

УДК 539.375

© 2007 г. В.М. МИРСАЛИМОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

На основе минимаксного критерия проведен теоретический анализ по определению оптимального натяга для посадки упругих включений в отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной периодической системой прямолинейных трещин. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая обеспечить минимизацию параметров разрушения в зависимости от геометрических и механических характеристик и включений. Найденный натяг посадки включений обеспечивает повышение несущей способности составной изгибаемой пластины.

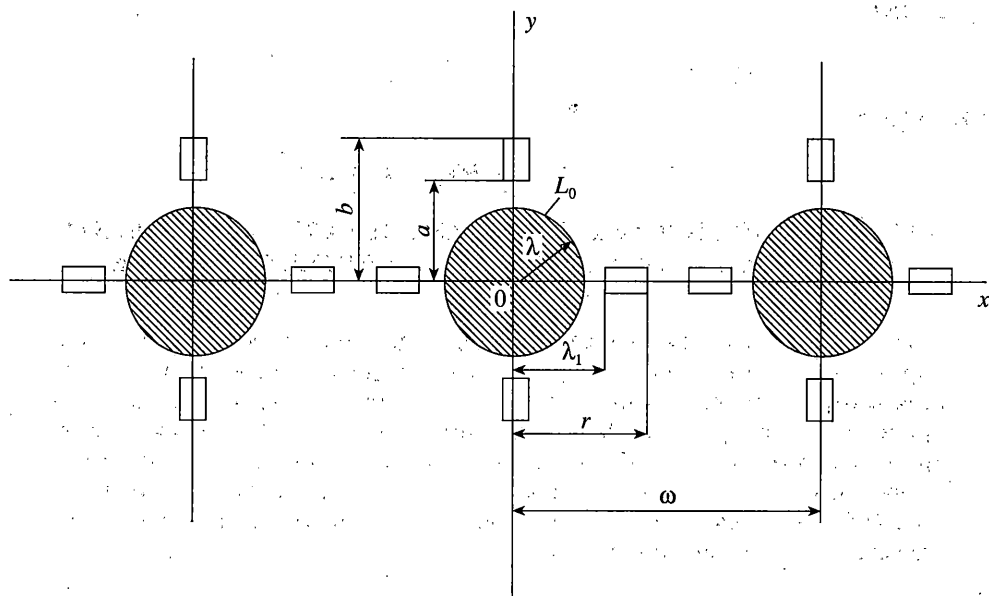
1. Введение. Опыт показывает большую надежность и долговечность многокомпонентных конструкций перед однородными [1]. Для повышения несущей способности пластины с отверстиями, при проектировании композитных материалов целесообразно контуры круговых отверстий подкреплять с натягом упругими шайбами из другого материала. Подкрепляющие элементы, составляя по весу сравнительно небольшую часть, существенно влияют на ее прочность. Ресурс работы составной конструкции определяется распределением напряжений в зонах взаимодействия элементов такой конструкции. Поэтому важное значение приобретает оптимальное проектирование составной (многокомпонентной) конструкции. Задача теории оптимального проектирования заключается в определении характеристик конструкции таким образом, чтобы изделие при действии заданных нагрузок являлось наилучшим из всех изделий рассматриваемого типа. Повышением работоспособности составной пластины можно обоснованно управлять конструкторско-технологическими методами, в частности геометрией (натягом) соединения ее элементов. В настоящее время (за исключением работ [2–5]), неизвестны решения задач механики по построению такой геометрии поверхности соединения деталей, чтобы созданное ею напряженное поле препятствовало бы разрушению материала составной конструкции. Достижение этой цели будет способствовать увеличению работоспособности составной конструкции.

2. Постановка задачи. Пусть имеется изотропная упругая пластина, ослабленная периодической системой круглых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$) и центры этих отверстий в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2$$

Для повышения несущей способности пластины контуры круговых отверстий L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) подкреплены с натягом шайбами из инородного упругого материала. Пластина ослаблена прямолинейными сквозными трещинами (фигура). Пластина подвергается однородному изгибу равномерно распределенными постоянными моментами (изгиб на бесконечности) $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$.

Начало системы координат совместим с геометрическим центром отверстия L_0 в срединной xOy плоскости пластины (фигура). Берега трещины свободны от внешних уси-



лий. Считается, что в процессе изгиба пластины противоположные берега трещины не контактируют между собой. Будем считать, что в круговые отверстия пластины L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) путем запрессовки или теплового воздействия вставлены с натягом упругие шайбы из другого материала одинаковой с ней толщины. Предполагается, что шайбы первоначально имеют большие размеры, чем отверстия пластины. Пусть требуется определить натяг для посадки включений в отверстия упругой пластины таким образом, чтобы созданное ими упругое поле препятствовало развитию трещин.

На основании симметрии краевых условий и геометрии области, занятой упругой средой, напряжения в изгибаемой пластине являются периодическими функциями с основным периодом ω .

Обозначим комплексные потенциалы, относящиеся к шайбе через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, а относящиеся к пластине через $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$. Так как принято, что решение для пластины обладает свойством периодичности, то достаточно рассмотреть условия сопряжения пластины с включением лишь вдоль контура основного отверстия L_0 .

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} &= \\ = \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta} + g'(\tau) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \overline{\Phi_*(\tau)} + \Phi_*(\tau) - [\bar{\tau}\Phi_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} &= \\ = \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)} \{ \varepsilon_0 \overline{\Phi_0(\tau)} + \Phi_0(\tau) - [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta} \}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon \Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + t \overline{\Phi_*(t)} + \overline{\Psi_*(t)} = ic_1, \quad \varepsilon \Phi_*(t_1) + \overline{\Phi_*(t_1)} + t_1 \overline{\Phi_*(t_1)} + \overline{\Psi_*(t_1)} = ic_2 \quad (2.3)$$

Здесь $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $\varepsilon = -(3 + \nu)/(1 - \nu)$; $\varepsilon_0 = -(3 + \nu_0)/(1 - \nu_0)$; t и t_1 — аффиксы берегов периодической системы трещин, направленных вдоль осей абсцисс и ор-

динат; D и D_0 – цилиндрические жесткости пластины и шайбы; $g(\tau)$ – искомая функция натяга, подлежит определению; c_1, c_2 – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи.

В принятых предположениях теории Кирхгофа рассматриваемая задача сводится к отысканию двух пар функций $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ и $\Phi_*(z), \Psi_*(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих граничным условиям (2.1)–(2.3).

Для нахождения функции натяга постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) определения натяга. Согласно теории [6] квазихрупкого разрушения Ирвина–Орована параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственной за разрушение материала пластины можно считать величину коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины.

Исследуя основные параметры разрушения и влияния на них натяга посадки соединения составной пластины, свойств материала и других факторов, можно обоснованно управлять разрушением конструкторско-технологическими методами, в частности, натягом соединения вclusions и пластины.

В качестве критерия определения натяга соединения (функция $g(\theta)$) примем минимизацию величины максимального коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещин. Эта минимизация будет способствовать повышению работоспособности изгибаемой пластины.

Таким образом, требуется определить натяг соединения $g(\theta)$ так, чтобы созданное им напряженное поле препятствовало росту трещин. Не нарушая общности поставленной задачи, принято, что искомая функция натяга $g(\theta)$ может быть представлена в виде ряда Фурье. Следовательно, коэффициентами A_{2k}^H разложения искомой функции натяга надо распорядиться так, чтобы обеспечивалась минимизация максимального коэффициента интенсивности напряжений. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию натяга $g(\theta)$.

3. Метод решения. Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние шайбы, ищем в виде [7]:

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{2k} z^{2k} \quad (3.1)$$

С учетом средних моментов комплексные потенциалы $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий и прямолинейных трещин, ищем в виде [8]:

$$\Phi_*(z) = -\frac{M_x^{\infty} + M_y^{\infty}}{4D(1+\nu)} + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \frac{M_y^{\infty} - M_x^{\infty}}{2D(1-\nu)} + \Psi(z) \quad (3.2)$$

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z)$$

$$\Phi_1(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} \quad (3.3)$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{1}{i\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt \\ \Psi_2(z) &= \frac{\pi\omega}{i\omega^2(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt, \quad \Phi_3(z) = \frac{1}{\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1-z) dt_1 \\ \Psi_3(z) &= \frac{1}{\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_2} \left\{ g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1-z) + \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1-z) + \frac{\pi}{\omega}(2t_1+iz) \sin^2 \frac{\pi}{\omega}(it_1-z) \right] g_1(t_1) \right\} dt_1 \\ \rho(z) &= \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(\pi z/\omega)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2, \quad S(z) = \sum'_m \left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $S(z)$ – специальная мероморфная функция. Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$. Интегралы в (3.4) берутся по линиям $L_1 = \{-r, -\lambda_1\} + [\lambda_1, r]$, $L_2 = \{-b, -a\} + [a, b]$.

К основным представлениям (3.2)–(3.4) необходимо добавить дополнительные физические условия

$$\int_{-r}^{-\lambda_1} g(t) dt = 0, \quad \int_{\lambda_1}^r g(t) dt = 0, \quad \int_{-b}^{-a} g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad \int_a^b g_1(t_1) dt_1 = 0 \quad (3.5)$$

которые обеспечивают однозначность углов поворота срединной плоскости при обходе контуров L_1, L_2 .

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (3.3). Из условий равенства нулю главного вектора сил и главного момента этих же сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области занятой материалом пластины, следует, что

$$\alpha_0 = -\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \beta_2 \lambda^2.$$

Из условий симметрии относительно координатных осей, находим, что $\operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0$, $\operatorname{Im} \beta_{2k} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Можно убедиться, что представления (3.2)–(3.4) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимается, что искомая функция $g'(\tau)$ может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье

$$g'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^H e^{i2k\theta}, \quad A_{2k}^H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'(\tau) e^{-2ki\theta} d\theta$$

$$\operatorname{Im} A_{2k}^H = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Следовательно, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов A_{2k}^H ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – параметров управления этого ряда Фурье.

Обозначим левую часть краевого условия (2.1) через $f_1 - if_2$. Пусть на контуре L_0 функция $f_1 - if_2$ разлагается в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} A_{2k} = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.6)$$

Тогда, используя граничное условие (2.1), соотношения (3.1), (3.6) и применяя метод степенных рядов, получим следующие соотношения:

$$a_0 = \frac{A_0 - A_0^H}{2}, \quad a_{2k} = \frac{A_{-2k} - A_{-2k}^H}{\lambda^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$a'_{2k} = -(2k + 1) \frac{A_{-2k-2} - A_{-2k-2}^H}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2} - A_{2k+2}^H}{\lambda^{2k}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

дающие коэффициенты a_{2k} , a'_{2k} функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$. Для определения неизвестных пока величин A_{2k} рассмотрим решение задачи для пластины.

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ позволяют после некоторых преобразований записать краевые условия на контуре кругового отверстия ($\tau = \lambda e^{i\theta}$) для отыскания потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в следующем виде

$$\Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \overline{\Phi_*(\tau)} + \Phi_*(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta} = \\ = \frac{D_0(1 - \nu_0)}{D(1 - \nu)} \left\{ \frac{1 + \varepsilon_0}{2} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} e^{2ki\theta} + \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_{-2k} e^{-2ki\theta} \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$C_{2k} = A_{2k} - A_{2k}^H \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Краевое условие (3.7) служит для определения коэффициентов α_{2k} и β_{2k} , а граничное условие (3.8) для определения величин A_{2k} .

Подставив в левую часть (3.7) выражения $\Phi_*(z)$ и $\Psi_*(z)$, на основании (3.2)–(3.4), перепишем (3.7) в виде

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_{2k} e^{2ki\theta} + f_1^1(\theta) + if_2^1(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$$

$$A'_0 = A_0 + \frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{2D(1 + \nu)}, \quad A'_2 = A_2 + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1 - \nu)}, \quad A'_{2k} = A_{2k} \quad (k = -1, \pm 2, \dots)$$

$$f_1^1(\theta) + if_2^1(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi'_2(\tau) + \Psi_2(\tau)]e^{2i\theta} \quad (3.9)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi'_3(\tau) + \Psi_3(\tau)]e^{2i\theta}$$

Аналогично преобразуем краевое условие (3.8). В результате получим

$$\varepsilon \overline{\Phi_1(\tau)} + \Phi_1(\tau) - [\overline{\tau\Phi_1'(\tau)} + \Psi_1(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^* e^{2ki\theta} + f_1^*(\theta) + if_1^*(\theta) + \varphi_1^*(\theta) + i\varphi_1^*(\theta)$$

$$A_0^* = \frac{M_y^\infty + M_x^\infty}{4(1+\nu)D}(1+\varepsilon) + A_0 \frac{1 + \varepsilon_0 \mu_0}{2 \mu}$$

$$A_2^* = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1-\nu)D} + A_2 \frac{\mu_0}{\mu}, \quad A_{2k}^* = \frac{\mu_0}{\mu} A_{2k} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$A_{-2k}^* = \varepsilon_0 \frac{\mu_0}{\mu} A_{-2k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) = -\varepsilon \overline{\Phi_2(\tau)} - \Phi_2(\tau) + [\overline{\tau\Phi_2'(\tau)} + \Psi_2(\tau)]e^{2i\theta} \quad (3.10)$$

$$\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta) = -\varepsilon \overline{\Phi_3(\tau)} - \Phi_3(\tau) + [\overline{\tau\Phi_3'(\tau)} + \Psi_3(\tau)]e^{2i\theta}$$

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} и β_{2k} считаем, что функции (3.9) и (3.10) разлагаются на $|\tau| = \lambda$ в ряды Фурье. На основании симметрии задачи для функции (3.9) и (3.10) будем иметь

$$f_1^1(\theta) + if_2^1(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} B_{2k} = 0$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k}^* e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} B_{2k}^* = 0$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1^1 + if_2^1) e^{-2ki\theta} d\theta, \quad B_{2k}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 + i\varphi_2) e^{-2ki\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k}' e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} B_{2k}' = 0$$

$$\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im} F_{2k} = 0$$

После вычисления интегралов с помощью теории вычетов, получим

$$B_{2k} = -\frac{1}{i\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt, \quad B_{2k}^* = -\frac{1}{\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g_1(t_1) \varphi_{2k}(it_1) dt_1$$

$$B_{2k}' = -\frac{1}{i\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g(t) f_{2k}^*(t) dt, \quad F_{2k} = -\frac{1}{\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g_1(t_1) \varphi_{2k}^*(it_1) dt_1$$

$$f_0^*(t) = (1+\varepsilon)\gamma(t), \quad f_2^*(t) = -\lambda^2 \gamma^{(2)}(t)/2$$

$$f_{2k}^*(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!}\gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!}\gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$f_{-2k}^*(t) = \frac{\varepsilon\lambda^{2k}}{(2k)!}\gamma^{(2k)}(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \gamma(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t$$

$$\varphi_0^*(it_1) = [\delta(it_1) - \overline{\delta(it_1)}] \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad \varphi_2^*(it_1) = -\frac{\lambda^2}{2}\delta^{(2)}(it_1) + 2[\delta(it_1) - it_1\delta'(it_1)]$$

$$\varphi_{2k}^*(it_1) = \frac{(1-2k)\lambda^{2k}}{(2k)!}\delta^{(2k)}(it_1) + \frac{2\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!}[k\delta^{(2k-2)}(it_1) - it_1\delta^{(2k-1)}(it_1)] \quad (k = 2, 3, \dots)$$

$$\varphi_{-2k}^*(it_1) = \frac{\varepsilon\lambda^{2k}}{(2k)!}\overline{\delta^{(2k)}(it_1)} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta(it_1) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(it_1)$$

$$f_{2k}(t) = f_{2k}^*(t) \quad \text{при } \varepsilon = 1, \quad \varphi_{2k}(t) = \varphi_{2k}^*(t) \quad \text{при } \varepsilon = 1$$

Используя методы решения, изложенные в [9–11], получим три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k} , β_{2k} и A_{2k} , в которые входят посредством интегральных членов через B_{2k} , B_{2k}^* , B_{2k}' и F_{2k} искомые функции $g(x)$ и $g_1(y)$. Для их определения используем краевое условие на берегах трещин. Требуя, чтобы комплексные потенциалы (3.2)–(3.4) удовлетворяли граничному условию (3.2)–(3.4), получим два сингулярных интегральных уравнения относительно искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$:

$$\frac{\varepsilon + 1}{i\omega(1-\varepsilon)} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-x) dt + H(x) = ic_1$$

$$\frac{\pi(\varepsilon + 1)}{i\omega^2(1-\varepsilon)} \int_{L_2} g_1(t) \left[(t-y) \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega}(t-y) \right] dt + N(y) = ic_2$$

$$H(x) = (1 + \varepsilon)\Phi_4(x) + x\Phi_4'(x) + \Psi_4(x)$$

$$\Phi_4(x) = \Phi_1(x) + \Phi_3(x), \quad \Psi_4(x) = \Psi_1(x) + \Psi_3(x)$$

$$N(y) = \varepsilon\Phi_5(iy) + \overline{\Phi_5(iy)} + iy\overline{\Phi_5'(iy)} + \overline{\Psi_5(iy)}$$

$$\Phi_5(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi_5(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$$

Для определения постоянной c_1 (в общем случае кусочно-постоянной функции) имеем следующие соотношения [12]:

$$\operatorname{Re} \int_{-r}^{-\lambda_1} ig(t) dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda_1}^r ig(t) dt = 0$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах разрезов $L_{1,2}$:

Аналогично для определения постоянной c_2 имеем соотношения

$$\operatorname{Re} \int_{-b}^{-a} i_1 g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \int_a^b i_1 g_1(t_1) dt_1 = 0$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах разрезов L_2 . Удовлетворяя этим условиям, находим $c_1 = 0, c_2 = 0$.

Используя процедуру алгебраизации [12, 13] интегральных уравнений, получим две конечные алгебраические системы уравнений для определения приближенных значений искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$ в узловых точках разбиения интервалов интегрирования.

Считая формально заданным натяг, построим окончательную систему уравнений для решения задачи теории упругости. Исключая из конечных алгебраических систем, полученных вместо двух сингулярных интегральных уравнений, коэффициенты α_{2k} и β_{2k} , получим одну бесконечную алгебраическую линейную систему относительно коэффициентов A_{2k} и две конечные алгебраические системы относительно приближенных значений P_k^0 и R_k^0 искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$, соответственно в узловых точках. Упомянутые три системы являются связанными и должны решаться совместно. Для решения объединенной алгебраической системы применим метод редукции и метод Гаусса с выбором главного элемента.

После определения значений P_k^0 и R_k^0 функций $g(x)$ и $g_1(y)$ коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещин $x = \lambda_1, x = r, y = a, y = b$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} K_I^{\lambda_1} &= \frac{12D(3+\nu)}{h_0^2} \sqrt{\frac{\pi r(1-h_1^2)}{h_1}} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} P_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} \\ K_I^r &= \frac{12D(3+\nu)}{h_0^2} \sqrt{\pi r(1-h_1^2)} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k P_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} \\ K_I^a &= \frac{12D(3+\nu)}{h_0^2} \sqrt{\pi b} \sqrt{\frac{(1-\lambda_2^2)}{\lambda_2}} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} R_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} \\ K_I^b &= \frac{12D(3+\nu)}{h_0^2} \sqrt{\pi b} \sqrt{1-\lambda_2^2} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k R_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$h_1 = \lambda_1/r, \quad \lambda_2 = a/b$$

При заданном натяге с помощью решения алгебраической системы и формул (3.11) можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений.

Представляет интерес изучить влияние натяга на коэффициенты интенсивности напряжений. Для численной реализации изложенного способа выполнены расчеты. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами M_y^∞ ($M_x^\infty = 0$) и всесторонний изгиб моментами.

Урезанные системы уравнений решались методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка n в зависимости от радиуса отверстий. Проводились расчеты по определению коэффициентов интенсивности напряжений.

Для одностороннего изгиба получено, что

$$K_I^{\lambda_1} = \frac{6M_y^\infty}{h_0^2} \sqrt{\frac{\pi r(1-h_1^2)}{h_1}} F_1(\lambda, \lambda_1, r, a, b), \quad K_I^r = \frac{6M_y^\infty}{h_0^2} \sqrt{\pi r(1-h_1^2)} F_2(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$$

$$K_I^a = \frac{6M_y^\infty}{h_0^2} \sqrt{\pi b} \sqrt{\frac{(1-\lambda_2^2)}{\lambda_2}} F_3(\lambda, \lambda_1, r, a, b), \quad K_I^b = \frac{6M_y^\infty}{h_0^2} \sqrt{\pi b} \sqrt{1-\lambda_2^2} F_4(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$$

Получены результаты расчетов функций $F_1(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$, $F_2(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$, $F_3(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$ и $F_4(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$ для разных значений радиуса отверстий и длины трещин. При расчетах принималось $r = 0,9$; $g(\theta) = 0,05$; $a = 0,65$; $b - a = 0,25$.

Для всестороннего изгиба имеем

$$K_I^{\lambda_1} = \frac{6M_0}{h_0^2} \sqrt{\frac{\pi r(1-h_1^2)}{h_1}} F_1'(\lambda, \lambda_1, r, a, b), \quad K_I^r = \frac{6M_0}{h_0^2} \sqrt{\pi r(1-h_1^2)} F_1'(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$$

$$K_I^a = \frac{6M_0}{h_0^2} \sqrt{\pi b} \sqrt{\frac{(1-\lambda_2^2)}{\lambda_2}} F_3'(\lambda, \lambda_1, r, a, b), \quad K_I^b = \frac{6M_0}{h_0^2} \sqrt{\pi b} \sqrt{1-\lambda_2^2} F_4'(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$$

Проведены расчеты для функций $F_1'(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$, $F_2'(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$, $F_3'(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$, $F_4'(\lambda, \lambda_1, r, a, b)$ для разных значений радиуса отверстий и длины трещины. При расчетах было принято, что $b - a = 0,25$, $g(\theta) = 0,05$.

Расчеты показывают, что подкрепляющие упругие шайбы существенно снижают коэффициент интенсивности напряжений или, другими словами, позволяют пластине выдержать гораздо большие нагрузки по сравнению со случаем отсутствия подкрепления с натягом.

4. Минимизация параметров разрушения. Вернемся к решению задачи оптимального проектирования. Задача оптимального проектирования сводится к определению коэффициентов (параметров управления) A_{2k}^H .

В правую часть бесконечной (объединенной системы) входят искомые коэффициенты A_{2k}^H . Так как коэффициенты интенсивности напряжений (показатель качества управления) линейно зависят от искомых коэффициентов, то искомую задачу оптимизации сведем к задаче линейного программирования.

Из четырех коэффициентов интенсивности $K_I^{\lambda_1}$, K_I^r , K_I^a , K_I^b выберем наибольший. Таким образом, ответственной за разрушение упругой пластины считаем величину максимального коэффициента интенсивности напряжений. Очевидно, что минимизация максимального значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины в пластинах имеет большое практическое значение. Достижение этой цели будет способствовать увеличению работоспособности пластинчатых элементов конструкций.

Коэффициентами A_{2k}^H искомой функции натяга надо распорядиться так, чтобы обеспечивалась минимизация максимального коэффициента интенсивности напряжений

$$K_{I_{\max}} \rightarrow \min \tag{4.1}$$

Таблица 1

λ	λ_1	A_0^H	A_2^H	A_4^H	A_6^H
0.2	0.35	0.093	0.031	0.017	0.003
	0.45	0.878	0.042	0.019	0.012
	0.55	0.051	0.047	0.023	0.017
	0.65	0.059	0.051	0.034	0.021
	0.75	0.054	0.063	0.042	0.026
0.3	0.45	0.099	0.033	0.014	0.005
	0.55	0.074	0.048	0.022	0.017
	0.65	0.069	0.053	0.029	0.023
0.4	0.75	0.063	0.068	0.046	0.025
	0.55	0.092	0.036	0.015	0.008
	0.65	0.071	0.051	0.024	0.019
0.5	0.75	0.055	0.057	0.031	0.024
	0.65	0.099	0.039	0.019	0.009
	0.75	0.087	0.050	0.033	0.021

Искомая задача оптимального проектирования сводится к задаче линейного программирования. При этом должно выполняться ограничение на отсутствие пластических деформаций, а также неравенство

$$K_I \leq K_{th} \tag{4.2}$$

где K_{th} – характеристика порогового значения трещиностойкости (вязкость разрушения) материала пластины, определяющаяся опытным путем.

Численный расчет выполнялся на ЭВМ симплекс-методом. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами M_y^∞ ($M_x^\infty = 0$) и всесторонний изгиб моментами $M_y^\infty = M_x^\infty = M$. В табл. 1 приведены результаты расчетов коэффициентов A_{2k}^H искомого натяга для разных значений радиуса отверстий при одностороннем изгибе, а в табл. 2 для всестороннего изгиба пластины. В расчетах было принято для пластины $\nu = 0.32$; $\mu = 4.5 \cdot 10^5$ МПа; для шайбы $\nu_0 = 0.31$; $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^5$ МПа.

Чтобы избежать в каждом случае решение задачи линейного программирования, можно рекомендовать следующий приближенный способ решения задачи по предотвращению преждевременного разрушения.

Ограничиваясь в разложении искомой функции $g'(\tau)$ четырьмя членами

$$g'(\theta) = A_0^H + A_2^H \cos 2\theta + A_4^H \cos 4\theta + A_6^H \cos 6\theta \tag{4.3}$$

поступим следующим образом. Потребуем, чтобы коэффициенты интенсивности напряжений K_I^a , K_I^b , $K_I^{\lambda_1}$, K_I^r в окрестности кончиков трещин были равны нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} R_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k R_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} P_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k P_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0 \tag{4.4}$$

Таблица 2

λ	λ_1	A_0^H	A_2^H	A_4^H	A_6^H
0.2	0.35	0.091	0.024	0.010	0.001
	0.45	0.073	0.029	0.0129	0.009
	0.55	0.064	0.033	0.018	0.012
	0.65	0.059	0.038	0.024	0.019
	0.75	0.051	0.042	0.031	0.022
0.3	0.45	0.096	0.031	0.015	0.002
	0.55	0.087	0.036	0.017	0.011
	0.65	0.081	0.039	0.026	0.014
	0.75	0.077	0.040	0.038	0.019
0.4	0.55	0.099	0.037	0.016	0.005
	0.65	0.090	0.041	0.020	0.014
	0.75	0.081	0.047	0.031	0.021
0.5	0.65	0.101	0.039	0.020	0.011
	0.75	0.092	0.044	0.032	0.023

Добавляя эти четыре линейные алгебраические уравнения к объединенной системе, о которой говорилось выше, получим замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе коэффициентов $A_0^H, A_2^H, A_4^H, A_6^H$.

Бесконечные системы относительно α_{2k}, β_{2k} и A_{2k} имеют весьма громоздкий вид. Так как $0 \leq \lambda < 1$, а параметр λ входит в высоких степенях в отмеченные системы, это значительно упрощает расчеты. В большинстве практически важных случаев каждую из этих систем можно урезать до двух-трех уравнений и, несмотря на это, получить практически точные результаты для рабочих диапазонов изменения радиуса λ отверстия.

Для численной реализации изложенного способа совместно решались упомянутые системы. Использовался метод урезания алгебраических систем. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами $M_y^\infty (M_x^\infty = 0)$ и всесторонний изгиб моментами $M_y^\infty = M_x^\infty = M$. Урезанные системы уравнений решались методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса отверстий.

Случай кольцевых шайб рассматривается аналогично. В этом случае комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ ищутся в виде [7]:

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{2k} z^{2k}$$

и, кроме того, добавляется граничное условие отсутствия внешних усилий на внутреннем контуре кольцевой шайбы.

Итак, построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и шайб. Найденный натяг посадки шайб в пластину обеспечивает минимизацию параметров разрушения и повышает несущую способность составной изгибаемой пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Решетов Д.Н.* Состояние и тенденции развития деталей машин // Вестник машиностроения. 2000. № 10. С. 11–15.
2. *Mirsalimov V.M., Allahyarov E.A.* The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching // Intern. Journal of Fracture. 1996. V. 79. № 1. P. R. 17–R.21.
3. *Гаджиев Г.Х., Мирсалимов В.М.* Обратная задача теории упругости для составного цилиндра контактной пары // Механика. Машиностроение. 2002. № 2. С. 5–7.
4. *Гаджиев Г.Х., Мирсалимов В.М.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары // Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / Под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 196–207.
5. *Гаджиев Г.Х.* Определение оптимального натяга для составного цилиндра контактной пары с учетом температурных напряжений и шероховатого внутреннего контура // Изв. вузов. Машиностроение. 2003. № 7. С. 15–23.
6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
7. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. *Мирсалимов В.М.* Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослабленной периодической системой круглых отверстий // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 152–158.
9. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
10. *Мирсалимов В.М.* Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // ПМТФ. 1978. № 1. С. 164–174.
11. *Мирсалимов В.М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984. 124 с.
12. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
13. *Мирсалимов В.М.* Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.

Баку

Поступила в редакцию
20.09.2004