_1$ и $\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(n)s} = \overset{p}{\sigma}{}_z^{(n)s} = 0$ при $\zeta_n = \alpha_n$, а также условий непрерывности функций $\overset{p}{u}{}^{(k)s}$, $\overset{p}{w}{}^{(k)s}$, $\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}$, $\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s}$ при переходе от $k$-го слоя к слою $(k+1)$. Для $n$-слойной пластины задача сводится к решению однородной алгебраической системы уравнений порядка $4n$, которая имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов, будет равен нулю. Задача сводится к собственной проблеме, которая для трехслойной пластины представляется в виде определителя 12 порядка, элементами которого являются тригонометрические и показательные функции. А если пластина имеет регулярное строение и можно отдельно рассматривать симметричную и кососимметричную задачи, то порядок определителя уменьшается в два раза.

Постоянные интегрирования $A_i^{(k)s}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ на каждом этапе определяются из краевых условий на торце $x = 0$, которые учитывают и решение в основном напряженном состоянии.

Система уравнений (2.5)–(2.6) при $s \geq 2$ сводится к неоднородной системе уравнений (2.9) с известной правой частью. Для (2.9) ищется полное решение, которое состоит из известного решения однородной задачи и частного решения неоднородной задачи, в котором участвует перемещение $v$, определяемое из вспомогательной задачи.

После решения основной задачи (2.9) при $s = 0.1$ перейдем к решению вспомогательной задачи (2.7)–(2.8), которая сводится к неоднородному уравнению относительно перемещения $\overset{p}{v}{}^{(k)s}$ решение которого представим в виде

$$\overset{p}{v}{}^{(k)s}(t_k, \zeta_k, \eta_k) = \overset{p}{u}{}_2^{(k)s}(\zeta_k)\frac{d\phi^{(k)s}}{d\eta_k}e^{-\lambda t_k} \tag{2.26}$$

Функция $\overset{p}{u}{}_2^{(k)s}$ определяется из неоднородного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\overset{p}{u}{}_2^{(k)s}}{d\zeta_k^2} + \frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}\lambda^2\overset{p}{u}{}_2^{(k)s} = \overset{p}{R}{}_v^{(k)s} \tag{2.27}$$

$$\overset{p}{R}{}_v^{(k)s} = \frac{G_{12}^{(k)} + \mu_{21}^{(k)}\bar{E}_2^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}\lambda\overset{p}{u}{}_1^{(k)s} - \frac{G_{32}^{(k)} + \mu_{23}^{(k)}\bar{E}_2^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}\frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{d\zeta_k} - \frac{\bar{E}_2^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}\overset{p}{u}{}_2^{(k)s-2}\left(\frac{d\varphi^{(k)s}}{d\eta_k}\right)^{-1}\frac{d^3\varphi^{(k)s-2}}{d\eta_k^3}$$

Полное решение уравнения (2.27) представим в виде

$$\overset{p}{u}{}_2^{(k)s} = B_1^{(k)s}\cos\sqrt{G_{12}^{(k)}/G_{32}^{(k)}}\lambda\zeta_k + B_2^{(k)s}\sin\sqrt{G_{12}^{(k)}/G_{32}^{(k)}}\lambda\zeta_k + \overset{p}{u}{}_2^{(k)s*} \tag{2.28}$$

где $\overset{p}{u}{}_2^{(k)s*}$ – частное решение уравнения (2.27) с известной правой частью.

Постоянные $B_1^{(k)s}$, $B_2^{(k)s}$ находятся из краевых условий на лицевых поверхностях для $\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}$ и условий непрерывности функций $\overset{p}{v}{}^{(k)s}$, $\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}$ по толщине пластины. При $s \geq 2$ в правую часть $\overset{p}{R}{}_v^{(k)s}$ добавляется еще одно слагаемое, из которого следует $\varphi^{k(s)} = d^2\varphi^{(k)s-2}/d\eta_k^2$. Таким образом, выполняются все уравнения теории упругости для плоской деформации.

Из решения (2.28) следует, что на крае $x = \text{const}$ имеют место ненулевые перемещение $\overset{p}{v}{}^{(k)s}$ и напряжение $\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}$, которые сопутствуют плоскому погранслою и могут быть сняты только антиплоским погранслоем.

Таким образом, задача по определению погранслоя в многослойных конструкциях сводится к собственной проблеме и решению соответствующих трансцендентных уравнений, что в дальнейшем осуществляется с помощью вычислительного комплекса "Математика-4" [5]. При рассмотрении однослойных ортотропных пластин получены варианты трансцендентных уравнений, приведенных в [2]. Для однослойной пластины из изотропного материала получено уравнение $\sin 2\lambda \pm 2\lambda = 0$, где знак плюс соответствует симметричной, а знак минус – кососимметричным задачам.

В дальнейшем рассматривается задача В для трехслойных пластин регулярного строения, что позволяет рассматривать симметричные и кососимметричные задачи, плоский погранслой которых описывается уравнением вида

$$\begin{aligned} &\Pi_1(\lambda, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \alpha_1)\sin\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 + \Pi_2(\lambda, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \alpha_1)\sin\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 + \\ &+ \Pi_3(\lambda, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \alpha_1)\cos\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 + \Pi_4(\lambda, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \alpha_1)\cos\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Использование уравнений (2.29) возможно только при известных механических характеристиках ортотропных материалов (2.6), которые практически отсутствуют в литературе. В дальнейшем рассмотрим трехслойную пластину регулярного строения с двумя крайними несущими стальными слоями и ортотропным заполнителем. В этом случае для симметричной задачи имеем при $X = \lambda\alpha_1$:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= G(b_5d_3 - b_3d_4)(X - 1/2\sin 2X\cos 2X)\\
\Pi_2 &= EGb_3b_6 - 1/2(Gb_3d_2 - Eb_6d_3)\sin^2 2X - 1/4d_2d_3[\sin^2 2X - (2X)^2]\\
\Pi_3 &= -EGb_4b_5 + 1/2(Gb_5d_1 - Eb_4d_4)\sin^2 2X + 1/4d_1d_4[\sin^2 2X - (2X)^2]\\
\Pi_4 &= E(b_1d_1 - b_4d_2)(X + 1/2\sin 2X\cos 2X)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

а для кососимметричной задачи

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= E(b_1d_1 - b_4d_2)(X + 1/2\sin 2X\cos 2X)\\
\Pi_2 &= EGb_4b_5 - 1/2(Gb_5d_1 + Eb_4d_4)\sin^2 2X + 1/4d_1d_4[\sin^2 2X - (2X)^2]\\
\Pi_3 &= -EGb_3b_6 + 1/2(Gb_3d_2 + Eb_6d_3)\sin^2 2X - 1/4d_2d_3[\sin^2 2X - (2X)^2]\\
\Pi_4 &= G(b_3d_4 - b_5d_3)(X - 1/2\sin 2X\cos 2X)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

В соотношениях (2.30)–(2.31) введены обозначения:

$$b_1 = b_6^{(1)}/b_5^{(1)},\quad b_2 = b_8^{(1)}/b_7^{(1)},\quad b_3 = b_7^{(2)}/b_7^{(1)},\quad b_4 = b_5^{(2)}/b_5^{(1)},\quad b_5 = b_8^{(2)}/b_7^{(1)},\quad b_6 = b_6^{(2)}/b_5^{(1)}$$

$$q_1 = q_2^{(1)}/q_1^{(1)},\quad q_2 = q_1^{(2)}/q_1^{(1)},\quad q_3 = q_2^{(2)}/q_1^{(1)},\quad E = \bar{E}_3^{(2)}/(2\bar{E}_3^{(1)}),\quad G = G_{31}^{(2)}/(2G_{31}^{(1)})$$

$$d_1 = (2Eb_4 - q_2)/(b_1 - q_1),\quad d_2 = (2Eb_6 - q_3)/(b_1 - q_1),\quad d_3 = (2Gb_3 - 1)/(1 - b_2)$$

$$d_4 = (2Gb_5 - 1)/(1 - b_2)$$

Сравнение функций $\Pi_i$ симметричной и кососимметричных задач показывает их структурную связь. Так $\Pi_1$ симметричной задачи совпадает с $\Pi_4$ кососимметричной задачи.

Для примера рассмотрим трехслойную пластину из стальных полос ($2h_1 = 2h_3 = 1$ см) и заполнителя в виде намоточного однонаправленного стеклопластика при $2h_2 = 18$ см. Упругие характеристики заполнителя приведены в [2]: $E_1^{(2)} = 55.917 \cdot 10^3$ МПа, $E_2^{(2)} = E_3^{(2)} = 13.734 \cdot 10^3$ МПа, $G_{12}^{(2)} = G_{13}^{(2)} = 5.592 \cdot 10^3$ МПа, $G_{23}^{(2)} = 4.905 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12}^{(2)} = 0.277$, $\nu_{23}^{(2)} = 0.4$, $\nu_{31}^{(2)} = 0.068$, $\beta_1^{(2)} = 1.22365$, $\beta_2^{(2)} = 3.00845$.

Вычисленные параметры таковы: $\nu_{21}^{(2)} = 0.068$, $\nu_{13}^{(2)} = 0.017$, $\nu_{32}^{(2)} = 0.4$, $B_{11}^{(2)} = 57.845 \cdot 10^3$ МПа, $q_1^{(2)} = \nu_2^{(2)}\beta_1^{(2)}/(1 - \nu_1^{(2)}\beta_1^{(2)^2}) = 0.356$, $q_2^{(2)} = \nu_2^{(2)}\beta_2^{(2)}/(1 - \nu_1^{(2)}\beta_2^{(2)^2}) = 5.77$, $b_7^{(2)} = 1 + q_1^{(2)}\beta_1^{(2)} = 1.434$, $b_8^{(2)} = 1 + q_2^{(2)}\beta_2^{(2)} = 18.31$, $b_5^{(2)} = b_1^{(2)} - \mu_{31}^{(2)}q_1^{(2)} = 1.185$, $b_6^{(2)} = \beta_2^{(2)} - \mu_{31}^{(2)}q_2^{(2)} = 2.44$. Для металлических слоев: $\beta^{(1)} = 1$, $q_1^{(1)} = 1$, $q_2^{(1)} = 3 - 4\nu = 1.8$, $\mu^{(1)} = \nu/(1-\nu) = 0.429$, $b_7^{(1)} = 2$, $b_8^{(1)} = 2.8$, $b_5^{(1)} = -0.571$, $b_6^{(1)} = -0.229$, $G = G_{31}^{(2)}/(2G^{(1)}) = 3.63 \cdot 10^{-2}$, $E = \bar{E}_3^{(2)}/(2\bar{E}^{(1)}) = 3.08 \cdot 10^2$.

Окончательно для симметричной задачи имеем уравнение при $X_1 = 2X$:

$$(10.945X_1 - 5.47\sin 2X_1)\sin 11X_1 \cdot \sin 27X_1 - (0.3425 + 76.17\sin^2 X_1 - \\ - 66.6X_1^2)\sin 11X_1 \cdot \cos 27X_1 + (2.125 + 4.45\sin^2 X_1 - 0.974X_1^2)\cos 11X_1 \cdot \sin 27X_1 + \\ + (11.49X_1 + 5.745\sin 2X_1)\cos 11X_1 \cdot \cos 27X_1 = 0 \quad (2.32)$$

а для кососимметричной

$$(11.49X_1 + 5.745\sin 2X_1)\sin 11X_1 \cdot \sin 27X_1 - (2.125 + 4.45\sin^2 X_1 - \\ - 0.974X_1^2)\sin 11X_1 \cdot \cos 27X_1 + (0.3425 + 76.17\sin^2 X_1 - 66.6X_1^2)\cos 11X_1 \cdot \sin 27X_1 + \\ + (10.945X_1 - 5.47\sin 2X_1)\cos 11X_1 \cdot \cos 27X_1 = 0 \quad (2.33)$$

Уравнения (2.32) и (2.33) имеют действительные и комплексные собственные значения, которые в дальнейшем должны быть получены. В данной работе найдены только первые ненулевые действительные корни симметричной и кососимметричной задач, характеризующие глубину проникновения погранслоя.

При заданных параметрах материалов наименьший ненулевой корень $X_1$ уравнения (2.32) равен 0.096, а уравнения (2.33) – 0.032. Эти корни показывают величину проникновения погранслоя по координате $t$. Так для симметричной задачи $X = \lambda\alpha_1 = 0.048$, $\lambda = 0.048/0.05 = 0.96$ и с точностью до 2% погрешности $t = 4/0.96 \approx 4$. Для кососимметричной задачи $X = \alpha\lambda_1 = 0.016$, $\lambda = 0.016/0.05 = 0.32$, $t = 4/0.32 = 12.5$. Таким образом, в симметричной задаче погранслой проникает на глубину двух толщин пластины, а в кососимметричной задаче на глубину более шести толщин. Для однослойной стальной полосы действительная часть наименьшего собственного значения составляет $\mathrm{Re}\lambda_1 = 2.11$ для симметричной задачи и $\mathrm{Re}\lambda_1 = 3.75$ для задачи изгиба. Аналогичные значения для однонаправленного намоточного стеклопластика следующие: $\lambda_1 = 1.21$ и $\lambda_1 = 1.63$.

Если в уравнении (2.29) при (3.30) для симметричной задачи и (3.31) для задачи изгиба предположить, что $E$ и $G$ значительно меньше 1, то членами с этими множителями можно пренебречь, нарушив тем самым условия стыковки по напряжениям $\tau_{xz}$ и $\sigma_z$ при переходе от слоя к слою. В этом случае симметричная и кососимметричная задачи сводятся к одному и тому же трансцендентному уравнению относительно параметра $\lambda$:

$$[\sin^2 2\lambda\alpha_1 - (2\lambda\alpha_1)^2](q_2^{(2)}\sin\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 - q_1^{(2)}\cos\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2) = 0 \quad (2.34)$$

Из (2.34) следуют уравнения $\sin 2\lambda\alpha_1 \pm 2\lambda\alpha_1 = 0$, которые имеют место при определении плоского погранслоя в однослойных стержнях из изотропного материала. Эти уравнения отражают работу несущих слоев.

Второе уравнение, которое отражает влияние заполнителя на глубину проникновения погранслоя, сводится к уравнению вида

$$\mathrm{tg}\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2 = \frac{q_1^{(2)}}{q_2^{(2)}}\mathrm{tg}\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 \quad (2.35)$$

Для выбранного заполнителя при $X = \lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2$ имеем $\mathrm{tg}X = 0.0478\,\mathrm{tg}\,2.5X$.

Наименьший положительный корень $X = 0.6$ приводит к $\lambda_1 = 0.55$ и показывает, что для рассмотренной трехслойной пластины плоский погранслой проникает на глубину до четырех толщин.

Предположение $E = G = 0$ позволяет довольно сложные уравнения (2.32) и (2.33) свести к простому (2.34) и быстро получить результаты за счет некоторой потери точности.

**3. Решение задачи антиплоского погранслоя.** Для основных величин антиплоской деформации, для которой введем верхний индекс $a$, решение ищется в виде асимптотических рядов

$$(\overset{a}{\tau}{}^{(k)}_{xy}, \overset{a}{\tau}{}^{(k)}_{yz}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_a}(\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy}, \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz}), \quad \overset{a}{\upsilon}{}^{(k)} = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_a+1}\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s} \tag{3.1}$$

а для вспомогательных величин

$$\begin{gathered}(\overset{a}{\sigma}{}^{(k)}_{x}, \overset{a}{\sigma}{}^{(k)}_{y}, \overset{a}{\sigma}{}^{(k)}_{z}, \overset{a}{\tau}{}^{(k)}_{xz}) = \sum_{s=0} \varepsilon^{q_a+1}(\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{x}, \overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{y}, \overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{z}, \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xz}) \\ (\overset{a}{u}{}^{(k)}, \overset{a}{w}{}^{(k)}) = \sum \varepsilon^{q_a+2}(\overset{a}{u}{}^{(k)s}, \overset{a}{w}{}^{(k)s}), \quad q_a = s + \kappa_a\end{gathered} \tag{3.2}$$

Параметр $\kappa_a$ находится из согласования краевых условий.

После подстановки (3.1)–(3.2) в уравнения равновесия (1.5) и соотношения упругости (1.6) имеем уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{x}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xz}}{\partial\zeta_k} = 0, \quad \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s-2}_{y}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz}}{\partial\zeta_k} = 0 \\ \partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xz}/\partial t_k + \partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz}/\partial\eta_k + \partial\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{z}/\partial\zeta_k = 0\end{gathered} \tag{3.3}$$

и соотношения упругости

$$\begin{gathered}\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{x} = B^{(k)}_{11}\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B^{(k)}_{12}\frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k} + B^{(k)}_{13}\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}, \quad \overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{y} = B^{(k)}_{21}\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B^{(k)}_{22}\frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k} + B^{(k)}_{23}\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k} \\ \overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{z} = B^{(k)}_{31}\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B^{(k)}_{32}\frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k} + B^{(k)}_{33}\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}, \quad \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy} = G^{(k)}_{12}\left(\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right) \\ \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xz} = G^{(k)}_{31}\left(\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\right), \quad \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz} = G^{(k)}_{23}\left(\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\right)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Система уравнений (3.3)–(3.4) также распадается на основную и вспомогательную задачи. Для основной задачи имеем уравнение равновесия

$$\frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s-2}_{y}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz}}{\partial\zeta_k} = 0 \tag{3.5}$$

и соотношения упругости

$$\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy} = G^{(k)}_{12}\left(\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right), \quad \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz} = G^{(k)}_{23}\left(\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\right) \tag{3.6}$$

Вспомогательная система содержит следующие уравнения

$$\frac{\partial\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{x}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xy}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz}}{\partial\zeta_k} = 0, \quad \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xz}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{yz}}{\partial\eta_k} + \frac{\partial\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{z}}{\partial\zeta_k} = 0 \tag{3.7}$$

и соотношения упругости

$$\begin{gathered}\overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{x} = B^{(k)}_{11}\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B^{(k)}_{12}\frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k} + B^{(k)}_{13}\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}, \quad \overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{y} = B^{(k)}_{21}\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B^{(k)}_{22}\frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k} + B^{(k)}_{23}\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k} \\ \overset{a}{\sigma}{}^{(k)s}_{z} = B^{(k)}_{31}\frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B^{(k)}_{32}\frac{\partial\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}}{\partial\eta_k} + B^{(k)}_{33}\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}, \quad \overset{a}{\tau}{}^{(k)s}_{xz} = G^{(k)}_{31}\left(\frac{\partial\overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}\right)\end{gathered} \tag{3.8}$$

Основная задача при определении антиплоского погранслоя сводится к нахождению перемещения $\overset{a}{v}^{(k)}$ из уравнения

$$\frac{\partial^2 \overset{a}{v}^{(k)s}}{\partial \zeta_k^2} + \frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{v}^{(k)s}}{\partial t_k^2} = \overset{a}{R}_2^{(k)s-2} \tag{3.9}$$

$$\overset{a}{R}_2^{(k)s-2} = -\frac{G_{12}^{(k)} + \mu_{21}^{(k)}\overline{E}_2^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{u}^{(k)s-2}}{\partial t_k \partial \eta_k} - \frac{\overline{E}_2^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{v}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k^2} - \frac{G_{23}^{(k)} + \mu_{23}^{(k)}\overline{E}_2^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{w}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k \partial \zeta_k} \tag{3.10}$$

Решение однородного уравнения при $s = 0, 1$ ищется в виде

$$\overset{a}{v}^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = \overset{a}{u}_2^{(k)s}(\zeta_2) F^{(k)s}(\eta_k) e^{-\mu t_k} \tag{3.11}$$

где $\mu > 0$ – показатель изменяемости антиплоского погранслоя.

Из (3.9) вытекает, что при любых $F^{(k)s}$ для $\overset{a}{u}_2^{(k)s}(\zeta_k)$ решение имеет вид

$$\overset{a}{u}_2^{(k)s} = C_1^{(k)s} \cos\sqrt{G_{12}^{(k)}/G_{23}^{(k)}}\mu\zeta_k + C_2^{(k)s} \sin\sqrt{G_{12}^{(k)}/G_{23}^{(k)}}\mu\zeta_k \tag{3.12}$$

Напряжения $\overset{a}{\tau}_{xy}^{(k)s}$ и $\overset{a}{\tau}_{yz}^{(k)s}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{a}{\tau}_{xy}^{(k)s} &= -G_{12}^{(k)} \mu \overset{a}{u}_2^{(k)s}(\zeta_k) F^{(k)s}(\eta_k) e^{-\mu t_k} \\ \overset{a}{\tau}_{yz}^{(k)s} &= -\sqrt{G_{12}^{(k)} G_{23}^{(k)}}\mu\left( C_1^{(k)s} \sin\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}}\mu\zeta_k - C_2^{(k)s} \cos\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}}\mu\zeta_k \right) F^{(k)s}(\eta_k) e^{-\mu t_k} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Задача решена с точностью до некоторой функции $F^{(k)s}(\eta_k)$.

Из сравнения основных задач плоского и антиплоского погранслоев видно, что антиплоский погранслой определяется значительно проще и сводится к уравнению типа уравнений гармонических колебаний.

Параметр $\mu$ находится из условий выполнения краевых условий на лицевых поверхностях и условий непрерывности функций $\overset{a}{v}^{(k)s}$, $\overset{a}{\tau}_{yz}^{(k)s}$ на границах слоев и $F^{(k)s} = F^{(k+1)s}$. Для однослойной пластины $\overset{as}{\tau}_{yz} = 0$ при $\zeta = \pm 1$, что приводит к уравнению [2]:

$$\mu^2 \sin\sqrt{G_{12}/G_{23}}\mu \cos\sqrt{G_{12}/G_{23}}\mu = 0$$

которое имеет два нулевых корня. Для симметричной по $\zeta$ задачи решение уравнения $\sin\sqrt{G_{12}/G_{23}}\,\mu = 0$ представляется в виде $\mu_n = n\pi\sqrt{G_{23}/G_{12}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а для кососимметричной задачи решение уравнения $\cos\sqrt{G_{12}/G_{23}}\,\mu = 0$ имеет вид $\mu_n = (2n-1)/2\pi\sqrt{G_{23}/G_{12}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Эти результаты для однослойной пластины хорошо известны [2] и показывают сильную зависимость глубины проникновения погранслоя от отношения $G_{23}/G_{12}$. В литературе данный погранслой называется "слабым" в связи со значительным проникновением вглубь пластины.

С целью упрощения записи уравнений антиплоского погранслоя для многослойных пластин введем обозначения $G_k^2 = G_{12}^{(k)} G_{23}^{(k)}$, $K_k^2 = G_{12}^{(k)}/G_{23}^{(k)}$.

Для двухслойной пластины из определителя четвертого порядка получено уравнение

$$(G_1+G_2)\sin 2\mu(K_1\alpha_1+K_2\alpha_2)+(G_1-G_2)\sin 2\mu(K_1\alpha_1-K_2\alpha_2) = 0 \tag{3.14}$$

Для трехслойной пластины параметр $\mu$ находится из определителя шестого порядка, который при $G = G_1G_3/G_2$ сводится к уравнению

$$\begin{aligned}&(G_1+G_2+G_3+G)\sin 2\mu(K_1\alpha_1+K_2\alpha_2+K_3\alpha_3)+\\&+(-G_1+G_2+G_3-G)\sin 2\mu(-K_1\alpha_1+K_2\alpha_2+K_3\alpha_3)+\\&+(G_1-G_2+G_3-G)\sin 2\mu(K_1\alpha_1-K_2\alpha_2+K_3\alpha_3)+\\&+(G_1+G_2-G_3-G)\sin 2\mu(K_1\alpha_1+K_2\alpha_2-K_3\alpha_3) = 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

Если трехслойная пластина имеет регулярную структуру, то общая задача распадается на симметричную и кососимметричную, описываемые более простыми уравнениями.

Симметричная задача по определению антиплоского погранслоя трехслойной пластины регулярного строения описывается уравнением

$$(G_1+G_2)\sin\mu(2K_1\alpha_1+K_2\alpha_2)+(G_1-G_2)\sin\mu(2K_1\alpha_1-K_2\alpha_2) = 0 \tag{3.16}$$

а кососимметричная задача

$$(G_1+G_2)\cos\mu(2K_1\alpha_2+K_2\alpha_2)-(G_1-G_2)\cos\mu(2K_1\alpha_1-K_2\alpha_2) = 0 \tag{3.17}$$

Уравнения для двухслойной и трехслойной пластин намечают вид уравнений антиплоского погранслоя для многослойных пластин. Уравнения (3.14)–(3.17) имеют только действительные корни, которые зависят от параметров $G_k$ и $K_k$. Из этих соотношений наибольшее влияние на проникновение погранслоя оказывает отношение $K_k = \sqrt{G_{12}^{(k)}/G_{23}^{(k)}}$, численное значение которого практически отсутствует в литературе для ортотропных материалов, хотя отмечается, что для некоторых заполнителей $G_{12} \gg G_{23}$.

При $G_1 = G_2$ решения уравнений (3.16)–(3.17) сводятся к $\mu_n = n\pi 1/(2K_1\alpha_1 + K_2\alpha_2)$ ($n = 1, 2, \ldots$) для симметричной задачи и $\mu_n = (2n-1)/2\pi 1/(2K_1\alpha_1 + K_2\alpha_2)$ ($n = 1, 2, \ldots$) для кососимметричной задачи, а для изотропных материалов $K_1 = K_2$, эти решения соответствуют однослойным пластинам.

Проследим за проникновением антиплоского погранслоя вглубь трехслойной пластины из двух изотропных материалов с различными параметрами $G_1$ и $G_2$. Будем считать, что заполнитель трехслойной пластины имеет модуль $G_2$ значительно меньше модуля $G_1$ несущих слоев. Положим, что $G_1/G_2$ принимают значения 2, 10, 100, $h_1 = h_3 = 0.5$ см, $h_2 = 9$ см ($\alpha_1 = \alpha_3 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.9$, $2\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).

Симметричная задача такой пластины описывается уравнением

$$\sin\mu - \frac{G_1-G_2}{G_1+G_2}\sin 0.8\mu = 0$$

наименьший корень $\mu$ которого при $G_1/G_2$ = 2, 10, 100 равен соответственно 2.89388, 2.21053 и 1.80612.

Кососимметричная задача описывается уравнением

$$\cos\mu - \frac{G_1-G_2}{G_1+G_2}\cos 0.8\mu = 0$$

с наименьшими корнями при $G_1/G_2$ = 2, 10, 100 равными оответственно 1.43314, 0.918362 и 0.328358.

С увеличением отношения $G_1/G_2$ первые корни симметричной и кососимметричной задач уменьшаются, что соответствует большему проникновению погранслоя. Наименьшее значение первого корня кососимметричной задачи ($\mu \approx 0.33$) соответствует довольно глубокому проникновению антиплоского погранслоя (до 6 толщин) и, следовательно, построение уточненных моделей расчета для таких пластин является довольно актуальной задачей.

Основная задача при $s \geq 2$ сводится к неоднородному уравнению (3.9), для которого необходимо определить полное решение, но для этого требуется знать решение вспомогательной системы уравнений при $s = 0{,}1$.

Решение вспомогательной задачи (3.7), (3.8) сводится к уравнениям

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \overset{a}{u}^{(k)s}}{\partial t_k^2} + \nu_1^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{a}{u}^{(k)s}}{\partial \zeta_k^2} + \nu_2^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{a}{w}^{(k)s}}{\partial t_k \partial \zeta_k} = \overset{a}{R}_u^{(k)s} \\
&\nu_3^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{a}{w}^{(k)s}}{\partial t_k^2} + \frac{\partial^2 \overset{a}{w}^{(k)s}}{\partial \zeta_k^2} + \nu_4^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{a}{u}^{(k)s}}{\partial t_k \partial \zeta_k} = \overset{a}{R}_w^{(k)s}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

аналогичным (2.9), но отличающихся правой частью, которая имеет вид

$$\begin{aligned}
&\overset{a}{R}_u^{(k)s} = -\frac{B_{12}^{(k)} + G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{\upsilon}^{(k)s}}{\partial t_k \partial \eta_k} - \frac{G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{u}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k^2} \\
&\overset{a}{R}_w^{(k)s} = -\frac{B_{32}^{(k)} + G_{23}^{(k)}}{B_{33}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{\upsilon}^{(k)s}}{\partial t_k \partial \eta_k} - \frac{G_{23}^{(k)}}{B_{33}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{a}{w}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k^2}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Решение системы уравнений (3.18) ищется при $s = 0{,}1$ в виде представления Фурье

$$\overset{a}{u}^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = \overset{a}{u}_1^{(k)s}(\zeta_k) \frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k} e^{-\mu t_k}, \quad \overset{a}{w}^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = \overset{a}{u}_3^{(k)s}(\zeta_k) \frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k} e^{-\mu t_k} \tag{3.20}$$

Для $\overset{a}{u}_1^{(k)s}$, $\overset{a}{u}_3^{(k)s}$ необходимо иметь решение, которое состоит из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения (3.18) находится аналогично погранслою "плоская деформация". Запишем полное решение для задачи $B$, которое чаще всего имеет место для ортотропного материала (2.22)–(2.23):

$$\begin{aligned}
\overset{a}{u}_1^{(k)s} &= -q_1^{(k)} D_1^{(k)s} \sin\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + q_1^{(k)} D_2^{(k)s} \cos\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k - q_2^{(k)} D_3^{(k)s} \sin\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k + \\
&+ q_2^{(k)} D_4^{(k)s} \cos\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k + \overset{a}{u}_1^{(k)s*} \\
\overset{a}{u}_3^{(k)s} &= D_1^{(k)s} \cos\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + D_2^{(k)s} \sin\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + D_3^{(k)s} \cos\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k + \\
&+ D_4^{(k)s} \sin\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k + \overset{a}{u}_3^{(k)s*}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Напряжения определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
\overset{a}{\sigma}_x^{(k)s} &= \bar{E}_1^{(k)} \mu [b_1^{(k)} D_1^{(k)s} \sin\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_1^{(k)} D_2^{(k)s} \cos\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_2^{(k)} D_3^{(k)s} \sin\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\
&- b_2^{(k)} D_4^{(k)s} \cos\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k] \frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k} e^{-\mu t_k} + \overset{a}{\sigma}_x^{(k)s*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{a}{\sigma}{}_y^{(k)s} &= \bar{E}_2^{(k)}\mu[b_3^{(k)}D_1^{(k)s}\sin\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_3^{(k)}D_2^{(k)s}\cos\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_4^{(k)}D_3^{(k)s}\sin\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\ &- b_4^{(k)}D_4^{(k)s}\cos\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k]\frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k}e^{-\mu t_k} + \overset{a}{\sigma}{}_y^{(k)s*}\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\overset{a}{\sigma}{}_z^{(k)s} &= -\bar{E}_3^{(k)}\mu[b_5^{(k)}D_1^{(k)s}\sin\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_5^{(k)}D_2^{(k)s}\cos\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_6^{(k)}D_3^{(k)s}\sin\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\ &- b_6^{(k)}D_4^{(k)s}\cos\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k]\frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k}e^{-\mu t_k} + \overset{a}{\sigma}{}_z^{(k)s*}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{a}{\tau}{}_{xz}^{(k)s} &= G_{31}^{(k)}\mu[b_7^{(k)}D_1^{(k)s}\cos\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_7^{(k)}D_2^{(k)s}\sin\mu\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}D_3^{(k)s}\sin\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k + \\ &+ b_8^{(k)}D_4^{(k)s}\cos\mu\beta_2^{(k)}\zeta_k]\frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k}e^{-\mu t_k} + \overset{a}{\tau}{}_{xz}^{(k)s*}\end{aligned}$$

Здесь $\overset{a}{u}{}_1^{(k)s*}$, $\overset{a}{u}{}_3^{(k)s*}$ – частное решение неоднородной системы уравнений (3.18), а $\overset{a}{\sigma}{}_x^{(k)s*}$, $\overset{a}{\sigma}{}_y^{(k)s*}$, $\overset{a}{\sigma}{}_z^{(k)s*}$, $\overset{a}{\tau}{}_{xz}^{(k)s*}$ – напряжения, определяемые этим частным решением; $q_1^{(k)}$, $q_2^{(k)}$, $b_i$ ($i = 1, \ldots, 8$) определяются соответствующими константами задачи В. Постоянные интегрирования $D_i^{(k)s}$ определяются из тех же условий, что и постоянные $A_i^{(k)s}$. Следовательно, все уравнения теории упругости выполняются и для краевой антиплоской деформации.

При $s \geq 2$ необходимо выполнение условия для функции интегрирования $F^{(k)s} = d^2F^{(k)s-2}/(d\eta_k^2)$. В данном случае антиплоскому погранслою сопутствует второй погранслой – "плоская краевая деформация".

**4. Условия существования затухающих решений.** Интегрирование неоднородных уравнений плоской (2.5) и антиплоской (3.5) деформаций требует выполнение условий существования затухающих решений, что связано с возможностью быстрого затухания погранслоев. Если к краю пластины приложены произвольные нагрузки, то затухающих решений по $t_k$ может и не существовать [2, 4]. Поэтому требование существования затухающего напряженно-деформированного состояния налагает дополнительные условия на краевые значения напряжений. Эти условия, имеющие наглядный физический смысл, можно получить непосредственно из уравнений (2.5) для плоской и (3.5) для антиплоской деформации. Для этого применим к обеим частям первого уравнения (2.5) операторы

$$\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k} d\zeta_k \int_0^\infty dt_k, \quad \int_{-\alpha_k}^{\alpha_k} \zeta_k d\zeta_k \int_0^\infty dt_k \tag{4.1}$$

а ко второму уравнению операторы

$$\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k} d\zeta_k \int_0^\infty dt_k, \quad \int_{-\alpha_k}^{\alpha_k} d\zeta_k \int_0^\infty t_k dt_k \tag{4.2}$$

Эти операторы применимы, поскольку ими определяются обычные усилия и моменты.

После некоторых преобразований будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s}\Big|_{t_k=0}d\zeta_k = -\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}d\zeta_k\int_0^\infty \overset{p}{R}{}_\alpha^{(k)s-2}dt_k,\quad \overset{p}{R}{}_\alpha^{(k)s-2} = -B_{32}^{(k)}\frac{\partial^2\overset{(k)s-2}{\upsilon}}{\partial\eta_k\partial\zeta_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\zeta_k\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s}\Big|_{t_k=0}d\zeta_k-\alpha_k\int_0^\infty\left(\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}\Big|_{\zeta_k=\alpha_k}+\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}\Big|_{\zeta_k=-\alpha_k}\right)dt_k\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[-\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\zeta_k d\zeta_k\int_0^\infty\overset{p}{R}{}_\alpha^{(k)s-2}dt_k+\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}d\zeta\int_0^\infty\overset{p}{R}{}_\gamma^{(k)s-2}dt_k\right] \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}\Big|_{t_k=0}d\zeta_k = -\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}d\zeta_k\int_0^\infty \overset{p}{R}{}_\gamma^{(k)s-2}dt_k,\quad \overset{p}{R}{}_\gamma^{(k)s-2} = -\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}$$

Применив к уравнениям равновесия (3.5) первый из операторов (4.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\overset{a}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}\Big|_{t_k=0}d\zeta_k = -\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}d\zeta_k\int_0^\infty \overset{a}{R}{}_\gamma^{(k)s-2}dt_k,\quad \overset{a}{R}{}_\tau^{(k)s-2} = -\frac{\partial\overset{a}{\sigma}{}_y^{(k)s-2}}{\partial\eta_k} \tag{4.4}$$

В силу того, что продольные кромки и бесконечно удаленный торец $t_k = +\infty$ свободны от внешних сил, полуполоса будет уравновешена в целом тогда и только тогда, когда краевые напряжения (при $t_k = 0$) находятся в равновесии с "массовыми" силами [2]. Этот факт и отражает условия (4.3)–(4.4), которые по структуре совпадают с соответствующими условиями [2], полученными для однослойных пластин. Отличие заключается во втором и третьем слагаемых в левой части второго уравнения (4.3), которые для однослойных пластин тождественно равны нулю.

Применив к обеим частям первого уравнения (3.6) первый оператор, а к уравнению (3.5) второй оператор (4.2), после преобразований получим условие

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\overset{a}{\upsilon}{}^{(k)s}\Big|_{t_k=0}d\zeta_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{G_{12}^{(k)}}\int_0^\infty t_k dt_k\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}\overset{a}{R}{}_\tau^{(k)s-2}d\zeta_k+\int_{-\alpha_k}^{\alpha_k}d\zeta_k\int_0^\infty\overset{a}{R}{}_\beta^{(k)s-2}dt_k\right] \tag{4.5}$$

где $\overset{a}{R}{}_\beta^{(k)s-2} = -\partial\overset{a}{u}{}^{(k)s-2}/\partial\eta_k$ определяется первым физическим соотношением (3.6). Условие (4.5) является условием существования затухающего решения в антиплоской задаче для случая, когда на крае задается значение перемещения. При $s = 0$, 1 системы (2.5) и (4.5) однородны и независимы. Затухающее решение можно найти методом Фурье, что и сделано выше.

В заключение необходимо отметить, что предложенное точное нахождение погранслоев в многослойной пластине упирается в определенные трудности раскрытия определителей при большом числе слоев. Поэтому некоторые преимущества представляет приближенный метод определения собственных чисел и векторов, предложенный в [3] и связанный с послойным представлением перемещений в ряд по поперечной координате.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. *Агаловян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
3. *Бутенко Ю.И.* Вариационно-асимптотические методы построения неклассических методов расчета стержней и пластин. Казань: Новое знание, 2001. 320 с.
4. *Гусейн-Заде М.И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок // Тр. Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970. С. 638–649.
5. *Артюхин Ю.М., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М.* Система "Математика 4.0" и ее приложения в механике. Казань; Набережные Челны: Изд-во КамПИ, 2002.415 с.


Казань

Поступила в редакцию
17.05.2004