МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2007

УДК 539.3

© 2007 г. И.Г. ТЕРЕГУЛОВ, С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТОНКИХ УПРУГИХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБОЛОЧЕК

Изучается разрешимость геометрически и физически нелинейной краевой задачи для тонких упругих анизотропных нерегулярных оболочек с жестко заделанным краем. Для этого предлагается метод, основанный на решении задачи в некотором функциональном пространстве, отличном от пространств перемещений и усилий. Основу метода составляют интегральные представления компонент перемещения и деформаций через вспомогательные функции (условные деформации). Данный метод позволяет получить в качестве уравнений равновесия нелинейные сингулярные интегральные уравнения по ограниченной плоской области относительно условных деформаций, разрешимость которых устанавливается при помощи принципа сжатых отображений.

1. Введение. В основе большинства исследований, посвященных вопросам существования решений нелинейных краевых задач теории тонких оболочек, лежит условие регулярности материала оболочек (по терминологии И.В. Воровича), означающее положительную определенность квадратичной формы, связанной с плотностью потенциальной энергии деформации, которое позволяло изучать задачи в обобщенной постановке в различных энергетических пространствах [1]. Это же условие лежало в основе работы [2], в которой была доказана теорема разрешимости для незамкнутых непологих оболочек ненулевой гауссовой кривизны.

Целью данной работы является получение теорем разрешимости, не опираясь на условие регулярности материала оболочки. В этом случае оболочку будем называть нерегулярной. Для таких оболочек изучение задач в энергетических пространствах не представляется возможным, что связано с невозможностью построения самих пространств. Это обстоятельство приводит к необходимости отыскания решений, удовлетворяющих непосредственно уравнениям равновесия и граничным условиям. На этом пути обычно использовались методы, основанные на применении рядов Фурье и функций Грина, с помощью которых получены теоремы существования для анизотропных однородных пластин [3] и пологих изотропных оболочек [4]. В [5] для исследования геометрически и физически нелинейной задачи для пологих анизотропных свободных оболочек был предложен новый подход, основанный на сведении задачи к системе сингулярных нелинейных интегральных уравнений относительно вспомогательных функций. В публикуемой работе метод работы [5] развивается на случай произвольных тонких упругих нерегулярных оболочек с жестко заделанным краем.

2. Постановка задачи. В основу исследований положим следующие соотношения нелинейной теории тонких оболочек:

1°) соотношения деформации – перемещения в рамках гипотез Кирхгофа – Лява (см., например, [1]):

$$\varepsilon_{jj}^0 \equiv \gamma_{jj}^0 = w_{j\alpha^j} - G_{jj}^k w_k - B_{jj} w_3 + \omega_j^2/2 \ (j = 1, 2)$$

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon_{12}^{0} \equiv \gamma_{12}^{0} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{k} w_k - 2B_{12} w_3 + \omega_1\omega_2 \\
&\varepsilon_{jj}^{1} \equiv \gamma_{jj}^{1} = -\omega_{j\alpha^j} + G_{jj}^{k}\omega_k \ (j = 1, 2) \\
&2\varepsilon_{12}^{1} \equiv \gamma_{12}^{1} = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G_{12}^{k}\omega_k
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\omega_j = w_{3\alpha^j} + B_j^k w_k$ (по k ведется суммирование от 1 до 2, по j суммирования нет); ε_{ij}^{0} и ε_{ij}^{1} – компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0 оболочки; B_{ij} и B_i^j – составляющие тензора кривизны S_0; G_{ij}^{k} – символы Кристоффеля второго рода; w_k и w_3 – тангенциальные и нормальные перемещения точек S_0; α^1, α^2 – декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с границей Γ, гомеоморфной S_0;

2°) определяющие соотношения для нелинейно упругих анизотропных оболочек:

$$
\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma_{*}^{\lambda\mu} \equiv \sigma_{\tau}^{\lambda\mu} - \sigma_{*}^{\lambda\mu}, \quad \lambda \le \mu; \quad q \le s; \quad \lambda, \mu, q, s = 1, 2 \tag{2.2}
$$

где $B^{\lambda\mu qs}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ – упругие характеристики оболочки, $\gamma_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu}^{0} + \alpha^3\gamma_{\lambda\mu}^{1}$, $\sigma_{\tau}^{\lambda\mu}$ и $\sigma_{*}^{\lambda\mu}$ – линейная и нелинейная части напряжения $\sigma^{\lambda\mu}$;

3°) край оболочки жестко заделан:

$$
w_j = \tilde{w}_j \ (j = \overline{1, 4}) \ \text{ на } \Gamma, \quad w_4 = \partial w_3/\partial m \tag{2.3}
$$

где m – нормаль к Γ, $\tilde{w}_j$ – заданные функции;

4°) на оболочку действуют массовые $F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и поверхностные $\mathbf{F}^{\pm}(\alpha^1, \alpha^2)$ силы.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(*1*) S_0 – кусочно-гладкая поверхность, составленная из конечного числа поверхностей класса C^3;

(*2*) Ω – соболевская область, одновременно принадлежащая классам (2, 1, 2) и (2, 2, 2) [6];

(*3*) Γ – кусочно-гладкая кривая класса C^1;

(*4*) упругие характеристики $D_k^{\lambda\mu qs} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}(\alpha^3)^k d\alpha^3$ ($k = 0, 1, 2$) ограничены в $\overline{\Omega}$, $2h$ – толщина оболочки;

(*5*) нелинейная часть $\sigma_{*}^{\lambda\mu}$ напряжения как функция компонент деформации удовлетворяет условию Липшица при $|\gamma_k| \le r_*$ (r_* – некоторое число):

$$
\left|\sigma_{*}^{\lambda\mu}(\gamma_1) - \sigma_{*}^{\lambda\mu}(\gamma_2)\right| \le \sigma_*(r_*)\left(\left|\gamma_{1,11} - \gamma_{2,11}\right| + \left|\gamma_{1,12} - \gamma_{2,12}\right| + \left|\gamma_{1,22} - \gamma_{2,22}\right|\right)
$$

$$
\lambda, \mu = 1, 2; \quad \gamma_k = (\gamma_{k,11}, \gamma_{k,12}, \gamma_{k,22})
$$

почти для всех точек оболочки, при этом постоянная Липшица $\sigma_*(r_*)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{r_* \to 0} \sigma_*(r_*) = 0$;

(*6*) $\mathbf{F} \in L_2(\overline{\Omega}) \times L_1[-h, h]$, $\mathbf{F}^{\pm} \in L_2(\overline{\Omega})$

(7) граничные перемещения $\tilde{w}_j$ $(j = \overline{1,4})$ являются допустимыми; т.е. продолжимы внутрь Ω как функции из соболевских пространств $W_2^{(1)}(\overline{\Omega})$, $W_2^{(2)}(\overline{\Omega})$.

3. Основные соотношения. Функциональные пространства. Основу предложенного метода исследования составляют интегральные представления для перемещений, удовлетворяющих граничным условиям (2.3). Перейдем к их выводу. Пусть $D(\overline{\Omega})$ есть пространство перемещений $w = (w_1, w_2, w_3)$ класса w_i, $w_{3\alpha^i} \in C(\overline{\Omega})$, $w_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (2.3). Каждому вектору перемещения w из $D(\overline{\Omega})$ по формулам

$$\varepsilon_1 = w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2}, \quad \varepsilon_2 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad \varepsilon_3 = -w_{3\alpha^1\alpha^1} - w_{3\alpha^2\alpha^2} \tag{3.1}$$

поставим в соответствие вектор-функцию $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Множество векторов ε обозначим через $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$. Оно является линейным пространством и его элементы ε_j принадлежат $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$.

Нетрудно видеть, что функции ε_j $(j = \overline{1,3})$ представляют собой линейные комбинации некоторых компонент линейной деформации пластин. В силу этого далее назовем их условными деформациями.

Введем в рассмотрение комплексные функции

$$W_1(z) = -w_{3\alpha^1} + iw_{3\alpha^2}, \quad W_2(z) = w_1 + iw_2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2 \tag{3.2}$$

Тогда соотношения (3.1) можно представить в комплексной форме

$$\begin{gathered} W_{jz} = f_j/2 \ (j = 1, 2) \\ f_1 = \varepsilon_3, \quad f_2 \equiv \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \quad W_{j\bar{z}} = (W_{j\alpha^1} + iW_{j\alpha^2})/2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Однородные граничные условия (2.3) примут вид

$$W_j(z) = 0 \text{ на } \Gamma \ (j = 1, 2) \tag{3.4}$$

Используя форму (6.10) из [7, с. 42] и учитывая (3.3), (3.4), для комплексных перемещений $W_j(z)$ будем иметь следующие представления через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$\begin{gathered} W_j(z) = (Tf_j)(z)/2 \ (j = 1, 2) \\ Tf = (-1/\pi)\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)/(\zeta - z)\,d\xi\,d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta \end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда для компонент вектора перемещения w, удовлетворяющих граничным условиям (2.3), получим

$$\begin{gathered} w_1 = \mathring{w}_1 + \operatorname{Re}T\varepsilon_0/2, \quad w_2 = \mathring{w}_2 + \operatorname{Im}T\varepsilon_0/2, \quad w_3 = \mathring{w}_3 + \tilde{T}\varepsilon_3/2 \\ \tilde{T}f \equiv (-T\overline{Tf})/2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

$\mathring{w} = (\mathring{w}_1, \mathring{w}_2, \mathring{w}_3)$ – некоторая функция, удовлетворяющая граничному условию (2.3), существование которой вытекает из условия 7) п. 2.

Компоненты деформации также выразим через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$. С этой целью при помощи формул [7, с. 34, 36]:

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = (-1/\pi)\iint_\Omega f(\zeta)/(\zeta - z)^2 d\xi d\eta$$

найдем производные по z, $\bar{z}$ функций $W_j(z)$, представленных в виде (3.5), затем через них $w_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}$ и подставим их вместе с (3.6) в соотношения (2.1). После несложных преобразований для компонент деформаций получим следующие представления через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$\gamma^k_{\lambda\mu} \equiv \gamma^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) = e^k_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j)1^j\big|_{j=\overline{1,3}} + \chi^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) + \tilde{\gamma}^k_{\lambda\mu}, \quad k = 0, 1; \quad \lambda, \mu = 1, 2 \tag{3.7}$$

$$e^k_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j) = a^k_{j,\lambda\mu}\cdot\varepsilon_j + \mathrm{Re}(b^k_{j,\lambda\mu}S\varepsilon_j) + \tilde{e}^k_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j)$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{e}^k_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j) = \mathrm{Re}(c^k_{j,\lambda\mu}T\varepsilon_j) + d^k_{j,\lambda\mu}\tilde{T}\varepsilon_j, \quad k = 0, 1; \quad j = \overline{1,3}; \quad \lambda, \mu = 1, 2\\ &\chi^0_{jj} = \omega_j^2(\varepsilon)/2, \quad \chi^0_{12} = \omega_1(\varepsilon)\omega_2(\varepsilon), \quad \chi^1_{ij} \equiv 0\end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

$$\omega_j(\varepsilon) = \mathrm{Re}\big\lfloor(-1/2)i^{j-1}T\varepsilon_3 + (B^1_j - iB^2_j)T\varepsilon_0/2\big\rfloor, \quad \tilde{\gamma}^k_{ij} \equiv \gamma^k_{ij}(\mathring{w})\ (i, j = 1, 2)$$

где $a^k_{j,\lambda\mu}$, $b^k_{j,\lambda\mu}$, $c^k_{j,\lambda\mu}$, $d^k_{j,\lambda\mu}$ – известные функции, зависящие от G^k_{ij}, B_{ij}, $\mathring{w}$.

Используя (2.2), (3.6), (3.7), вариацию потенциальной энергии деформации U, накопленной во всем объеме оболочки, и элементарную работу δA внешних сил также выразим через условные деформации $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$\delta U = \iint_\Omega [T^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon) + M^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)]Dd\alpha^1 da^2 \tag{3.9}$$

$$\delta A \equiv A(\delta\varepsilon) = 1/2\mathrm{Re}\iint_\Omega [(R^1 - iR^2)T\delta\varepsilon_0 - R^3\tilde{T}\delta\varepsilon_3 + (L^1 + iL^2)T\delta\varepsilon_3]d\Omega \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&T^{\lambda\mu}(\varepsilon) = \int_{-h}^{h}\sigma^{\lambda\mu}d\alpha^3 = D_0^{\lambda\mu qs}\gamma^0_{qs}(\varepsilon) + D_1^{\lambda\mu qs}\gamma^1_{qs}(\varepsilon) - \sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\\ &M^{\lambda\mu}(\varepsilon) = \int_{-h}^{h}\sigma^{\lambda\mu}\alpha^3 d\alpha^3 = D_1^{\lambda\mu qs}\gamma^0_{qs}(\varepsilon) + D_2^{\lambda\mu qs}\gamma^1_{qs}(\varepsilon) - \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\\ &\sigma_k^{\lambda\mu} = \int_{-h}^{h}\sigma_*^{\lambda\mu}(\alpha^3)^{k-1}d\alpha^3\ (k = 1, 2)\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\gamma^k_{\sigma,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon) \equiv \delta\gamma^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) = e^k_{j,\lambda\mu}(\delta\varepsilon_j)1^j\big|_{j=\overline{1,3}} + \chi^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)$$

$$\chi^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon) = \chi^0_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon_j)1^j\big|_{j=\overline{1,3}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{\chi}_{j\delta,\lambda\lambda}(\varepsilon;\delta\varepsilon_j) = \omega_\lambda(\varepsilon)\omega_{j,\lambda}(\delta\varepsilon_j)\ (\lambda = 1, 2)\\
&\overset{0}{\chi}_{j\delta,12}(\varepsilon;\delta\varepsilon_j) = \omega_1(\varepsilon)\omega_{j,2}(\delta\varepsilon_j) + \omega_2(\varepsilon)\omega_{j,1}(\delta\varepsilon_j)\ (j = \overline{1,3})
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\omega_{j,\lambda}(\varepsilon_j) = 1/2\mathrm{Re}(i^{j-1}(B_j^1 - iB_j^2)T\varepsilon_j)\ (j = 1, 2)$$

$$\omega_{3,\lambda}(\varepsilon_3) = -1/2\mathrm{Re}(i^{\lambda-1}T\varepsilon_3)\ (\lambda = 1, 2)$$

Здесь и далее используется условное обозначение суммирования $a_j 1^j|_{j=1,2} = \sum\limits_{j=1}^{2} a_j$.

Введем основное функциональное пространство. Через $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ обозначим замыкание $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ в норме $\|\varepsilon\|^2_{\tilde{L}_2} = \iint\limits_{\Omega}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)d\alpha^1 d\alpha^2$. Очевидно, $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ – подпространство гильбертова пространства $L_2(\overline{\Omega})$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\varepsilon \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Тогда правые части формул (3.6) определяют перемещения w_j, $w_{3\alpha^j} \in L_q(\overline{\Omega})$, $q \geq 1$, $j = 1, 2$, $w_3 \in C(\overline{\Omega})$, почти всюду удовлетворяющие граничным условиям (2.3).

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Тогда существует последовательность $\varepsilon^n \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ такая, что $\|\varepsilon^n - \varepsilon\|_{\tilde{L}_2} \to 0$, $n \to \infty$. Функции $W_j^n = Tf_j^n/2$, $n = 1, 2\ldots$ по формулам (3.2) определяют перемещения $w^n \in D(\overline{\Omega})$. С другой стороны, в силу известных свойств оператора Tf [7, с. 39, 46] имеем $\|W_j - W_j^n\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$, $\|w_3 - w_3^n\|_{C(\Gamma)} \to 0$, $n \to \infty$, откуда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. 1) $\tilde{e}_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j)$ и $\overset{0}{\chi}_{\lambda\mu}(\varepsilon)$ – вполне непрерывные соответственно линейные и нелинейные операторы из $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ в $L_p(\overline{\Omega})$ $\forall p \geq 1$, причем $\|\tilde{e}_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j)\|_{L_p} \leq c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}$, $\|\overset{0}{\chi}_{\lambda\mu}(\varepsilon^1) - \overset{0}{\chi}_{\lambda\mu}(\varepsilon^2)\|_{L_p} \leq c(\|\varepsilon^1\|_{\tilde{L}_2} + \|\varepsilon^2\|_{\tilde{L}_2})\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{\tilde{L}_2}$ $\forall \varepsilon^j \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$, $j = 1, 2$;

2) $\overset{0}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; f)$ по каждому аргументу – линейные усиленно непрерывные операторы из $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ в $L_p(\overline{\Omega})$ $\forall p \geq 1$, причем $\|\overset{0}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; f)\|_{L_p} \leq c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}\|f\|_{\tilde{L}_2}$, $j = \overline{1,3}$; $\lambda, \mu = 1, 2$;

3) $e^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)$ $(k = 0, 1;\ \lambda, \mu = 1, 2)$ – линейные ограниченные операторы из $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ в $L_2(\overline{\Omega})$, причем $\|e^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2} \leq c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}$.

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из формул (3.8), (3.12) с учетом вполне непрерывности оператора Tf, ограниченности Sf [7, с. 39, 46, 67], кусочной непрерывности функций $a^k_{j,\lambda\mu}$, $b^k_{j,\lambda\mu}$ и $c^k_{j,\lambda\mu} \in L_p(\overline{\Omega})$, $p \geq 1$.

4. Обобщенное решение задачи. Вывод уравнений равновесия. *Определение.* Обобщенным решением задачи равновесия для тонких нерегулярных оболочек назовем вектор-деформацию $\varepsilon \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\iint\limits_{\Omega}[T^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\varphi)+M^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\varphi)]Dd\alpha^1d\alpha^2-A(\varphi)=0 \tag{4.1}$$

для любой вектор-деформации $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Здесь $A(\varphi)$, $T^{\lambda\mu}(\varepsilon)$, $M^{\lambda\mu}(\varepsilon)$ задаются формулами (3.10), (3.11).

В основе введения понятия обобщенного решения лежит вариационный принцип Лагранжа. Действительно, если в (4.1) положить $\varphi=\delta\varepsilon$ и учесть (3.9), (3.10), то сразу получим $\delta U=\delta A$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1) – 7) п. 2. Тогда слагаемые в (4.1) имеют смысл и представляют собой линейные ограниченные функционалы в $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ относительно $\varphi\in\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ при фиксированном $\varepsilon\in\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$.

Для доказательства заметим, что в силу леммы 2 и условия 5) п. 2 $T^{\lambda\mu}$, $M^{\lambda\mu}$, $\gamma^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\varphi)\in L_2(\overline{\Omega})$ и $\|\gamma^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\varphi)\|_{L_2}\le c(1+\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2})\|\varphi\|_{\tilde{L}_2}$. Кроме того, с учетом R^j, $L^i\in L_2(\overline{\Omega})$ из (3.10) будем иметь

$$|A(\varphi)|\le c(\|R^j\|_{L_2}1_j|_{j=\overline{1,3}}+\|L^i\|_{L_2}1_i|_{i=1,2})\|\varphi\|_{\tilde{L}_2}$$

Если теперь применить к интегралам в (4.1) неравенство Гельдера, то придем к справедливости леммы 3.

Интегральное соотношение (4.1) сведем к эквивалентной системе уравнений относительно $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Для этого понадобятся некоторые сопряженные операторы относительно гильбертовой метрики $(f,g)_{L_2}=\iint\limits_{\Omega}f\,gd\alpha^1d\alpha^2$ (f, g – вещественные функции). Легко видеть, что

$$T^*f=-Tf,\quad \tilde{T}^*f=\overline{\tilde{T}f},\quad S^*f=Sf \tag{4.2}$$

Действительно, пусть $f,g\in L_2(\overline{\Omega})$. Тогда

$$(g,Tf)_{L_2}=-\iint\limits_{\Omega}g(z)d\alpha^1d\alpha^2\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta=\iint\limits_{\Omega}f(\zeta)d\xi d\eta\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{g(z)}{z-\zeta}d\alpha^1d\alpha^2=(-Tg,f)_{L_2}$$

Остальные два соотношения в (4.2) показываются аналогично.

С помощью (4.2) получим представления для следующих сопряженных операторов:

$$e^{k*}_{j,\lambda\mu}(f)=a^k_{j,\lambda\mu}f+\mathrm{Re}S(b^k_{j,\lambda\mu}f)+\tilde{e}^{k*}_{j,\lambda\mu}(f)$$

$$\tilde{e}^{k*}_{j,\lambda\mu}(f)=-\mathrm{Re}T(c^k_{j,\lambda\mu}f)+\tilde{T}(d^k_{j,\lambda\mu}f)$$

$$\begin{aligned}&\chi^{0*}_{j\delta,kk}(\varepsilon;f)=-\mathrm{Re}[i^{j-1}T(\beta_k\omega_k(\varepsilon)f)]\\&\chi^{0*}_{j\delta,12}(\varepsilon;f)=-\mathrm{Re}\{i^{j-1}[T(\beta_2\omega_1(\varepsilon)f)+T(\beta_1\omega_2(\varepsilon)f)]\}\ (j=1,2)\\&\chi^{0*}_{3\delta,kk}(\varepsilon;f)=\mathrm{Re}\lfloor i^{k-1}T(\omega_k(\varepsilon)f)\rfloor/2\ (k=1,2)\\&\chi^{0*}_{3\delta,12}(\varepsilon;f)=\mathrm{Re}T[(i\omega_1(\varepsilon)+\omega_2(\varepsilon))f]/2,\quad \beta_j=B^1_j-iB^2_j\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $\overset{k*}{e}_{j,\lambda\mu}(f)$, $\overset{\sim k*}{e}_{j,\lambda\mu}(f)$, $\overset{0*}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; f)$ – операторы, сопряженные к $\overset{k}{e}_{j,\lambda\mu}(f)$, $\overset{\sim k}{e}_{j,\lambda\mu}(f)$, $\overset{0}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; f)$. В дальнейшем эти операторы понадобятся в $L_2(\overline{\Omega})$. Из (4.3) видно, что $\overset{\sim k*}{e}_{j,\lambda\mu}(f)$, $\overset{0*}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; f)$ – вполне непрерывные операторы в $L_2(\overline{\Omega})$, причем

$$\left\|\overset{\sim k*}{e}_{j,\lambda\mu}(f)\right\|_{L_2} \le c\|f\|_{L_2}, \quad \left\|\overset{0*}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; f)\right\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}\|f\|_{L_2} \quad (k = 0, 1;\ j = \overline{1,3};\ \lambda, \mu = 1, 2)$$

Рассмотрим первое слагаемое левой части (4.1). Принимая во внимание, что $\overset{0}{\gamma}_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi) = (\overset{0}{e}_{j,\lambda\mu}(\varphi_j) + \overset{0}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi_j))1^j|_{j=\overline{1,3}}$, получим

$$\iint_{\Omega} T^{\lambda\mu}(\varepsilon)\overset{0}{\gamma}_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi)Dd\alpha^1 d\alpha^2 \equiv (DT^{\lambda\mu}(\varepsilon), \overset{0}{\gamma}_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; \varphi))_{L_2} =$$

$$= [(\overset{0*}{e}_{j,\lambda\mu}(DT^{\lambda\mu}), \varphi_j)_{L_2} + (\overset{0*}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; DT^{\lambda\mu}), \varphi_j)_{L_2}]1^j|_{j=\overline{1,3}}$$

Аналогично поступая с остальными слагаемыми в (4.1), после несложных преобразований для интегрального соотношения (4.1) приходим к представлению

$$(a_{jk}\varepsilon_k 1^k|_{k=\overline{1,3}} + G_{1,j}(\varepsilon) + G_{2,j}(\varepsilon) + G_{*,j}(\varepsilon) - \varepsilon_j^{\text{н}}, \varphi_j)_{\tilde{L}_2} 1^j|_{j=\overline{1,3}} = 0$$

откуда в силу произвольности $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ будем иметь

$$a_{j1}\varepsilon_1 + a_{j2}\varepsilon_2 + a_{j3}\varepsilon_3 + G_{1,j}(\varepsilon) + G_{2,j}(\varepsilon) + G_{*,j}(\varepsilon) = \varepsilon_j^{\text{н}} \quad (j = \overline{1,3}) \tag{4.4}$$

$$G_{1,j}(\varepsilon) = \operatorname{Re}\Big\{k(a_j; b_k)S\varepsilon_k + S(k(b_j; a_k)\varepsilon_k) +$$

$$+ S[(\overset{0}{b}_{jk} + \overset{1}{b}_{jk})S\varepsilon_k] + S[(\overset{\sim n}{b}_{jk}(\zeta) - \overset{\sim n}{b}_{jk}(z))1_n|_{n=0,1}\bar{S}\varepsilon_k]\Big\}1^k|_{k=\overline{1,3}}$$

$$G_{2,j}(\varepsilon) = D(\overset{0}{a}_{j,\lambda\mu}T_\tau^{\lambda\mu}(\tilde{e}) + \overset{1}{a}_{j,\lambda\mu}M_\tau^{\lambda\mu}(\tilde{e})) +$$

$$+ \operatorname{Re}S[D(\overset{0}{b}_{j,\lambda\mu}T_\tau^{\lambda\mu}(\tilde{e}) + \overset{1}{b}_{j,\lambda\mu}M_\tau^{\lambda\mu}(\tilde{e}))] + \overset{\sim 0*}{e}_{j,\lambda\mu}(DT_\tau^{\lambda\mu}(e)) + \overset{\sim 1*}{e}_{j,\lambda\mu}(DM_\tau^{\lambda\mu}(e)) \tag{4.5}$$

$$G_{*,j}(\varepsilon) = \overset{0*}{e}_{j,\lambda\mu}(DT_*^{\lambda\mu}(\varepsilon)) + \overset{1*}{e}_{j,\lambda\mu}(DM_*^{\lambda\mu}(\varepsilon)) + \overset{0*}{\chi}_{j\delta,\lambda\mu}(\varepsilon; DT^{\lambda\mu}(\varepsilon))$$

$$\varepsilon_j^{\text{н}} = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{i^{j-1}T[D(R^1 - iR^2)]\} \quad (j = 1, 2)$$

$$\varepsilon_3^{\text{н}} = -\operatorname{Re}\{\tilde{T}(DR^3) + T[D(L^1 + iL^2)]\}$$

где ε_j^n, ε_3^n – нагрузочные члены; $k(a_j; b_k)$, $\overset{k}{a}_{ij}$, $\overset{k}{b}_{ij}$, $\overset{\sim k}{b}_{ij}$ – известные функции; $T_\tau^{\lambda\mu}$, $M_\tau^{\lambda\mu}$ и $T_*^{\lambda\mu}$, $M_*^{\lambda\mu}$ – соответственно линейные и нелинейные части выражений $T^{\lambda\mu}$, $M^{\lambda\mu}$, определенных формулами (3.11); a_k, b_k, $\tilde{e}$ – шестимерные векторы с компонентами $\overset{n}{a}_{k,\lambda\mu}$, $\overset{n}{b}_{k,\lambda\mu}$, $\overset{\sim n}{e}_{\lambda\mu}$, $n = 0, 1, \lambda, \mu = 1, 2$; $\overset{\sim n}{e}_{\lambda\mu} = \overset{\sim n}{e}_{j,\lambda\mu}(\varepsilon_j)1^j|_{j=\overline{1,3}}$.

Уравнения (4.4) являются уравнениями равновесия оболочки и представляют собой систему нелинейных сингулярных интегральных уравнений по области Ω относительно $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Таким образом, задача нахождения обобщенного решения задачи равновесия свелась к решению эквивалентной системы (4.4) в пространстве $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ условных деформаций.

5. Исследование разрешимости системы (4.4). При помощи матриц $A = (a_{jk})$, $G_1(\varepsilon) = (G_{1,1}, G_{1,2}, G_{1,3})^T$, $G_2(\varepsilon) = (G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3})^T$, $G_*(\varepsilon) = (G_{*,1}, G_{*,2}, G_{*,3})^T$ (знак T сверху означает транспонирование) систему (4.4) представим в матричной форме

$$\begin{aligned} &A\varepsilon + G_1(\varepsilon) + G_2(\varepsilon) + G_*(\varepsilon) = \varepsilon^{\text{н}} \\ &\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T, \quad \varepsilon^{\text{н}} = (\varepsilon_1^{\text{н}}, \varepsilon_2^{\text{н}}, \varepsilon_3^{\text{н}})^T \end{aligned} \tag{5.1}$$

Предположим, что в $\overline{\Omega}$:

$$\det A \neq 0 \tag{5.2}$$

Тогда (5.1) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} &\varepsilon + \tilde{G}_1(\varepsilon) + \tilde{G}_2(\varepsilon) + \tilde{G}_*(\varepsilon) = \tilde{\varepsilon}^{\text{н}} \\ &\tilde{G}_1(\varepsilon) = A^{-1}G_1(\varepsilon), \quad \tilde{G}_2(\varepsilon) = A^{-1}G_2(\varepsilon), \quad \tilde{G}_*(\varepsilon) = A^{-1}G_*(\varepsilon), \quad \tilde{\varepsilon}^{\text{н}} = A^{-1}\varepsilon^{\text{н}} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) – 7) п. 2. Тогда

1) $G_{1,j}(\varepsilon)$ и $G_{2,j}(\varepsilon)$ – линейные соответственно ограниченные и вполне непрерывные операторы в $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$, причем

$$\|G_{1,j}(\varepsilon)\|_{\tilde{L}_2} \le q_{0,jk}\|\varepsilon_k\|_{\tilde{L}_2}\big|_{k=\overline{1,3}}, \quad \|G_{2,j}(\varepsilon)\|_{\tilde{L}_2} \le c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}, \quad \|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2} = \|\varepsilon_k\|_{\tilde{L}_2}1^k\big|_{k=\overline{1,3}}$$

$$q_{0,jk} = \left[\|k(a_j;\, b_k)\|_C + \|k(b_j;\, a_k)\|_C + \left\|b_{jk}^0 + b_{jk}^1\right\|_C + \sup_{z,\zeta\in\overline{\Omega}}\left|\tilde{b}_{jk}^n(\zeta) - \tilde{b}_{jk}^n(z)\right|1_n\big|_{n=0,1}\right],$$

2) $G_{*,j}(\varepsilon)$ – нелинейные ограниченные операторы в $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$, причем для любых ε^j $(j = 1, 2) \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$, принадлежащих шару $\|\varepsilon^j\|_{\tilde{L}_2} < r$, справедливы оценки $\|G_{*,j}(\varepsilon^1) - G_{*,j}(\varepsilon^2)\|_{\tilde{L}_2} \le q_{0*,j}\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{\tilde{L}_2}$, $q_{0*,j} = c[\sigma_*(r_*) + (r + r^2 + r_*)(1 + \sigma_*(r_*))]$, $r_* = r + r^2 + \|\tilde{\gamma}\|_{L_2}$, $\|\tilde{\gamma}\|_{L_2} = \left\|\tilde{\gamma}_{qs}^n\right\|_{L_2}1_n^{qs}$.

Справедливость теоремы 1 непосредственно вытекает из формул (4.5) с учетом (4.3) и леммы 2.

Используя теорему 1, для компонент $\tilde{G}_{1,j}(\varepsilon)$, $\tilde{G}_{2,j}(\varepsilon)$, $\tilde{G}_{*,j}(\varepsilon)$ матричных операторов $\tilde{G}_1(\varepsilon)$, $\tilde{G}_2(\varepsilon)$, $\tilde{G}_*(\varepsilon)$ будем иметь следующие оценки:

$$\|\tilde{G}_{1,j}(\varepsilon)\|_{\tilde{L}_2} \le \tilde{q}_{0,jk}\|\varepsilon_k\|_{\tilde{L}_2}\big|_{k=\overline{1,3}}, \quad \|\tilde{G}_{2,j}(\varepsilon)\|_{\tilde{L}_2} \le c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}$$

$$\left\|\tilde{G}_{*,j}(\varepsilon^1) - \tilde{G}_{*,j}(\varepsilon^2)\right\|_{\tilde{L}_2} \le \tilde{q}_{0*,j}\left\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\right\|_{\tilde{L}_2} \ (j = \overline{1,3})$$

$$\tilde{q}_{0,\,jk} = \|\tilde{a}_{jn}\|_C q_{0,\,nk}\big|_{n = \overline{1,3}}, \quad \tilde{q}_{0*,\,j} = \|\tilde{a}_{jk}\|_C q_{0*,\,k}\big|_{k = \overline{1,3}}$$

где $\tilde{a}_{jk}$ – элементы обратной матрицы A^{-1}.

Тогда для операторов $\tilde{G}_1(\varepsilon)$, $\tilde{G}_2(\varepsilon)$, $\tilde{G}_*(\varepsilon)$ получим

$$\begin{gathered}\|\tilde{G}_1(\varepsilon)\|_{\tilde{L}_2} \le \tilde{q}_{0s}\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2}, \quad \|\tilde{G}_2(\varepsilon)\|_{\tilde{L}_2} \le c\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2} \\ \|\tilde{G}_*(\varepsilon^1) - \tilde{G}_*(\varepsilon^2)\|_{\tilde{L}_2} \le \tilde{q}_{0*}\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{\tilde{L}_2} \\ \tilde{q}_{0s} = \max_{1 \le k \le 3}(\tilde{q}_{0,\,1k} + \tilde{q}_{0,\,2k} + \tilde{q}_{0,\,3k}), \quad \tilde{q}_{0*} = \tilde{q}_{0*,\,k}1^k\big|_{k = \overline{1,3}}\end{gathered} \tag{5.4}$$

Предположим, что выполнено условие

$$\tilde{q}_{0s} < 1 \tag{5.5}$$

Тогда линейный оператор $\tilde{G}_1(\varepsilon)$ является сжимающим. Следовательно, существует обратный оператор $(I + \tilde{G}_1)^{-1}$, применяя который к обеим частям уравнения (5.3), приходим к эквивалентному уравнению

$$\begin{gathered}\varepsilon + K_{oc}(\varepsilon) + K_{0*}(\varepsilon) = h_0 \\ K_{oc}(\varepsilon) = (I + \tilde{G}_1)^{-1}\tilde{G}_2(\varepsilon), \quad K_{0*}(\varepsilon) = (I + \tilde{G}_1)^{-1}\tilde{G}_*(\varepsilon), \quad h_0 = (I + \tilde{G}_1)^{-1}\tilde{\varepsilon}^{\text{н}}\end{gathered} \tag{5.6}$$

Заметим, что $K_{oc}(\varepsilon)$ – линейный вполне непрерывный, а $K_{0*}(\varepsilon)$ – нелинейный ограниченный операторы в $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$.

Отметим, что условия (5.2), (5.5) представляют собой ограничения на физико-геометрические характеристики оболочки. Например, в случае изотропной однородной части сферической оболочки эти условия соответственно примут вид $3 - \nu \ne 0$, $2.2(1 + \nu)/(3 - \nu) < 1$, где ν – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon + K_{oc}(\varepsilon) = 0 \tag{5.7}$$

и покажем, что оно имеет лишь тривиальное решение в $\tilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Пусть $\varepsilon^0 \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$ есть ненулевое решение уравнения (5.7). Тогда ε^0 будет удовлетворять и интегральному соотношению

$$\iint_{\Omega}[T_{\tau}^{\lambda\mu}(e(\varepsilon^0))\overset{0}{e}_{\lambda\mu}(\varphi) + M_{\tau}^{\lambda\mu}(e(\varepsilon^0))\overset{1}{e}_{\lambda\mu}(\varphi)]d\Omega = 0 \tag{5.8}$$

при любом $\varphi \in \tilde{L}_2(\overline{\Omega})$.

При $\varphi = \varepsilon^0$ левая часть равенства (5.8) есть удвоенное выражение потенциальной энергии линейной деформации $\overset{k}{e}_{\lambda\mu}(\varepsilon^0)$. Поэтому из (5.8) получим

$$\overset{k}{e}_{\lambda\mu}(\varepsilon^0) = 0 \quad (k = 0, 1;\ \lambda, \mu = 1, 2) \tag{5.9}$$

С другой стороны, решение ε^0 уравнения (5.7) по формулам (3.5) определяет вектор $w = (w_1, w_2, w_3)$ перемещения, удовлетворяющего почти всюду однородным граничным условиям (2.3), с помощью которого система равенств (5.9) примет вид

$$
\begin{aligned}
& w_{j\alpha^j} - G^k_{jj}w_k - B_{jj}w_3 = 0 \ (j = 1, 2) \\
& w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^k_{12}w_k = 0 \\
& \omega_{j\alpha^j} - G^k_{jj}\omega_k = 0 \ (j = 1, 2) \\
& \omega_{1\alpha^2} + \omega_{2\alpha^1} - 2G^k_{12}\omega_k = 0 \\
& \omega_j = w_{3\alpha^j} + B^k_j w_k \ (j = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

В (5.10) из четвертого равенства вычтем пятое и разность прибавим к шестому, умноженному на мнимую единицу i. Полученное таким образом равенство при помощи комплексной функции $\omega(z) = \omega_1 + i\omega_2$ запишется в виде $\omega_{\bar z} + A\omega + B\bar\omega = 0$ (A, B – известные функции), т.е. $\omega(z)$ – обобщенная аналитическая функция в Ω. В силу леммы 1 w_j, $w_{3\alpha^j} \in L_p(\bar\Omega)$, $\forall p \ge 1$. Тогда из (5.10) вытекает, что $w_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\bar\Omega)$ $\forall p \ge 1$. Если теперь принять во внимание теоремы вложения для соболевских пространств [6], то получим w_i, $w_{3\alpha^i} \in C(\bar\Omega)$, следовательно, $\omega(z)$ в $\bar\Omega$ есть непрерывная функция и поточечно удовлетворяет на Γ условию $\omega = 0$. Тогда на основании теоремы единственности для обобщенных аналитических функций [7, с. 123] заключаем, что $\omega(z) \equiv 0$ в $\bar\Omega$, т.е.

$$w_{3\alpha^j} \equiv -B^k_j w_k \ (j = 1, 2) \tag{5.11}$$

Далее воспользуемся схемой рассуждений из [1, с. 89–91]. В области Ω вблизи границы Γ возьмем точку $A(\alpha^1, \alpha^2)$ и из нее проведем прямые, параллельные осям α^j, до пересечения с границей Γ. Пусть B и C – точки пересечения с Γ. Полученный криволинейный треугольник ABC обозначим буквой Δ. Если теперь первые два равенства в (5.10) интегрировать по сторонам AB и AC, то для суммы норм тангенциальных перемещений будем иметь оценку:

$$\|w_1\|_{C(\bar\Delta)} + \|w_2\|_{C(\bar\Delta)} \le c\,\mathrm{diam}\Delta(\|w_1\|_{C(\bar\Delta)} + \|w_2\|_{C(\bar\Delta)} + \|w_3\|_{C(\bar\Delta)}) \tag{5.12}$$

где $\mathrm{diam}\Delta$ – диаметр треугольника Δ.

Аналогично поступая с (5.11), получим

$$\|w_3\|_{C(\bar\Delta)} \le c\,\mathrm{diam}\Delta(\|w_1\|_{C(\bar\Delta)} + \|w_2\|_{C(\bar\Delta)}) \tag{5.13}$$

Используя неравенства (5.12), (5.13), будем иметь

$$\|w_1\|_{C(\bar\Delta)} + \|w_2\|_{C(\bar\Delta)} \le c\,\mathrm{diam}\Delta(\|w_1\|_{C(\bar\Delta)} + \|w_2\|_{C(\bar\Delta)}) \tag{5.14}$$

Треугольник Δ выберем таким образом, чтобы $c\,\mathrm{diam}\Delta < 1$. Тогда из (5.14) получим, что $w_1 = w_2 \equiv 0$ в $\bar\Delta$. Далее, повторяя дословно рассуждения доказательства теоремы 11.2 из [1, с. 91], приходим к тому, что $w_1 = w_2 \equiv 0$ во всей области $\bar\Omega$. Тогда из (5.11) имеем $w_3 \equiv 0$ в $\bar\Omega$. Следовательно, $\varepsilon^0 \equiv 0$ в $\bar\Omega$, т.е. уравнение (5.7) имеет лишь тривиальное решение. Итак, существует обратный оператор $(I + K_{oc})^{-1}$, ограниченный в $\tilde{L}_2(\bar{\Omega})$, с помощью которого уравнение (5.6) сведется к эквивалентному

$$\begin{aligned} &\varepsilon + K_0(\varepsilon) = 0 \\ &K_0(\varepsilon) = (I + K_{oc})^{-1}(K_{0*}(\varepsilon) - h_0) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Используя оценки (5.4), для любых $\varepsilon^j \in \tilde{L}_2(\bar{\Omega})$, $j = 1, 2$, принадлежащих шару $\|\varepsilon^j\|_{\tilde{L}_2} < r$, будем иметь

$$\|K_0(\varepsilon^1) - K_0(\varepsilon^2)\|_{\tilde{L}_2} \leq \|(I + K_{oc})^{-1}\|_{\tilde{L}_2}\|(I + \tilde{G}_1)^{-1}\|_{\tilde{L}_2}\tilde{q}_{0*}\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{\tilde{L}_2} \equiv \tilde{q}_0\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{\tilde{L}_2}$$

Радиус r шара и заданные граничные перемещения можем взять так, чтобы имело место неравенство

$$\tilde{q}_0 < 1 \tag{5.16}$$

Далее предположим, что внешние силы, действующие на оболочку, удовлетворяют условию

$$\|K_0(0)\|_{\tilde{L}_2} < (1 - \tilde{q}_0)r \tag{5.17}$$

Тогда к уравнению (5.15) можно применить принцип сжатых отображений [8], согласно которому уравнение (5.15) в шаре $\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2} < r$ имеет единственное решение $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in$ $\in \tilde{L}_2(\bar{\Omega})$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1) – 7) п. 2, (5.2), (5.5), а радиус r шара $\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2} < r$ и нагрузочные члены таковы, что имеют место неравенства (5.16), (5.17). Тогда задача равновесия для нерегулярных оболочек в шаре $\|\varepsilon\|_{\tilde{L}_2} < r$ имеет единственное обобщенное решение $\varepsilon \in \tilde{L}_2(\bar{\Omega})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00762).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 376 с.
2. *Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н.* Метод Ритца приближенного решения краевых задач нелинейной теории тонких оболочек // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 154–164.
3. *Морозов Н.Ф.* Нелинейные задачи теории тонких анизотропных пластин // Изв. вузов. Математика. 1960. № 6. С. 170–173.
4. *Терегулов И.Г.* Сходимость метода последовательных приближений в одной задаче нелинейной теории оболочек // Изв. вузов. Математика. 1959. № 4. С. 168–177.
5. *Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н.* О существовании решения одной задачи нелинейной теории пологих оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 21–29.
6. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.
7. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
8. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.

Казань, Н. Челны

Поступила в редакцию
16.12.2004