

УДК 539.3

© 2007 г. Г.В. КОСТИН, В.В. САУРИН

**МЕТОД ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ  
В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Для решения краевых задач линейной теории упругости применяется метод, основанный на введении интегральной связи между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций. Исходная задача сводится к задаче минимизации неотрицательного функционала от неизвестных функций перемещений и напряжений при дифференциальных ограничениях. Сформулирован и обоснован вариационный принцип, из которого следуют при определенных граничных условиях принципы минимума потенциальной и дополнительной энергии. Получены двусторонние энергетические оценки точных решений. На основе предложенного подхода разработан численно-аналитический алгоритм нахождения кусочно-полиномиальных аппроксимаций иско-мых функций. Для задач растяжения свободной пластины, состоящей из двух разных материалов, и изгиба защемленной прямоугольной пластины на упругом основании проведены численное моделирование и анализ результатов расчета, полученных с помощью метода интегродифференциальных соотношений.

**1. Введение.** При решении задач линейной теории упругости используются различные методы и подходы. Значительное распространение получили методы, основанные на вариационных принципах механики [1, 2]. В тех случаях, когда получить точное решение затруднительно, применяются приближенные подходы, основанные, например, на методе конечного элемента, сводящего исходную вариационную постановку к конечномерной линейной системе уравнений [3, 4]. Наряду с МКЭ активно разрабатываются и другие подходы, такие как метод Петрова–Галеркина [5, 6], разнообразные модификации метода наименьших квадратов [7] и т.п. Это связано с тем, что разработанные схемы МКЭ имеют ряд ограничений. При построении конечномерной аппроксимации напряженно-деформированного состояния упругого тела достаточно трудно получить двустороннюю оценку сходимости численного процесса. Это обстоятельство не позволяет эффективно контролировать ошибки вычислений, связанные, например, с дискретизацией задачи, погрешностями округления, численным интегрированием и т.п. Разрывы функций компонент тензора напряжений на границах элементов, связанные с применением негладких аппроксимаций перемещений, нарушают уравнения равновесия и приводят к появлению паразитных поверхностных сил. Интегральное задание граничных условий в напряжениях не гарантирует точности их выполнения при конечномерном моделировании.

В данной статье рассматриваются возможные модификации управляющих уравнений линейной теории упругости. С этой целью используется интегральная формулировка закона Гука, предложенная в [8–10]. Полученная в результате интегродифференциальная краевая задача сводится к вариационной задаче, для которой применимы хорошо разработанные методы численного решения [11, 12]. Для демонстрации возможности данного подхода применяется численно-аналитический алгоритм кусочно-полиномиальных аппроксимаций функций напряжений и перемещений (см. [13, 14]).

**2. Формулировка краевой задачи упругости.** Рассмотрим упругое тело, занимающее некоторую область  $\Omega$  с границей  $\gamma$ . Напряженно-деформированное состояние тела описывается системой дифференциальных уравнений линейной теории упругости [15]:

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma = C : \epsilon^0 \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{kl}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Здесь  $\epsilon_{kl}^0$ ,  $u_k$  – соответственно компоненты тензора деформаций  $\epsilon^0$  и вектора перемещений  $u$  в некоторой декартовой системе координат  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ ;  $\sigma$  – тензор напряжений;  $f$  – заданная вектор-функция объемных сил. Компоненты  $C_{ijkl}$  тензора модулей упругости  $C$  обладают следующими свойствами симметрии:  $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ . Точка и двоеточие между векторами и тензорами указывают соответственно на скалярное и двойное скалярное произведение.

Ограничимся случаем, когда краевые условия записываются покомпонентно в виде

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{q}_i, \quad x \in \gamma_1^i \quad (2.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad x \in \gamma_2^i \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} n_j + \kappa_i u_i = 0, \quad \kappa_i > 0, \quad x \in \gamma_3^i \quad (2.6)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $n_j$  – компоненты соответственно тензора напряжений  $\sigma$  и единичного вектора нормали  $n$  к границе  $\gamma$ ;  $\bar{q}_i$  и  $\bar{u}_i$  – заданные компоненты векторов внешних нагрузок  $\bar{q}$  и граничных перемещений  $\bar{u}$ ;  $\kappa_i$  – заданные жесткостные коэффициенты упругого основания. Части границы  $\gamma_j^i$  удовлетворяют следующим условиям:  $\gamma_1^i \cup \gamma_2^i \cup \gamma_3^i = \gamma$ ,  $\gamma_j^i \cap \gamma_k^i \neq \emptyset, j \neq k (i, j, k = 1, 2, 3)$ .

Для нахождения приближенных решений задач линейной теории упругости широкое применение получили различные вариационные методы. В случае, когда существует функция плотности энергии деформации

$$A = \frac{1}{2} \epsilon^0 : C : \epsilon^0 \quad (2.7)$$

и при вариациях перемещений граничные условия (2.4) не меняются, из принципа виртуальной работы следует принцип минимума потенциальной энергии [1]:

$$\Pi = \int_{\Omega} A(u) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_1^i} \bar{q}_i u_i d\gamma_1^i \rightarrow \min_u \quad (2.8)$$

Следует отметить, что для этой формулировки поля перемещений  $u$  должны строго удовлетворять кинематическим соотношениям (2.3), закону Гука (2.2) и граничным условиям в перемещениях (2.5). При этом граничные условия в напряжениях (2.4) учитываются в функционале (2.8) и выполняются в интегральном смысле. Не требуется также строгое выполнение уравнения равновесия (2.1).

Если существует функция плотности дополнительной энергии

$$B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.9)$$

и предполагается, что граничные условия (2.5) не меняются при вариации напряжений, из принципа дополнительной виртуальной работы следует принцип минимума дополнительной энергии

$$\Pi_c = \int_{\Omega} B(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i d\gamma_2^i \rightarrow \min_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.10)$$

Для этого вариационного принципа поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  должны строго удовлетворять уравнению равновесия (2.1), закону Гука (2.2) и граничным условиям в напряжениях (2.4). При этом граничные условия в перемещениях (2.5) учитываются в функционале (2.10) и не требуется строгое выполнение кинематических соотношений (2.3).

Считается (см. [1]), что в рамках предположений линейной теории упругости эти два подхода к формулированию вариационных принципов являются взаимными и эквивалентными друг другу. Отметим, что приближенные поля перемещений  $\mathbf{u}$ , полученные из принципа минимума потенциальной энергии, позволяют с помощью линейных кинематических соотношений (2.3) и закона Гука (2.2) восстановить соответствующие поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^0$ .

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \equiv \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^0(\mathbf{u}) \quad (2.11)$$

С другой стороны поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , найденные из принципа минимума дополнительной энергии, с помощью (2.2) можно связать с соответствующими полями деформаций  $\boldsymbol{\epsilon}$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.12)$$

При этом восстановить по найденным деформациям  $\boldsymbol{\epsilon}$  поля перемещений  $\mathbf{u}$  довольно затруднительно, поскольку для этого необходимо решить переопределенную систему дифференциальных уравнений (2.3). Отметим что поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\sigma}^0$ , полученные этими двумя подходами, в общем случае могут не совпадать ( $\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma}^0$ ).

**3. Метод интегродифференциальных соотношений.** Известно, что соотношения (2.1)–(2.3) описывают напряженно деформированное состояние в любой внутренней точке упругого тела, занимающего область  $\Omega$ . При этом считается, что напряжения во внутренних точках тела должны непрерывно переходить в напряжения на границе, т.е. должны быть справедливы соотношения (2.4). Таким же образом перемещения внутренних точек непрерывно переходят в граничные значения, описываемые равенством (2.5). Заметим, что неявно предполагается непрерывность перехода компонент тензора модулей упругости  $\mathbf{C}$ , определенного для внутренних точек, на границу тела  $\gamma$  [1]. С другой стороны необходимо принять во внимание, что граничные условия (2.4), (2.5) не могут быть заданы без учета тех физических факторов, которые порождают эти условия. Например, некоторая часть границы может быть поверхностью раздела двух или нескольких сред (как упругих, так и неупругих). В этом случае любая граничная точка принадлежит как рассматриваемому телу, так и телам, которые порождают эти граничные условия. Некоторые внутренние поверхности тела  $\Omega$  также могут быть границами раздела различных материалов. Любая точка на этих поверхностях одновременно принадлежит частям тела с разными механическими свойствами, т.е. тензор модулей

упругости на этих поверхностях, вообще говоря, не определен и, следовательно, неопределенны соотношения закона Гука.

Хотя в обоих вариационных подходах, описанных в п. 2, требуется строгое выполнение локальных соотношений закона Гука (2.2), в них предполагается возможность учета разрывов компонент тензора модулей упругости  $\mathbf{C}$ . Для того чтобы в явном виде ввести в задачу линейной теории упругости такого рода неопределенность, предлагается следующее интегральное представление закона Гука [8]:

$$\Phi_1 = \int_{\Omega} \varphi_1 d\Omega = 0, \quad \varphi_1 = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) \quad (3.1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{u})$  – зависящая от перемещений тензорная функция, определенная в (2.11). С учетом (3.1) краевая задача линейной теории упругости может быть переформулирована следующим образом: найти такие кинематически допустимые поля перемещений  $\mathbf{u}$ , и равновесные поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , которые строго выполняют соотношения (2.1), (2.3), (3.1) и граничные условия (2.4)–(2.6).

Вследствие неотрицательности подынтегральной функции  $\varphi_1$  ( $\varphi_1 \geq 0$ ) интеграл  $\Phi_1$  также неотрицателен для произвольных функций  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ . Это позволяет свести интегро-дифференциальную задачу (2.1), (2.3)–(2.6), (3.1) к следующей вариационной: найти неизвестные  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  доставляющие минимум функционалу  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow \min_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.2)$$

при ограничениях на напряженно-деформированное состояние упругого тела (2.1), (2.3)–(2.6).

Допустим, что действительные и произвольно выбранные перемещения и напряжения обозначены через  $\mathbf{u}^*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^*$  и  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  соответственно, и положим  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* + \delta\boldsymbol{\sigma}$ . Тогда  $\Phi_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \Phi_1(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) + \delta_{\mathbf{u}}\Phi_1 + \delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Phi_1 + \delta^2\Phi_1$ , где  $\delta_{\mathbf{u}}\Phi_1$  и  $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Phi_1$  – первые вариации относительно  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$ ;  $\delta^2\Phi_1$  – вторая вариация функционала  $\Phi_1$ . Первые вариации линейны по  $\delta\mathbf{u}$  и  $\delta\boldsymbol{\sigma}$ , и после интегрирования по частям могут быть записаны следующим образом:

$$\delta_{\mathbf{u}}\Phi_1 = -2 \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + 2 \int_{\gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) \cdot \delta\mathbf{u} d\gamma \quad (3.3)$$

$$\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Phi_1 = 2 \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) : \delta\boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

Условия обращения в нуль первых вариаций функционала  $\Phi_1$  (условия стационарности) имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) = 0, \quad [\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0)]|_{\gamma} = 0 \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что локальные соотношения закона Гука (2.2) являются условиями стационарности функционала  $\Phi_1$ , которые вместе с ограничениями (2.1), (2.3)–(2.6) составляют полную систему уравнений линейной теории упругости.

Вторая вариация

$$\delta^2\Phi_1 = \int_{\Omega} \varphi_1(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\sigma}) d\Omega \geq 0$$

квадратичная по  $\delta\mathbf{u}$ ,  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  неотрицательна в следствии неотрицательности подынтегральной функции  $\varphi_1$ .

Используя свойства функционала  $\Phi_1$  можно получить и другие вариационные формулировки задач линейной теории упругости. Равенство нулю  $\Phi_1$  в соотношении (3.1) означает покомпонентную близость тензоров  $\sigma$  и  $\sigma^0$ :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^0)^2 d\Omega = 0, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Из соотношений (2.11), (2.12), (3.5) следует покомпонентная близость тензоров  $\epsilon$  и  $\epsilon^0$ :

$$\int_{\Omega} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^0)^2 d\Omega = 0, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

Таким образом, можно ввести в рассмотрение следующий неотрицательный функционал

$$\Phi_2 = \int_{\Omega} \phi_2 d\Omega \geq 0, \quad \phi_2 = (\epsilon - \epsilon^0) : (\epsilon - \epsilon^0) \quad (3.7)$$

который достигает своего абсолютного минимума на действительных перемещениях  $u^*$  и напряжениях  $\sigma^*$ . Первые вариации функционала (3.7) имеют вид

$$\delta_u \Phi_2 = -2 \int_{\Omega} \nabla \cdot (\epsilon - \epsilon^0) \cdot \delta u d\Omega + 2 \int_{\gamma} \mathbf{n} \cdot (\epsilon - \epsilon^0) \cdot \delta u d\gamma \quad (3.8)$$

$$\delta_{\sigma} \Phi_2 = 2 \int_{\Omega} (\epsilon - \epsilon^0) : \mathbf{C}^{-1} : \delta \sigma d\Omega$$

Условиями стационарности функционала  $\Phi_2$  (также как и для  $\Phi_1$ ) являются соотношения закона Гука, записанного в виде  $\epsilon = \epsilon^0$ , а вторые вариации неотрицательны.

Используя выражения (2.11), (2.12), функционал  $\Phi_2$ , представленный в (3.7) через тензоры деформаций  $\epsilon$  и  $\epsilon^0$ , можно записать покомпонентно в напряжениях. В частности, для двумерного случая (плоское напряженное состояние) и однородного изотропного материала интеграл  $\Phi_2$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \frac{(1+\mu^2)}{E^2} \int_{\Omega} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)^2 - \frac{4\mu}{(1+\mu^2)} (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)(\sigma_{22} - \sigma_{22}^0) + \right. \\ & \left. + (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)^2 + \frac{2(1+\mu)^2}{(1+\mu)^2} (\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Неотрицательность функционала (3.9) следует из того, что коэффициент при смешанном произведении  $4\mu/(1+\mu^2) < 2$ , т.к.  $-1 < \mu < 1/2$ .

Обобщая этот случай, введем в рассмотрение семейство неотрицательных функционалов, для которых условия стационарности эквивалентны соотношениям закона Гука (2.2):

$$\begin{aligned} \Phi = & c^2 \int_{\Omega} \left[ (\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)^2 - 2a(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)(\sigma_{22} - \sigma_{22}^0) + \right. \\ & \left. + (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)^2 + b^2(\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)^2 \right] d\Omega \geq 0, \quad |a| < 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $a, b$  и  $c$  – некоторые действительные константы.

Аналогичное семейство функционалов можно построить для произвольного трехмерного анизотропного случая. В этом семействе особое место занимает функционал

$$\Phi_3 = \int_{\Omega} \phi_3 d\Omega \geq 0, \quad \phi_3 = \frac{1}{2} (\sigma - \sigma^0) : (\epsilon - \epsilon^0) \quad (3.11)$$

имеющий размерность энергии. Этому функционалу соответствует следующая вариационная формулировка краевой задачи линейной теории упругости: найти неизвестные перемещения  $\mathbf{u}$  и напряжения  $\sigma$ , доставляющие минимум функционалу  $\Phi_3$ :

$$\Phi_3(\mathbf{u}, \sigma) \rightarrow \min_{\mathbf{u}, \sigma} \quad (3.12)$$

при ограничениях (2.1), (2.3)–(2.6).

Интеграл в (3.11) можно преобразовать к виду

$$\Phi_3 = W_u + W_\sigma - 2W$$

$$W_u = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^0 : \epsilon^0 d\Omega, \quad W_\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon d\Omega, \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \epsilon^0 d\Omega \quad (3.13)$$

где  $W_u$  – энергия деформации,  $W_\sigma$  – энергия напряжений,  $W$  – работа внешних сил. Отметим, что  $W_u$  и  $W_\sigma$  – положительно определенные функционалы, а  $W$  – билинейный функционал, значение которого не зависит явно от свойств материала.

Интегрируя по частям удвоенную работу внешних сил и используя уравнение равновесия (2.1), получим

$$2W = \int_{\gamma} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (3.14)$$

В случае, когда в краевой задаче отсутствуют условия (2.6), при учете граничных условий (2.4), (2.5) и выражения (3.14) функционал  $\Phi_3$  можно представить в виде

$$\Phi_3 = W_u - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_1^i} \bar{q}_i u_i d\gamma_1^i + W_\sigma - \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_2^i} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i d\gamma_2^i \geq 0 \quad (3.15)$$

Принимая во внимание выражения для потенциальной энергии (2.8) и дополнительной энергии (2.10), представим неравенство (3.15) в следующей форме

$$\Phi_3(\mathbf{u}, \sigma) = \Pi(\mathbf{u}) + \Pi_c(\sigma) \geq 0 \quad (3.16)$$

Таким образом доказана *теорема*: для любых равновесных полей напряжений  $\sigma$ , удовлетворяющих граничным условиям (2.4), и для любых кинематически допустимых полей перемещений  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющих граничным условиям (2.5), сумма потенциальной и дополнительной энергий неотрицательна.

Следовательно, задача минимизации функционала (3.12) при ограничениях (2.1), (2.3)–(2.5) сводится к двум независимым оптимизационным задачам

$$\min_{\mathbf{u}, \sigma} \Phi_3(\mathbf{u}, \sigma) = \min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{u}) + \min_{\sigma} \Pi_c(\sigma) = 0 \quad (3.17)$$

и приближенные поля перемещений находятся из принципа минимума потенциальной энергии (2.8), а поля напряжений из принципа минимума дополнительной энергии (2.10).

Для этого случая удается построить двусторонние оценки для запасаемой телом упругой энергии  $W(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) = W_u(\mathbf{u}^*) = W_\sigma(\boldsymbol{\sigma}^*)$  на действительных перемещениях  $\mathbf{u}^*$  и напряжениях  $\boldsymbol{\sigma}^*$ . В частности, если  $\bar{u}_i = 0$  ( $x \in \gamma_2^i$ ) или  $\gamma_2^i = \emptyset$  ( $i = 1, 2, 3$ ), для произвольных допустимых перемещений и напряжений справедливо неравенство

$$-\Pi(\mathbf{u}) \leq W(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \leq \Pi_c(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.18)$$

С другой стороны, если  $\bar{q}_i = 0$  ( $x \in \gamma_1^i$ ) или  $\gamma_1^i = \emptyset$  ( $i = 1, 2, 3$ ), верна оценка

$$-\Pi_c(\boldsymbol{\sigma}) \leq W(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \leq \Pi(\mathbf{u}) \quad (3.19)$$

Положительность вторых вариаций  $\delta^2\Phi_3$  при произвольных вариациях перемещений  $\delta\mathbf{u}$  и напряжений  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  следует из соответствующей положительности  $\delta^2\Pi \geq 0$  и  $\delta^2\Pi_c \geq 0$ , причем знак равенства имеет место только в случае, когда все компоненты тензора деформаций  $\boldsymbol{\epsilon}^0(\delta\mathbf{u})$  и напряжений  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  равны нулю [1].

В том случае, когда на части границы заданы смешанные условия (2.6), декомпозиция вариационной задачи (3.12) на две независимые задачи в перемещениях и в напряжениях невозможна. Действительно, интегрируя по частям удвоенную работу внешних сил, получаем

$$2W = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_1^i} \bar{q}_i u_i d\gamma_1^i + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_2^i} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i d\gamma_2^i + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_3^i} \sigma_{ij} n_j u_i d\gamma_3^i \quad (3.20)$$

Из выражения (3.20) видно, что последнее слагаемое явно зависит как от перемещений, так и от напряжений.

Учитывая, что на части границы  $\gamma_3^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вариации перемещений  $\delta\mathbf{u}$  и напряжений  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  связаны соотношением  $\delta\sigma_{ij} n_j + \kappa_i \delta u_i = 0$ , представим вторые вариации функционала  $\Phi_3$  в виде

$$\delta^2\Phi_3 = W_u(\delta\mathbf{u}) + W_\sigma(\delta\boldsymbol{\sigma}) + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_3^i} \kappa_i (\delta u_i)^2 d\gamma_3^i \geq 0, \quad \kappa_i > 0 \quad (3.21)$$

Равенство нулю второй вариации  $\delta^2\Phi_3$  возможно только в случае, когда все компоненты тензоров деформаций  $\boldsymbol{\epsilon}^0(\delta\mathbf{u})$  и напряжений  $\delta\boldsymbol{\sigma}$ , а также компоненты вектора перемещений  $\delta u_i$  на части границы  $\gamma_3^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

**4. Приближенное решение задачи упругости.** Рассмотрим один из возможных алгоритмов условной минимизации функционала  $\Phi_3$  для двумерной задачи линейной теории упругости, основанный на кусочно-полиномиальных аппроксимациях неизвестных функций компонент вектора перемещений  $u_k(x_1, x_2)$  и тензора напряжений  $\sigma_{kl}(x_1, x_2)$  ( $k, l = 1, 2$ ). Ограничим рассмотрение случаем, когда область  $\Omega$  представляет собой тело с кусочно-линейной границей  $\gamma$ . Считается, что на каждой стороне многоугольника  $\Omega$  заданы граничные условия вида (2.4)–(2.6), в которых функции  $\bar{u}_i$  и  $\bar{q}_i$  – полиномы некоторой степени от  $x_j$  ( $i, j = 1, 2$ ). Предполагается также, что объемные силы отсутствуют ( $\mathbf{f} = 0$ ).

Пусть область  $\Omega$  разбита на конечное число треугольных элементов. Ради удобства, предположим, что ни одна вершина треугольника не лежит на стороне другого треугольника. Неизвестные функции компонент вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и тензора напря-

жений  $\sigma$  аппроксимируются на каждом треугольном элементе полиномиальными функциями следующего вида:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_u-i} \mathbf{u}^{i,j,(n_u-i-j)} g_1^i g_2^j g_3^{n_u-i-j}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=0}^{n_\sigma} \sum_{j=0}^{n_\sigma-i} \boldsymbol{\sigma}^{i,j,(n_\sigma-i-j)} g_1^i g_2^j g_3^{n_\sigma-i-j} \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{u}^{i,j,(n_u-i-j)}$  и  $\boldsymbol{\sigma}^{i,j,(n_\sigma-i-j)}$  – некоторые неизвестные коэффициенты, записанные в векторном и тензорном виде, а  $n_u$  и  $n_\sigma$  – заданные степени соответствующих аппроксимирующих полных полиномов перемещений и напряжений;  $g_k = g_k(x_1, x_2)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – линейные функции, известные в литературе как барицентрические координаты [3], которые для каждого треугольника имеют вид

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{X_{22} - X_{23}}{2S}(x_1 - X_{12}) - \frac{X_{12} - X_{13}}{2S}(x_2 - X_{22}) \\ g_2 &= \frac{X_{23} - X_{21}}{2S}(x_1 - X_{13}) - \frac{X_{13} - X_{11}}{2S}(x_2 - X_{23}) \\ g_3 &= \frac{X_{21} - X_{22}}{2S}(x_1 - X_{11}) - \frac{X_{11} - X_{12}}{2S}(x_2 - X_{21}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $X_{1k}$ ,  $X_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – координаты вершин рассматриваемого треугольника, а  $S$  – его площадь.

Такой выбор аппроксимаций полей перемещений и напряжений позволяет точно удовлетворить полиномиальные граничные условия (2.4)–(2.6) и уравнения равновесия (2.1) на каждом элементе при соответствующем выборе степеней полиномов  $n_\sigma$  и  $n_u$  [8–10].

Определенные таким образом аппроксимации должны удовлетворять условиямстыковки на границах любых смежных треугольников. Рассмотрим два треугольника  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$  с общей стороной  $\gamma_{\alpha\beta}$ , на которых заданы перемещения  $\mathbf{u}_\alpha$ ,  $\mathbf{u}_\beta$  и напряжения  $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_\beta$  соответственно. Непрерывность полей перемещений требует выполнения равенства

$$(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)|_{\gamma_{\alpha\beta}} = 0 \quad (4.3)$$

а условие равновесия полей напряжений имеет вид

$$(\boldsymbol{\sigma}_\alpha - \boldsymbol{\sigma}_\beta) \cdot \mathbf{n}_{\alpha\beta}|_{\gamma_{\alpha\beta}} = 0 \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{n}_{\alpha\beta}$  – нормаль к общей стороне этих треугольников.

После аналитического интегрирования по области  $\Omega$  [3] задача (3.12) при ограничениях (2.1), (2.3)–(2.6) сводится к минимизации соответствующей квадратичной формы

$$\Phi_3 = \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{w} \rightarrow \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \quad (4.5)$$

Здесь  $\mathbf{w}$  –  $N$ -мерный вектор независимых проектных параметров, полученный из оставшихся неопределенными коэффициентов  $\mathbf{u}^{i,j,(n_u-i-j)}$  и  $\boldsymbol{\sigma}^{i,j,(n_\sigma-i-j)}$  в (4.1) после удовлетворения уравнения равновесия (2.1), граничных условий (2.4)–(2.6) и условий стыковки (4.3), (4.4) для всех треугольных элементов;  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  – симметричная положительная матрица;  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  – вектор, определяемый из граничных условий.

Вектор  $\mathbf{w}^*$ , доставляющий минимум соответствующему функционалу  $\Phi_3$  (4.5), находится из решения линейной системы уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{w} + \mathbf{b} = 0 \quad (4.6)$$

Согласно теореме, сформулированной в п. 3, в случае отсутствия граничных условий типа (2.6) задача минимизации функционала  $\Phi_3$  в (4.5) эквивалентна двум оптимизационным задачам (2.8) и (2.10), которые в конечномерном приближении сводятся к двум независимым системам линейных уравнений

$$\mathbf{K}_u \mathbf{w}_u + \mathbf{b}_u = 0, \quad \mathbf{K}_\sigma \mathbf{w}_\sigma + \mathbf{b}_\sigma = 0 \quad (4.7)$$

Здесь  $\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_\sigma$  – векторы независимых проектных параметров, составленные соответственно только из коэффициентов  $\mathbf{u}^{i, j, (n_u - i - j)}$  или  $\boldsymbol{\sigma}^{i, j, (n_\sigma - i - j)}$  в (4.1).

Если  $\bar{u}_i = 0$  ( $x \in \gamma_2^i$ ) или  $\gamma_2^i = \emptyset$  ( $i = 1, 2$ ), для произвольных допустимых перемещений и напряжений справедливо неравенство (3.18). Тогда для  $\mathbf{w}_u^*, \mathbf{w}_\sigma^*$ , которые являются решениями систем в (4.7), выполняются соотношения

$$\Pi(\mathbf{w}_u^*) = -W(\mathbf{w}_u^*) = -W_u(\mathbf{w}_u^*), \quad \Pi_c(\mathbf{w}_\sigma^*) = W_\sigma(\mathbf{w}_\sigma^*)$$

$$W_u = (\mathbf{w}_u^*)^T \mathbf{K}_u \mathbf{w}_u^*, \quad W = -\mathbf{b}_u^T \mathbf{w}_u^* = 0 \quad (4.8)$$

$$\Phi_3(\mathbf{w}_u^*, \mathbf{w}_\sigma^*) = W_\sigma(\mathbf{w}_\sigma^*) - W_u(\mathbf{w}_u^*), \quad W_u(\mathbf{w}_u^*) \leq W(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \leq W_\sigma(\mathbf{w}_\sigma^*)$$

где  $\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*$  – действительны перемещения и напряжения.

Если же  $\bar{q}_i = 0$  ( $x \in \gamma_1^i$ ) или  $\gamma_1^i = \emptyset$  ( $i = 1, 2, 3$ ), согласно (3.19) верны оценки

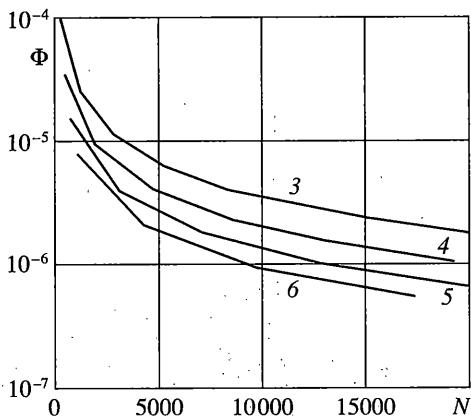
$$\Pi_c(\mathbf{w}_\sigma^*) = -W(\mathbf{w}_\sigma^*) = -W_\sigma(\mathbf{w}_\sigma^*), \quad \Pi(\mathbf{w}_u^*) = W_u(\mathbf{w}_u^*)$$

$$W_\sigma = (\mathbf{w}_\sigma^*)^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{w}_\sigma^*, \quad W = -\mathbf{b}_\sigma^T \mathbf{w}_\sigma^* = 0$$

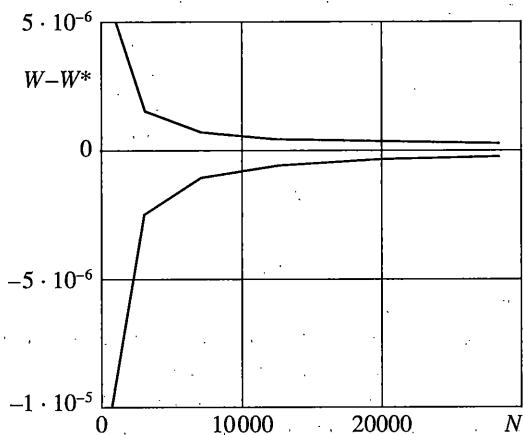
$$\Phi_3(\mathbf{w}_u^*, \mathbf{w}_\sigma^*) = W_u(\mathbf{w}_u^*) - W_\sigma(\mathbf{w}_\sigma^*), \quad W_\sigma(\mathbf{w}_\sigma^*) \leq W(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) \leq W_u(\mathbf{w}_u^*)$$

**5. Численные примеры. Пример 1.** Рассмотрим упругую прямоугольную пластину размерами  $2l \times 2h$  единичной толщины, напряженно-деформированное состояние которой описывается двумерной системой уравнений линейной теории упругости. Введем декартову систему координат  $Ox_1x_2$ , начало которой расположено в середине пластины, а ось  $x_1$  параллельна сторонам длиной  $2l$ . Считается, что пластина состоит из двух различных изотропных материалов. При  $x_1 < 0$  модуль Юнга равен  $E_1$ , а при  $x_1 > 0 - E_2$ . Коэффициенты Пуассона  $\mu$  для обоих материалов одинаковы. Пластина нагружена с двух сторон:  $x_1 = \pm l$  равномерно распределенной силой  $\sigma_{11}(\pm l, x_2) = q = \text{const}$ ,  $\sigma_{12}(\pm l, x_2) = 0$ , остальные стороны свободны от нагрузок ( $\sigma_{12}(x_1, \pm h) = \sigma_{22}(x_1, \pm h) = 0$ ). Вследствие симметрии задачи относительно оси  $x_1$  можно рассмотреть, например, только часть пластины  $x_2 \geq 0$ , вводя граничные условия  $u_2(x_1, 0) = \sigma_{12}(x_1, 0) = 0$ ,  $u_1(0, 0) = 0$ .

Зададим равномерную триангуляцию прямоугольной области  $\Omega$  ( $|x_1| \leq l, 0 \leq x_2 \leq h$ ) следующим образом. Сначала область разбивается на  $2m \times m$  одинаковых прямоугольников, где  $m > 0$  – параметр сетки, характеризующий размерность задачи. После этого каждый полученный прямоугольник делится на два треугольника, координаты вершин которых определяются из соотношений  $X_1^{(i,j)} = -l + il/m$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2m$ ;  $X_2^{(i,j)} = jh/m$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

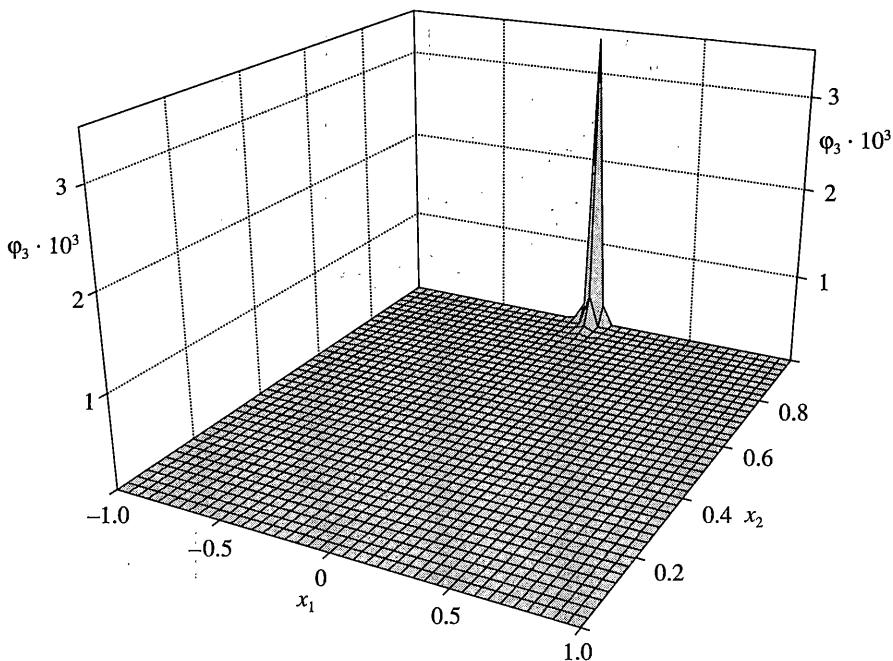
Зададим степени полиномов  $n_u$  и  $n_\sigma$ , аппроксимирующих поля перемещений и напряжений, так, чтобы они были одинаковы для всех элементов и связаны соотношением  $n_u = n_\sigma + 1$ .

В данном примере задача минимизации (4.5) эквивалентна двум задачам (4.7), для которых справедливы двусторонние энергетические оценки (4.8).

При численном моделировании были выбраны безразмерные параметры:  $l = 1$ ,  $h = 1$ ,  $E_1 = 1/2$ ,  $E_2 = 1$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $q = 1$ . Для исследования сходимости предложенного алгоритма менялись параметр сетки ( $m = 1, \dots, 16$ ) и степень полиномов ( $n_u = 3, 4, 5, 6$ ). Найденное приближенное значение запасенной упругой энергии  $W^* = 1.4974343$ .

На фиг. 1 показано монотонное убывание значений функционала  $\Phi_3$  с увеличением размерности  $N$  вектора проектных параметров  $w$  для различных степеней  $n_u$  (линии 3–6). С ростом  $n_u$  значение  $\Phi_3$  также уменьшается.

Для степени аппроксимаций перемещений  $n_u = 5$  на фиг. 2 представлены двусторонние оценки запасенной пластиной упругой энергии  $W^*$ . Отметим монотонное увеличение приближенных значений энергии деформации  $W_u(w^*) = W(w^*)$  и монотонное уменьшение энергии напряжений  $W_\sigma(w^*)$  с ростом параметра сетки  $m$  и соответственно раз-



Фиг. 3

мерности задачи  $N$ . При  $N \approx 30000$  удалось уменьшить относительную ошибку вычисления  $W^*$  до  $\delta = \Phi_3/W < 10^{-7}$ .

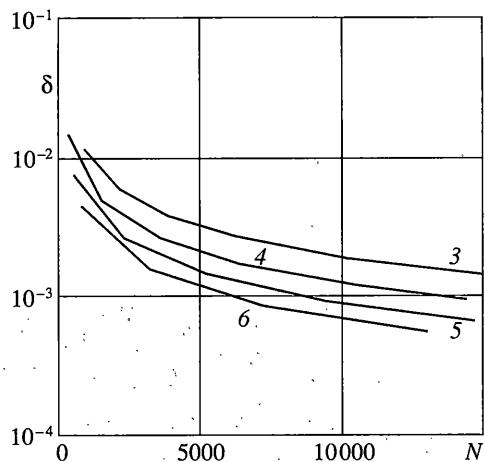
На фиг. 3 для  $m = 6$ ,  $n_u = 5$  показано распределение подынтегральной функции  $\Phi_3(x_1, x_2)$ , определенной в (3.11), которая может служить локальным критерием качества приближенного решения. Отметим, что функция  $\Phi_3$  близка к нулю почти везде, за исключением малой окрестности граничной точки с координатами  $x = \{0, 1\}$ , которая принадлежит линии раздела двух материалов.

**Пример 2.** Рассмотрим прямоугольную изотропную упругую пластину размерами  $2l \times h$  единичной толщины. Введем декартову систему координат  $Ox_1x_2$ , начало которой расположено в середине стороны длины  $2l$ , а ось  $x_1$  параллельна этой стороне. Пластина нагружена на стороне  $x_2 = h$  равномерно распределенной силой  $\sigma_{22}(x_1, h) = q = \text{const}$  ( $\sigma_{12}(x_1, h) = 0$ ), на сторонах  $x_1 = \pm l$  запрещены упругие смещения  $u_1(\pm l, x_2) = u_2(\pm l, x_2) = 0$ , а на стороне  $x_2 = 0$  заданы смешанные граничные условия (упругое основание)  $\sigma_{22}(x_1, 0) = \kappa u_2(x_1, 0)$ ,  $\sigma_{12}(x_1, 0) = 0$ . Вследствие симметрии задачи относительно оси  $x_2$  можно рассмотреть только часть пластины  $x_1 \geq 0$ , задавая граничные условия  $u_1(0, x_2) = \sigma_{12}(0, x_2) = 0$ .

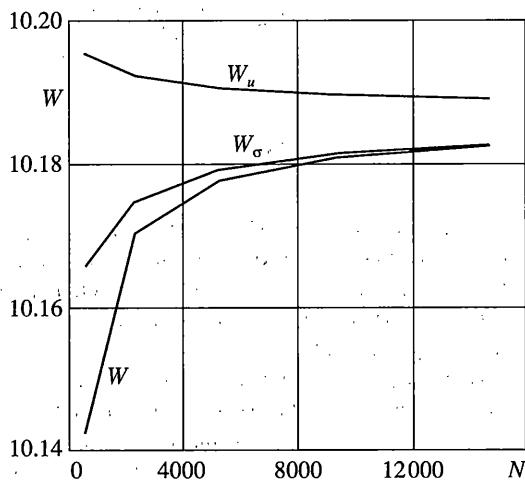
Введем равномерную триангуляцию прямоугольной области  $\Omega$ , разбив ее на  $3m \times 2m$  прямоугольников, каждый из которых в свою очередь разделен диагональю на два треугольника с координатами вершин:  $X_1^{(i,j)} = il/(3m)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 3m$ ;  $X_2^{(i,j)} = jh/(2m)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2m$ .

Зададим степени полиномов  $n_u$  и  $n_\sigma$  так же, как и в примере 1. В данном случае задача минимизации (4.5) должна решаться совместно в перемещениях и напряжениях.

При численном моделировании были выбраны безразмерные параметры:  $l = 5$ ,  $h = 1$ , модуль Юнга  $E = 1$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ ,  $q = 1$ ,  $\kappa = 0.1$ . Для исследования схो-



Фиг. 4



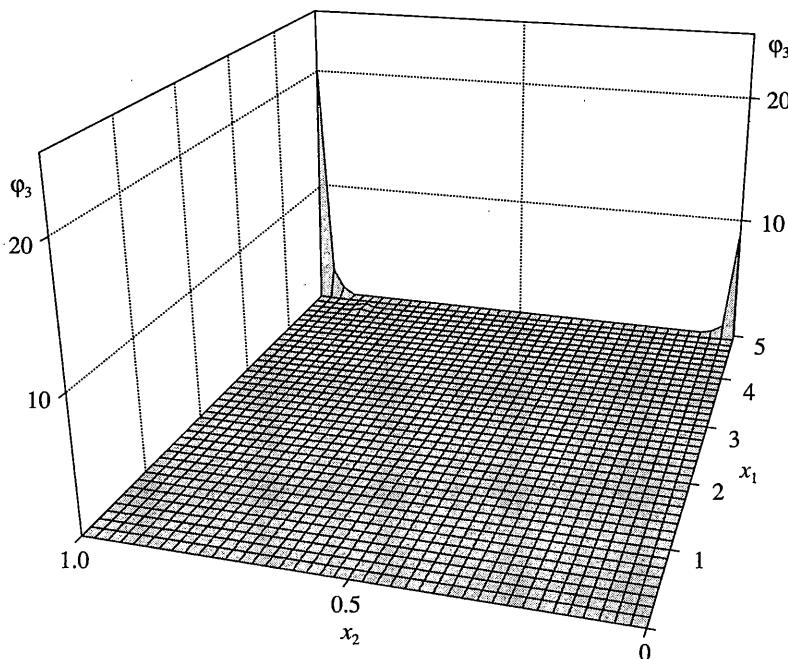
Фиг. 5

димости менялись параметр  $m = 1, \dots, 8$  и степень  $n_u = 3, 4, 5, 6$ . Найденное значение упругой энергии  $W^* \approx 10.186$ .

На фиг. 4 показано убывание относительных значений функционала  $\delta = \Phi_0/W$  (интегральная относительная ошибка) с увеличением размерности  $N$  вектора проектных параметров  $w$  для различных  $n_u$  (линии 3–6).

Для  $n_u = 5$  на фиг. 5 представлены зависимости приближенных значений упругой энергии  $W_u$ ,  $W_\sigma$ ,  $W$  от  $N$ . Для заданной триангуляции и выбранной степени  $n_u$  справедливо неравенство  $W \leq W_\sigma \leq W_u$ . Интегральным критерием качества полученного приближенного решения для данного типа краевых условий служит относительная ошибка  $\delta \geq 0$ . Для  $N \approx 15000$  достигнуто значение  $\delta < 10^{-3}$ .

На фиг. 6 для  $m = 4$ ,  $n_u = 5$  показано распределение локальной ошибки  $\varphi_3(x_1, x_2)$ , определенной в (3.11). Как и в примере 1, функция  $\varphi_3$  близка к нулю почти везде, за исключением двух малых окрестностей угловых точек с координатами  $x' = \{5, 0\}$  и  $x'' = \{5, 1\}$ .



Фиг. 6

**6. Заключение.** Предложенный в этой работе метод интегродифференциальных соотношений для решения задач линейной теории упругости может рассматриваться как альтернативный к классическим подходам, основанным на вариационных принципах. Главная идея этого метода состоит в том, что алгебраическая формулировка закона Гука заменяется интегральным равенством и краевая задача сводится к минимизации некоторого неотрицательного квадратичного функционала при заданных дифференциальных и алгебраических ограничениях (уравнения равновесия и граничные условия). Рассмотренные функционалы являются критериями качества полученных численных решений и дают возможность построить двусторонние оценки различных интегральных характеристик (запасенной упругой энергии, перемещений и т.д.). Разработанный численный алгоритм решения задач линейной теории упругости, основанный на кусочно-полиномиальных аппроксимациях неизвестных функций напряжений и перемещений, может быть обобщен на пространственный случай и применен к исследованию анизотропных тел и конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 05-01-00563, 05-08-18094) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1245.2006.1, НШ-9831.2006.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
2. Съярле Ф. Метод конечных элементов для решения эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.

5. Kwon K.C., Park S.H., Jiang B.N., Youn S.K. The least squares mesh-free method for solving linear elastic problems // Comput. Mech. 203. V. 30. № 3. P. 196–211.
6. Atluri S.N., Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics // Computational mechanics. 1998. V. 22. № 2. P. 117–127.
7. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-free Galerkin method // Intern. J. Numer. Methods in engng. 1994. V. 37. № 2. P. 229–256.
8. Костин Г.В., Саурин В.В. Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 5. С. 628–631.
9. Костин Г.В., Саурин В.В. Интегро-дифференциальная постановка и вариационный метод решения задач линейной теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Н-Новгород. 2005. Вып. 67. С. 190–198.
10. Kostin G.V., Saurin V.V. The method of integrodifferential relations for linear elasticity problems // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 76. № 7–8. P. 391–402.
11. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
12. Хог Э., Апора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 479 с.
13. Kostin G.V., Saurin V.V. Analytical derivation of basis functions for Argyris triangle // ZAMM. 2001. V. 81. Suppl. 4. P. 871–872.
14. Kostin G.V., Saurin V.V. Analysis of triangle membrane vibration by FEM and Ritz method with smooth piecewise polynomial basis functions // ZAMM. 2001. V. 81. Suppl. 4. P. 873–874.
15. Хан X. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию

24.10.2005

окончательный вариант 20.12.2006