

УДК 539.3

© 2007 г. А.О. ВАТУЛЯН, А.А. РЫНКОВА

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ БИМОРФОВ С РАЗРЕЗНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Исследованы стационарные колебания и статический изгиб биморфной пластины, состоящей из двух пьезокерамических слоев с бесконечно тонким разрезным электродом между ними. Предложена модель, учитывающая корневую особенность структуры электрического поля на границе раздела областей разрезного электрода. Для плоской задачи получено уравнение движения, сформулированы граничные условия и условия сопряжения на границе раздела областей разрезного электрода. Для пьезокерамики PZT-4 рассчитаны частоты резонанса и антирезонанса, исследована зависимость динамического коэффициента электромеханической связи от размера внутреннего электрода. Показано, что использование пластины с разрезным электродом позволяет повысить эффективность возбуждения колебаний по сравнению со случаем сплошного внутреннего электрода. В случае статического изгиба пластины-полосы определен размер внутреннего электрода, обеспечивающий значительное увеличение прогиба в центре биморфа.

1. Введение. В настоящее время во многих технических устройствах используются пластинчатые пьезоэлементы в виде сенсоров, актуаторов [1] и весьма актуальными становятся вопросы расчета электрических и механических полей, возникающих в пьезоактивной среде. Решение трехмерных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому особую значимость для практических расчетов электроупругих полей в тонких пластинках приобретают методы, позволяющие свести трехмерные уравнения к двумерной задаче электроупругости [2]. Например, в [3] эта проблема решается с помощью вариационного принципа Гамильтона в электроупругости с использованием разложения механических смещений и электрического потенциала в степенные ряды. В [4] для определения поля смещений также применяется разложение в степенные ряды, при этом электрический потенциал представляется в виде линейной функции, удовлетворяющей граничным условиям. Для анализа электроупругих полей в [5] применяется метод асимптотического интегрирования уравнений линейной теории пьезоэлектрических сред. В [2] изложена общая схема исследования трехмерных уравнений электроупругости и предложен матрично-операторный способ приведения трехмерной задачи к двумерным уравнениям. В [6, 7] путем введения гипотез о распределении электрических и механических полей произведено сведение проблемы к классической задаче изгиба пластин с “ужесточенными” модулями.

Все вышеперечисленные подходы относятся к пьезоэлементам со сплошными внутренними или внешними электродами. Предметом настоящего исследования является двухслойная электроупругая пластина (биморф) с разрезным внутренним электродом. Практика конструирования пьезоэлектрических элементов свидетельствует о том, что при помощи разрезания электродов можно повысить эффективность управления такими элементами и достичь большей трансформации энергии. Особый интерес с связи с этим представляет возможность повышения эффективности работы конструкции посредством выбора размера и геометрии электродного покрытия. Для расчета таких пьезо-

зоэлементов требуются либо решения плоской задачи электроупругости со смешанными граничными условиями, либо построения усложненных моделей изгиба пластин. В [8] предлагается один из методов решения подобной задачи на основе уравнений, полученных в [7], где задача сводится к интегрированию уравнений теории пластин с кусочно-постоянными цилиндрической жесткостью и коэффициентом Пуассона. Однако, в силу смешанных условий сопряжения у края электрода, нормальная компонента вектора электрической индукции имеет в этих точках корневую особенность. Модель, основанная на простейших гипотезах [6–8], не учитывает этой особенности структуры электрического поля и дает постоянное значение индукции в электродированной области и конечное значение скачка индукции у края электрода. В [9] предложена модель изгибных колебаний двухслойной пластины с разрезным внутренним электродом, построенная с использованием вариационного принципа Гамильтона для пьезоэлектрической среды.

Публикуемая работа посвящена развитию модели изгибных колебаний двухслойной пластины с разрезным внутренним электродом [9], построенная с использованием вариационного принципа Гамильтона для пьезоэлектрической среды и с более адекватным учетом структуры полей у края; уточнены условия сопряжения модели [9]; на ее основе проведен анализ задачи об оптимальном размере внутреннего электрода.

2. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую плиту, занимающую объем V , ограниченный боковой поверхностью S_b и двумя параллельными плоскостями $x_3 = \pm h$. Плита состоит из двух пьезокерамических слоев одинаковой толщины h . Свяжем с плитой декартову систему координат, оси x_1, x_2 которой расположены в ее срединной плоскости. Пьезокерамика поляризована в направлении оси x_3 . На внешние поверхности плиты $x_3 = \pm h$ нанесены электроды, а также имеется система внутренних электродов в плоскости $x_3 = 0$. Обозначим сечение плиты срединной плоскостью $x_3 = 0$ через $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, причем будем считать, что область Ω_1 не электродирована, а $\Omega_2 = \cup \Omega_{2m}, \Omega_{2i} \cap \Omega_{2j} = \emptyset$, ($m, i, j = 1, \dots, N; i \neq j$) является совокупностью тонких непересекающихся электродов произвольной конфигурации.

Определяющие соотношения электроупругости в случае пьезокерамики, поляризованной в направлении оси x_3 , имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}^E \varepsilon_{11} + c_{12}^E \varepsilon_{22} + c_{13}^E \varepsilon_{33} - e_{31} E_3 \\ \sigma_{22} &= c_{12}^E \varepsilon_{11} + c_{11}^E \varepsilon_{22} + c_{13}^E \varepsilon_{33} - e_{31} E_3 \\ \sigma_{33} &= c_{13}^E (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + c_{33}^E \varepsilon_{33} - e_{31} E_3, \quad \sigma_{12} = (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{13} - e_{15} E_1, \quad \sigma_{23} = 2c_{44}^E \varepsilon_{23} - e_{15} E_2 \\ D_1 &= 2e_{15} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{11}^S E_1, \quad D_2 = 2e_{15} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{11}^S E_2 \\ D_3 &= e_{31} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + e_{33} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}^S E_3 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, D_i – компоненты вектора электрической индукции, E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля, c_{ij}^E – модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле, e_{31}, e_{33}, e_{15} – пьезоэлектрические постоянные, $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – диэлектрические проницаемости при постоянных деформациях.

Изгиб плиты описывается уравнениями движения и электростатики [2] $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2$, $\partial D_i / \partial x_i = 0$, где ρ – плотность материала.

Будем считать, что боковая поверхность плиты S_b и лицевые поверхности $x_3 = \pm h$ свободны от напряжений

$$\sigma_{ij} n_j |_{S_b} = 0, \quad \sigma_{i3} |_{x_3 = \pm h} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Возбуждение колебаний осуществляется за счет подведения электрического напряжения на внутреннем разрезном электроде

$$\varphi |_{x_3 = 0} = V_m e^{-i\omega t}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{2m} \quad (m = \overline{1, N})$$

при условии, что на внешних электродированных поверхностях $\varphi |_{x_3 = \pm h} = 0$ (ω – частота колебаний). Считаем, что внешней средой является воздух, поэтому полагаем $D_i n_i |_{S_b} = 0$.

3. Построение упрощенной модели изгиба. При построении модели [9] в механической части принимаются гипотезы Кирхгофа для распределения перемещений по толщине $u_3 = w(x_1, x_2)$, $u_i = -x_3 w_{,i}$ ($i = 1, 2$), где функция $w(x_1, x_2)$ характеризует прогиб срединной поверхности пластины. Согласно асимптотическому анализу, проведенному в [10], нормальными напряжениями σ_{33} можно пренебречь по сравнению с другими компонентами тензора напряжений, поэтому далее полагаем, что всюду в области, занятой пластиной, $\sigma_{33} = 0$. Используя определяющее соотношение для σ_{33} , исключим компоненту ϵ_{33} тензора деформации из уравнений состояния пьезоэлектрической среды (2.1):

$$\sigma_{11} = c_{11}^* u_{1,1} + c_{12}^* u_{2,2} + e_{31}^* \varphi_{,3}$$

$$\sigma_{22} = c_{12}^* u_{1,1} + c_{11}^* u_{2,2} + e_{31}^* \varphi_{,3}$$

$$D_{33} = e_{31}^* u_{1,1} + e_{31}^* u_{2,2} - \epsilon_{33}^* \varphi_{,3}$$

$$c_{11}^* = c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad c_{12}^* = c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, \quad e_{31}^* = e_{31}^E - \frac{c_{13}^E e_{33}^E}{c_{33}^E}, \quad \epsilon_{33}^* = \epsilon_{33}^E + \frac{2e_{33}^E}{c_{33}^E}$$

Выражения для компонент тензора напряжений σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} и компонент вектора электрической индукции D_1, D_2 останутся прежними, как в (2.1).

Используя преобразованные определяющие соотношения, получим

$$M_{11}^I = -D(w_{,11}^I + \nu^* w_{,22}^I) - AhV$$

$$M_{22}^I = -D(\nu^* w_{,11}^I + w_{,22}^I) - AhV$$

$$M_{12}^I = -D(1 - \nu^*) w_{,12}^I, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1$$

$$M_{11}^{II} = -D(w_{,11}^{II} + \nu^* w_{,22}^{II}) - AhV_m + Bh^2 q \quad (3.1)$$

$$M_{22}^{II} = -D(\nu^* w_{,11}^{II} + w_{,22}^{II}) - AhV_m + Bh^2 q$$

$$M_{12}^{II} = -D(1 - \nu^*) w_{,12}^{II}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{2m}, \quad m = \overline{1, N}$$

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j = 1, 2)$$

$$D = \frac{2}{3}h^3 c_{11}^*, \quad \nu^* = \frac{c_{12}^*}{c_{11}^*}, \quad A = \frac{4}{3}e_{31}^*, \quad B = \frac{1}{6} \frac{e_{31}^*}{\varepsilon_{33}^*}, \quad V = \Phi|_{x_3=0}, \quad q = D_3|_{x_3=+0} - D_3|_{x_3=-0}$$

Здесь D характеризует эффективную цилиндрическую жесткость, ν^* – эффективный коэффициент Пуассона. Отметим, что в предлагаемой модели жесткость D и коэффициент Пуассона ν^* постоянны в отличие от [6, 8], где они представляют собой кусочно-постоянные функции.

Известно, что при наличии разрезного электрода условия сопряжения терпят разрыв в электрической части. При разрезании электрода появляются особенности в структуре электрических полей в окрестности края электрода. Исходя из решения ряда модельных задач электроупругости [2], можно заключить, что нормальная составляющая вектора электрической индукции терпит скачок на внутреннем электроде, который имеет корневую особенность и неограниченно возрастает при приближении к краю электрода. Чтобы учесть эту особенность, введем в рассмотрение две функции. Пусть функция $V(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2, 0)$ есть значение электрического потенциала $\Phi(x_1, x_2)$ на срединной плоскости $x_3 = 0$. В неэлектродированной области Ω_1 значение этой функции неизвестно, а в электродированных областях Ω_{2m} : $V(x_1, x_2) = V_m$ ($m = \overline{1, N}$). Известно, что на внутреннем электроде нормальная составляющая D_3 вектора электрической индукции имеет скачок $q(x_1, x_2) = D_3(x_1, x_2, +0) - D_3(x_1, x_2, -0)$. Таким образом, на плоскости $x_3 = 0$ в области Ω_1 функция D_3 непрерывна, поэтому здесь $q(x_1, x_2) \equiv 0$. Отметим, что в случае использования модели [8], которая не учитывает особенности распределения электрических полей, скачок $q(x_1, x_2)$ на внутреннем электроде принимает некоторое постоянное значение.

Относительно распределения электрического потенциала примем следующую гипотезу:

$$\begin{aligned} \Phi^I(x_1, x_2, x_3) &= (1 - x_3^2/h^2)V(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1 \\ \Phi^{II}(x_1, x_2, x_3) &= \left[\left(1 - \frac{x_3^2}{h^2}\right)V_m + \frac{h}{2\varepsilon_{33}^*} \left(\frac{x_3^2}{h^2} - \frac{|x_3|}{h}\right)q(x_1, x_2) \right], \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{2m} \quad (m = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выбор потенциала в виде (3.2) позволяет автоматически удовлетворить электрическим граничным условиям на лицевых поверхностях пластины $x_3 = \pm h$ и на внутреннем электроде и учесть разрывность производной $\Phi_{,3}$. В (3.2) неизвестными являются $V(x_1, x_2)$ – потенциал на срединной поверхности плиты вне электрода и $q(x_1, x_2)$ – скачок индукции на электроде.

Воспользуемся вариационным принципом Гамильтона для электроупругости, который в случае гармонических колебаний при отсутствии массовых сил, поверхностных нагрузок и поверхностных зарядов имеет вид [2]:

$$\int_{\Omega-h}^h \delta H dx_3 d\Omega - \rho \omega^2 \int_{\Omega-h}^h \int u_i \delta u_i dx_3 d\Omega = 0$$

где H – электрическая энтальпия, $\delta H = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i$ – вариация энтальпии. Используя введенные гипотезы и проводя операции варьирования и интегрирования, в результате получим уравнения, содержащие независимые вариации δw^I , δV в области Ω_1 и δw^{II} , δq в области Ω_2 . Приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим системы дифференциальных уравнений изгибных колебаний

электроупругой плиты с разрезным электродом. Введем безразмерные параметры как

$$x_1 = a\tilde{x}_1, \quad x_2 = a\tilde{x}_2, \quad w = w_0\tilde{w}, \quad V = \frac{w_0 c_{33}^E}{e_{33}} \tilde{V}, \quad q = \frac{w_0}{h} e_{33} \tilde{q}$$

где a – характерный размер пластины в плане, w_0 – характерный прогиб. Далее символ (\sim) над безразмерными переменными опускаем. Тогда уравнения изгиба можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta^2 w^I + k^2 \Delta w^I - 3 \frac{k^2}{\varepsilon^2} w^I + \frac{2}{\varepsilon^2} a_{11} \Delta V &= 0 \\ \Delta w^I + \frac{4}{5} a_{21} \Delta V - \frac{2}{\varepsilon^2} a_{22} V &= 0 \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1 \\ \Delta^2 w^{\text{II}} + k^2 \Delta w^{\text{II}} - 3 \frac{k^2}{\varepsilon^2} w^{\text{II}} - \frac{1}{4\varepsilon^2} b_{11} \Delta q &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\Delta w^{\text{II}} - \frac{1}{10} b_{21} \Delta q + \frac{1}{\varepsilon^2} b_{22} q = \frac{2}{\varepsilon^2} a_{22} V_m, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{2m} \quad (m = \overline{1, N})$$

$$a_{11} = \frac{c_{33}^E e_{31}^*}{c_{11}^* e_{33}}, \quad a_{21} = \frac{c_{33}^E s_{11}^*}{e_{31}^* e_{33}^*}, \quad a_{22} = \frac{c_{33}^E \vartheta_{33}^*}{e_{31}^* e_{33}^*}, \quad k^2 = \frac{\rho \omega^2 a^2}{c_{11}^*}$$

$$b_{11} = \frac{e_{31}^* e_{33}^*}{c_{11}^* \vartheta_{33}^*}, \quad b_{21} = \frac{s_{11}^* e_{33}^*}{\vartheta_{33}^* e_{31}^*}, \quad b_{22} = \frac{e_{33}^*}{e_{31}^*}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Для вывода граничных условий приравняем нулю коэффициенты при независимых вариациях во внеинтегральных слагаемых. Условия на внешней границе $\Gamma = \partial\Omega_1$ имеют вид

$$M_n^I|_{\Gamma} = 0, \quad \left(Q_n^I - \frac{\partial M_{ns}^I}{\partial s} - k^2 \frac{\partial w^I}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

$$M_n = M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2$$

$$M_{ns} = M_{12} (n_1^2 - n_2^2) + (M_{11} - M_{22}) n_1 n_2$$

$$Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2, \quad Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}, \quad Q_2 = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} n_2, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x_2} n_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} n_2$$

Выражения для моментов, полученные из вариационного принципа, совпадают с выражениями (3.1). На границах областей $\Gamma_m = \Omega_1 \cap \Omega_{2m} \quad (m = \overline{1, N})$ в качестве условий сопряжения потребуем непрерывности прогиба и угла поворота

$$w^I|_{\Gamma_m} = w^{\text{II}}|_{\Gamma_m}, \quad \frac{\partial w^I}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} = \frac{\partial w^{\text{II}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m}$$

Приравнивая коэффициенты во внеинтегральных слагаемых в вариационных уравнениях при соответствующих вариациях δw^I и δw^{II} , $\delta \delta w^I / \delta n$ и $\delta \delta w^{\text{II}} / \delta n$, получим еще два условия сопряжения.

$$M_n^I|_{\Gamma_m} = M_n^{II}|_{\Gamma_m}$$

$$\left(Q_n^I - \frac{\partial M_{ns}^I}{\partial s} - k^2 \frac{\partial w^I}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_m} = \left(Q_n^{II} - \frac{\partial M_{ns}^{II}}{\partial s} - k^2 \frac{\partial w^{II}}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_m} \quad (m = \overline{1, N})$$

Потребуем также непрерывности осредненных по толщине пластины значений электрического потенциала φ и его производной $\partial\varphi/\partial n$:

$$V|_{\Gamma_m} = V_m - \frac{1}{8} \frac{b_{11}}{a_{11}} q \Big|_{\Gamma_m}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} = -\frac{1}{8} \frac{b_{11}}{a_{11}} \frac{\partial q}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m}$$

Заметим, что каждая из систем (3.3) может быть сведена к однотипному разрешающему уравнению относительно прогиба срединной поверхности w посредством исключения потенциала V из первой системы и скачка q из второй

$$\Delta^3 w^J + \left(k^2 - \frac{\mu_J \eta_J^2}{\varepsilon^2} \right) \Delta^2 w^J - (3 + \mu_J) \frac{k^2}{\varepsilon^2} \Delta w^J + 3 \mu_J \frac{2k^2}{\varepsilon^4} w^J = 0 \quad (J = I, II)$$

$$V = -\frac{1}{2a_{11}} L_J, \quad q = \frac{4}{b_{11}} L_{II} + 2 \frac{a_{22}}{b_{22}} V_m$$

$$L_J = \frac{\varepsilon^4}{\mu_J} \left[\Delta^2 w^J + \left(k^2 - \frac{\mu_J (\eta_J - 1)}{\varepsilon^2} \right) \Delta w^J - 3 \frac{k^2}{\varepsilon^2} w^J \right] \quad (3.4)$$

$$\mu_I = \frac{5a_{22}}{2a_{21}}, \quad \mu_{II} = 10 \frac{b_{22}}{b_{21}}, \quad \eta_I = 1 + \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad \eta_{II} = 1 + \frac{1}{4} \frac{b_{11}}{b_{22}}$$

В статическом случае ($k = 0$) разрешающее уравнение (3.4) имеет вид

$$\Delta^2 \left(\Delta w^J - \frac{\lambda_J^2}{\varepsilon^2} w^J \right) = 0 \quad (J = I, II)$$

$$\lambda_I^2 = \frac{5a_{11} + a_{22}}{2a_{21}}, \quad \lambda_{II}^2 = \frac{5b_{11} + 4b_{22}}{2b_{21}} \quad (3.5)$$

$$V = \frac{\varepsilon^2}{2a_{22}} \Delta w^I - \frac{\varepsilon^4}{5a_{11}a_{22}} \Delta^2 w^I$$

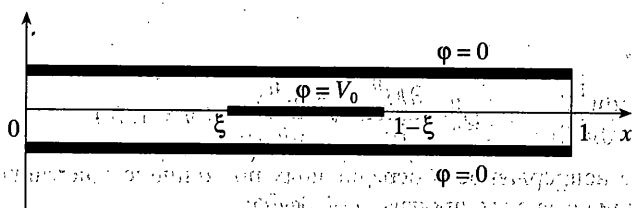
$$q = -\frac{\varepsilon^2}{b_{22}} \Delta w^{II} + \frac{2\varepsilon^4}{5b_{11}b_{22}} \Delta^2 w^{II} + 2 \frac{a_{22}}{b_{22}} V_m$$

Заметим, что в случае модели, предложенной в [8], скачок нормальной компоненты индукции постоянен и имеет следующее выражение:

$$q = -\varepsilon^2 \frac{d}{e_{33}} \Delta w^{II} + 2 \frac{\Theta c_{33}^E}{e_{33}^2} V_m$$

$$d = d_{31} / (s_{11}^E + s_{12}^E), \quad \Theta = \Theta_{33}^\sigma - 2dd_{31}$$

где s_{ij}^E – упругие податливости, d_{31} – пьезомодуль, Θ_{33}^σ – диэлектрическая проницаемость. Полученное уравнение (3.5) имеет более высокий порядок, чем классическое уравнение изгиба пластин; за счет повышения порядка и погранслоного решения удастся описать рост скачка индукции у края электрода.



Фиг. 1

4. Оптимизация электродного покрытия для ленточной пластины при статическом изгибе. Рассмотрим применение построенной модели к задаче о статическом изгибе биморфа-полосы (фиг. 1):

$$\Omega_1 = \{x : 0 \leq x \leq \xi\} \cup \{x : 1 - \xi \leq x \leq 1\}, \quad \Omega_2 = \{x : \xi \leq x \leq 1 - \xi\}, \quad 0 \leq \xi \leq 1/2$$

Исследуем прогиб биморфа в зависимости от величины электродного покрытия, в частности, выясним, когда прогиб в центре пластины максимален. В рассматриваемом случае решение уравнения (3.5) складывается из классического балочного решения, соответствующего четырехкратному нулевому собственному значению $\lambda = 0$ и погранслойных решений с показателем λ_J ($J = \text{I, II, III}$, $\lambda_{\text{I}} = \lambda_{\text{III}}$), локализованных в окрестности границ $x = 0$, $x = 1$ и краев электрода $x = \xi$, $x = 1 - \xi$:

$$w^{\text{I}}(x) = W_{11}e^{-\lambda_{\text{I}}x/\varepsilon} + W_{12}e^{-\lambda_{\text{I}}(\xi-x)/\varepsilon} + W_{13} + W_{14}x + W_{15}x^2 + W_{16}x^3, \quad x \in [0, \xi]$$

$$w^{\text{II}}(x) = W_{21}e^{-\lambda_{\text{II}}(x-\xi)/\varepsilon} + W_{22}e^{-\lambda_{\text{II}}((1-\xi)-x)/\varepsilon} + W_{23} + W_{24}x + W_{25}x^2 + W_{26}x^3, \quad x \in [\xi, 1 - \xi]$$

$$w^{\text{III}}(x) = W_{31}e^{-\lambda_{\text{I}}(x-(1-\xi))/\varepsilon} + W_{32}e^{-\lambda_{\text{I}}(1-x)/\varepsilon} + W_{33} + W_{34}x + W_{35}x^2 + W_{36}x^3, \quad x \in [1 - \xi, 1]$$

где W_{ij} – произвольные постоянные. Показатели погранслоев связаны следующим соотношением:

$$\lambda_{\text{I}}^2/\lambda_{\text{II}}^2 = P/(P + Q)$$

$$P = 1 + k_{31}^2 + k_{33}^2 - v_{13}^2 - 2v_{13}k_{31}k_{33}, \quad Q = 3(1 + k_{33}^2)(1 - v_{13}^2)$$

$$k_{31}^2 = \frac{e_{31}^2}{E S c_{11} \vartheta_{33}}, \quad k_{33}^2 = \frac{e_{33}^2}{E S c_{33} \vartheta_{33}}, \quad v_{13}^2 = \frac{(c_{33}^E)^2}{c_{11} c_{33}}$$

Из условия положительности энергии следует, что $v_{13} < 1$, поэтому числа P , Q положительны и, следовательно, $\lambda_{\text{I}} < \lambda_{\text{II}}$. Например, для пьезокерамики PZT-4 [11] $\lambda_{\text{I}} = 2.0489$, $\lambda_{\text{II}} = 3.7879$.

Проведена серия расчетов при различных условиях закрепления краев биморфа и безразмерной толщины ε [9]. Численные расчеты показали, что когда края биморфа шарнирно оперты, значение прогиба в центре биморфа достигает максимального значения, когда внутренний электрод является сплошным. Однако, когда края пластины или полосы жестко заземлены, значение прогиба в случае сплошного внутреннего электрода равно нулю (изгиб не возникает), в то время как разрезной электрод позволяет получить ненулевое значение прогиба посередине биморфа. В таблице приведены результаты численных расчетов для случая жесткого заземления при различных ε пьезо-

M	ε = 0.1		ε = 0.3		ε = 0.05	
	ξ _{max}	max w	ξ _{max}	max w	ξ _{max}	max w
1	0.2622	19.594	0.2622	4.899	0.2622	0.544
2	0.2738	19.311	0.2844	4.632	0.3083	0.352

керамики PZT-4. В таблице сопоставлены значения, полученные с помощью предложенной уточненной модели (M = 2) и модели [8] (M = 1): В каждом случае найдены значения параметра ξ (обозначим ξ_{max}), обеспечивающем максимальный прогиб max|w| в центре биморфа. Отметим, что согласно модели [8] значения ξ_{max} не зависят от ε, кроме того, для ξ_{max} удается получить аналитическое выражение:

$$\xi_{\max} = \sqrt{c_1} / (2(\sqrt{c_1} + 1))$$

$$c_1 = \frac{1 + \beta^{\text{II}}}{1 + \beta^{\text{I}}}, \quad \beta^{\text{I}} = \frac{d^2}{\Theta} s, \quad \beta^{\text{II}} = \frac{d^2}{4\Theta} s, \quad s = s_{11}^E (1 - \nu^2), \quad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$$

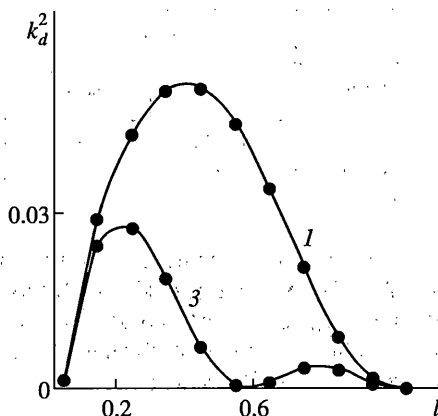
Заметим, что значение ξ_{max} зависит от материальных констант материала. Для PZT-4, например, ξ_{max} = 0.2622, при этом длина внутреннего электрода составляет около 48% длины всего биморфа.

5. Расчет динамических характеристик. На основе предложенной модели исследована задача о колебании биморфа-полосы, описанной выше конструкции. При различных значениях ξ для случае жестко зашпеленных и свободных краев найдены частоты резонанса k_r; частоты антирезонанса k_a определены из условия равенства нулю тока, проходящего через лицевой электрод x₃ = h: I = -iω ∫ D₃ ds = 0. Эффективность колебаний оценена с помощью динамического коэффициента электромеханической связи [2]:

$$k_d^2 = (k_a^2 - k_r^2) / k_a^2$$

Проведена серия численных расчетов частот резонанса k_r и антирезонанса k_a для первой и третьей мод колебаний жестко зашпеленного биморфа при ε = 0.1. При сравнении полученных результатов со значениями, найденными методом конечных элементов, расхождение составила 4–5%. На фиг. 2 представлены зависимости динамического коэффициента электромеханической связи k_d² от относительной длины электрода l = 1 - 2ξ (0 ≤ l ≤ 1) для первой и третьей мод колебаний жестко зашпеленного биморфа (число рядом с кривой соответствует номеру моды). Значения, полученные в результате численных расчетов, обозначены на фигуре точками.

6. Заключение. Предложенная модель изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с внутренними разрезными электродами учитывает характер распределения электрических полей у края электрода. Показано, что существует некоторый оптимальный размер внутреннего электрода (36–48% от величины сплошного электрода в зависимости от ε), при котором статический прогиб биморфной пластины достигает максимума. Для каждой моды колебаний возможно осуществление такого варианта разрезания внутреннего электрода, при котором эффективность возбуждения колебаний выше, чем в случае сплошного электрода. Например, наблюдается максимум k_d² при длине внутреннего электрода l, равной примерно 0.3 для первой моды и 0.15 для третьей.



Фиг. 2

Работа выполнена при частичной поддержке гранта президента Российской Федерации по поддержке ведущей научной школы (код проекта: НШ 2113.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганопольский В.В., Касаткин Б.А., Легуша Ф.Ф. и др. Пьезокерамические преобразователи: Справочник. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
3. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates // Intern. J. Solids Structures 1972. V. 8. № 7. P. 895–906.
4. Bugdaci N., Bogy D.B. A two-dimensional theory for piezoelectric layers used in electro-mechanical transducers. Part 1. Derivation // Intern. J. Solids Structures. 1981. V. 17. № 12. P. 1159–1178.
5. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 5. С. 3–8.
6. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5).
7. Ватульян А.О., Гетман И.П., Лапцкая Н.Б. Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 10. С. 101–105.
8. Ватульян А.О., Рыикова А.А. К вопросу о расчете изгибных колебаний пьезоэлектрической биморфной пластины с разрезным электродом // Дефектоскопия. 1998. № 3. С. 61–66.
9. Ватульян А.О., Рыикова А.А. Изгибные колебания пьезоэлектрического биморфа с внутренним разрезным электродом // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 1. С. 184–189.
10. Гетман И.П., Устинов Ю.А. К теории неоднородных электроупругих плит // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 923–932.
11. Аронов Б.С. Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 270 с.
12. Ватульян А.О., Рыикова А.А. Об оптимальном выборе электродного покрытия в биморфных пьезоэлементах // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. Математическое моделирование. 2001. Спецвыпуск. С. 41–43.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
2.02.2005