МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2007

УДК 531.3

© 2007 г. А.В. МОЛОДЕНКОВ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДАРБУ

Рассматривается задача определения углового положения твердого тела в пространстве по его известной угловой скорости и начальному положению (задача Дарбу) в кватернионной постановке. Приводится решение задачи для произвольного вектора угловой скорости твердого тела, построенное на основе рекуррентных соотношений И.А. Лаппо-Данилевского [1]. Получены новые частные случаи разрешимости задачи Дарбу в замкнутой форме.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для кватернионного кинематического уравнения [2, 3] с произвольной заданной дифференцируемой вектор-функцией угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, записанную в следующей форме:

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_0) = \boldsymbol{\Lambda}_0, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{i}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ – орты гиперкомплексного пространства, $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ – кватернион, описывающий положение твердого тела в инерциальном пространстве; $\boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор угловой скорости твердого тела, заданный своими проекциями на оси системы координат, связанной с твердым телом; символ "$\circ$" означает кватернионное произведение; $\boldsymbol{\Lambda}_0$ – начальное значение кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ при $t = t_0$, $t \in [t_0, \infty)$ (для простоты положим $\boldsymbol{\Lambda}_0 = 1$, $t_0 = 0$). Требуется определить кватернион $\boldsymbol{\Lambda}(t)$.

Кватернионной записи задачи эквивалентна запись в матричной форме с использованием, например, кватернионных матриц $\mathbf{n}$-типа [4]:

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$2\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda})^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega}(t))\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}) \tag{1.4}$$

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}(t_0)) = \mathbf{n}(\boldsymbol{\Lambda}_0) \tag{1.5}$$

Задача (1.1), (1.2), ((1.4),(1.5)) и есть задача Дарбу в кватернионной постановке.

Известно несколько подходов к решению данной задачи: сведение с помощью замен переменных исходных уравнений к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати (подход Дарбу [2]) или к линейному дифференциальному уравнению второго порядка [5] с переменными коэффициентами относительно комплексной неизвестной; отождествление задачи Дарбу с задачей определения вектор-функции по известным модулям ее производных [6], когда задача Дарбу сводится к решению линейного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами относительно действительной неизвестной. При этом аналитическое решение задачи Дарбу в замкнутой форме для произвольного вектора угловой скорости твердого тела при всех подходах неизвестно. Найдено лишь несколько частных случаев, допускающих построение точного решения этой задачи [3, 7–12].

Вместе с тем, как показано в [13], система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кососимметрической матрицей коэффициентов является приводимой по Ляпунову, т.е. существует замена переменных (преобразование Ляпунова), приводящая данную систему к системе с постоянными коэффициентами. Система уравнений (1.4) задачи Дарбу имеет кососимметрическую матрицу коэффициентов и, таким образом, задача Дарбу является приводимой по Ляпунову. Следовательно, поиск решения задачи Дарбу в замкнутой форме для общего случая заданной угловой скорости твердого тела не является безнадежным.

2. Приведение задачи Дарбу к удобной для изучения форме. Осуществим в задаче (1.1), (1.2) ряд замен переменных, упрощающих задачу. Замена зависимой переменной в уравнении типа (1.1) будет иметь вид

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U} \circ \mathbf{V} \tag{2.1}$$

$$2\mathbf{U}^{\bullet} = \mathbf{U} \circ \mathbf{B}(t) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{V}^{-1} - 2\mathbf{V}^{\bullet} \circ \mathbf{V}^{-1} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ – новая искомая кватернионная переменная, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ – задаваемый оператор (кватернион) перехода к новому уравнению вида (2.2), $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ – кватернионный коэффициент уравнения (2.2), имеющий смысл угловой скорости некоторой новой системы координат.

Для большей наглядности проводимых ниже замен переменных типа (2.1), (2.2) ортогональное преобразование $\mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{V}^{-1}$, входящее в (2.3), приведем в координатной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{V}^{-1} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3$$

$$r_1 = (\omega_1(\upsilon_0^2 + \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 - \upsilon^2) + 2\omega_2(\upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_0\upsilon_3) + 2\omega_3(\upsilon_1\upsilon_3 + \upsilon_0\upsilon_2))/\|\mathbf{V}\|$$

$$r_2 = (2\omega_1(\upsilon_1\upsilon_2 + \upsilon_0\upsilon_3) + \omega_2(\upsilon_0^2 + \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 - \upsilon_3^2) + 2\omega_3(\upsilon_2\upsilon_3 - \upsilon_0\upsilon_1))/\|\mathbf{V}\|$$

$$r_3 = (2\omega_1(\upsilon_1\upsilon_3 - \upsilon_0\upsilon_2) + 2\omega_2(\upsilon_2\upsilon_3 + \upsilon_0\upsilon_1) + \omega_3(\upsilon_0^2 + \upsilon_3^2 - \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2))/\|\mathbf{V}\|$$

Рассмотрим замену зависимой переменной

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{V} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{V}(t) = \exp\left(\mathbf{i}_3\int_0^t \nu(\tau)d\tau/2\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_1\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau/2\right)\\ \nu(t) = \sin\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_2 + \cos\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_3\end{gathered} \tag{2.5}$$

$\exp(\circ)$ обозначает кватернионную экспоненту [4]:

$$\exp(\mathbf{Z}) = \exp(z_0)(\cos(|\mathbf{z}_\mathrm{v}|) + \sin(|\mathbf{z}_\mathrm{v}|)\mathbf{z}_\mathrm{v}/|\mathbf{z}_\mathrm{v}|)$$

$$\mathbf{z}_\nu = z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3, \quad |\mathbf{z}_\nu| = (z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3)^{1/2}$$

z_0, $\mathbf{z}_\nu$ – скалярная и векторная часть кватерниона $\mathbf{Z}$ соответственно (векторная часть кватерниона $\mathbf{Z}(t)$ при этом должна иметь постоянное направление).

В результате задача Дарбу (1.1), (1.2) перейдет в задачу

$$2\mathbf{U}_1^{\bullet} = \mathbf{U}_1 \circ \mu(t)\left(-\mathbf{i}_1\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) + \mathbf{i}_2\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right)\right) \tag{2.6}$$

$$\mu(t) = \cos\left(\int_0^t \omega_1\tau d\tau\right)\omega_2 - \sin\left(\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right)\omega_3 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{U}_1(0) = 1 \tag{2.8}$$

а $\nu(t)$ определяется формулой (2.5). Осуществим теперь замену независимой переменной t:

$$\begin{gathered} t \to \varphi, \quad \varphi = \int_0^t \nu(\tau)d\tau = \Phi(t), \quad t = \Phi^{-1}(\varphi) \\ d\varphi = \nu(t)dt, \quad d\varphi/dt = \nu(t) \end{gathered} \tag{2.9}$$

Получим

$$2d\mathbf{U}_2/d\varphi = \mathbf{U}_2 \circ \boldsymbol{\omega}(\varphi) \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\varphi) = f(\varphi)(-\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi) \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{U}_2(0) = 1 \\ \mathbf{U}_2(\varphi) = \mathbf{U}_1(\Phi^{-1}(\varphi)), \quad f(\varphi) = \mu(\Phi^{-1}(\varphi))/\nu(\Phi^{-1}(\varphi)) \end{gathered} \tag{2.12}$$

Следует отметить, что замена переменной (2.9) носит локальный характер, так как должна существовать однозначная обратная функция $\Phi^{-1}(\varphi)$. Однако она не является обязательной с точки зрения дальнейшего рассмотрения задачи Дарбу и проведена для придания большей наглядности задаче (2.6), (2.8).

Векторный коэффициент в уравнении (2.10) по-прежнему имеет смысл вектора угловой скорости некоторой системы координат, но в отличие от произвольного переменного вектора $\boldsymbol{\omega}(t)$ в уравнении (1.1), в (2.10) вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (2.11), оставаясь, в общем случае, переменным по модулю, совершает вполне определенное движение – вращается в плоскости ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$) вокруг оси $\mathbf{i}_3$ (данное движение является частным случаем конической прецессии).

Отметим некоторые факты, возникающие в связи с изучением проблемы интегрируемости кватернионного кинематического уравнения вращения в форме (2.9).

Осуществим в (2.10) замену зависимой переменной типа (2.1)–(2.3):

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_3 \circ \exp(-\mathbf{i}_3\varphi/2) \tag{2.13}$$

Тогда

$$2d\mathbf{U}_3/d\varphi = \mathbf{U}_3 \circ \mathbf{w}(\varphi) \tag{2.14}$$

$$\mathbf{w}(\varphi) = f(\varphi)(-\mathbf{i}_1\sin(\varphi/2) + \mathbf{i}_2\cos(\varphi/2)) + \mathbf{i}_3(1/2) \tag{2.15}$$

Нахождение решения уравнения (2.14) по-прежнему остается трудной задачей, однако решение уравнения

$$2d\psi/d\varphi = \mathbf{w}(\varphi)\circ\psi \tag{2.16}$$

отличающегося от уравнения (2.14) только положением переменного векторного коэффициента $\mathbf{w}$ (2.15), легко находится

$$\psi = \exp(\mathbf{i}_3\varphi/4)\circ\exp\left(\mathbf{i}_2\int_0^{\varphi} f(\tau)d\tau/2\right)\circ\mathbf{C}$$

Здесь и далее $\mathbf{C}$ – произвольная кватернионная постоянная интегрирования.

Таким образом, возникает вопрос о существовании связи между решениями уравнений (2.14) и (2.16) или, более широко, между решениями уравнений $2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}$ и $2\dot{\mathbf{\Psi}} = \boldsymbol{\omega}\circ\mathbf{\Psi}$, где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ произвольный вектор. Ответ достаточно очевиден лишь для случаев, когда вектор угловой скорости имеет не более двух компонент или является постоянным по направлению. В самом деле, если $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$, то $\mathbf{\Lambda}\circ\mathbf{i}_1\circ\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}_1 = \mathbf{const}$. Если $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$, то $\mathbf{\Lambda}\circ\mathbf{i}_2\circ\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}_2 = \mathbf{const}$. Если $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2$, то $\mathbf{\Lambda}\circ\mathbf{i}_3\circ\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}_3 = \mathbf{const}$. Если $\boldsymbol{\omega}(t) = q(t)\boldsymbol{\omega}^*$, $q(t)$ – некоторая функция, $\boldsymbol{\omega}^* = \omega_1^*\mathbf{i}_1 + \omega_2^*\mathbf{i}_2 + \omega_3^*\mathbf{i}_3 = \mathbf{const}$, то $\mathbf{\Lambda}(t)$ и $\mathbf{\Psi}(t)$ выражаются через $\exp\left(\boldsymbol{\omega}^*\int_0^t q(\tau)d\tau/2\right)$.

Отметим еще один момент, возникающий при исследовании вопроса интегрируемости кватернионного уравнения (2.14). Подобно уравнению (2.16), легко находится решение уравнения, сопряженного по отношению к (2.16)):

$$2d\tilde{\psi}/d\varphi = -\tilde{\psi}\circ\mathbf{w}(\varphi) \tag{2.17}$$

и отличающегося от уравнения (2.14) только знаком правой части:

$$\tilde{\psi} = \mathbf{C}\circ\exp\left(-\mathbf{i}_2\int_0^{\varphi} f(\tau)d\tau/2\right)\circ\exp(-\mathbf{i}_3\varphi/4) \tag{2.18}$$

Таким образом, решение кватернионного уравнения (2.14) с вектором угловой скорости $\mathbf{w}(t)$, к которому сводится задача Дарбу, в замкнутой форме найти затруднительно. Решение же уравнения (2.17) с противоположно направленным вектором угловой скорости находится легко и, как видно из (2.18), допускает ясную геометрическую интерпретацию: оно является композицией двух поворотов (вокруг осей $\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{i}_2$) на соответствующие углы.

Следует также отметить, что в литературе [8, 9] существует ошибочное рассуждение о решении линейной дифференциальной системы типа (2.10) в замкнутой форме. Если бы решение системы (2.10) было бы действительно найдено, то была бы, тем самым, решена проблема Дарбу. В силу важности обсуждаемого вопроса рассмотрим его по [8, 9].

В [8, 9] рассматривается решение задачи типа (2.10) не в кватернионной форме, а в виде линейной нестационарной системы Пуассона

$$\dot{\mathbf{x}} = \omega^{\vee}(t)\mathbf{x},\quad \omega^{\vee}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

в которой $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ – вектор направляющих косинусов некоторой оси подвижной системы координат $OXYZ$, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$. Матрица ориентации $A_{x\xi}$ трехгранника $OXYZ$ относительно трехгранника $O\xi\eta\zeta$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{A}_{x\xi} = \omega^{\vee}(t)A_{x\xi} \tag{2.19}$$

В [8, 9] сказано: «... Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ представляется в виде $\boldsymbol{\omega}(t) = \psi(t)\boldsymbol{\omega}^*(t)$, где $\psi(t)$ – некоторая скалярная функция, а вектор $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ подчиняется уравнению (матрица $b^{\vee}$ соответствует постоянному вектору $\mathbf{b}$) $\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = b^{\vee}\boldsymbol{\omega}^*(t)$. Матрица $\omega^{\vee}(t)$ в этом случае удовлетворяет уравнению

$$d(\omega^{\vee}(t)/\psi(t))/dt = A_1\omega^{\vee}(t) - \omega^{\vee}(t)A_1 \tag{2.20}$$

при $A_1 = b^{\vee}$. ... Фундаментальная матрица системы (2.19) определяется по формуле

$$A_{x\xi} = \exp(b^{\vee}t)\exp[(\omega^{\vee}(0) - b^{\vee})t]...\text{»} \tag{2.21}$$

Покажем, что это не так, то есть вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ в данном случае не удовлетворяет уравнению (2.20). Пусть $\mathbf{b} = -\mathbf{i}_3$ или, в соответствующей матричной записи

$$b^{\vee} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда $\boldsymbol{\omega}^*(t) = [-\sin t, \cos t, c]^T$ ($c = \text{const}$). Проверим это:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^*(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ c \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = b^{\vee}\boldsymbol{\omega}^* \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ c \end{bmatrix}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{\omega}^*(t) = [-\sin t, \cos t, 0]^T$ также удовлетворяет этому уравнению, а вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ может иметь вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \psi(t)(-\mathbf{i}_1\sin t + \mathbf{i}_2\cos t) \tag{2.22}$$

Таким образом, в [8, 9] рассматривается тот же самый случай угловой скорости, что и в уравнении (2.10). Однако $\omega^{\vee}(t)$ не удовлетворяет уравнению (2.20):

$$d(\omega^{\vee}(t)/\psi(t))/dt = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{bmatrix} \neq A_1\omega^{\vee}(t) - \omega^{\vee}(t)A_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos t \\ 0 & 0 & -\sin t \\ \cos t & \sin t & 0 \end{bmatrix} \psi(t) - \psi(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos t \\ 0 & 0 & -\sin t \\ \cos t & \sin t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Как видно, угловая скорость (2.22) будет удовлетворять уравнению (2.20) только в том случае, когда $\psi = 1$, то есть когда задача с угловой скоростью (2.22) будет представлять собой хорошо изученный случай классической прецессии с постоянным по модулю вектором угловой скорости [3, 8, 9, 12]. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что предлагаемая фундаментальная матрица (2.21) не будет обращать в тождество уравнение (2.19) при заданной угловой скорости (2.22).

3. Решение задачи Дарбу на основе рекуррентных соотношений. Как было показано в п. 2, задача Дарбу (1.1), (1.2) с произвольным заданным вектором угловой скорости твердого тела сводится к задаче (2.6)–(2.8), решение которой в замкнутой форме найти по-прежнему затруднительно. Однако можно получить решение задачи (2.6)–(2.8) на основе рекуррентных соотношений И.А. Лаппо-Данилевского [1], которые справедливы для линейных дифференциальных систем второго порядка. Матрицы коэффициентов этих систем должны быть разложимы на сумму двух произвольных постоянных матриц, умноженных на две произвольные аналитические функции соответственно.

Для этого перепишем задачу (2.6)–(2.8) в матричном виде с использованием комплексных параметров Кейли – Клейна [3]:

$$\mathbf{Y}^{\bullet} = \mathbf{Y}[\mathbf{N}_1 g_1(t) + \mathbf{N}_2 g_2(t)] \tag{3.1}$$

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha = u_0 + iu_3, \quad \beta = u_2 + iu_1, \quad \gamma = u_2 + iu_1, \quad \delta = u_0 - iu_3 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$g_1(t) = -i\mu(t)\sin\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right), \quad g_2(t) = \mu(t)\cos\left(\int_0^t \nu(\tau)d\tau\right) \tag{3.4}$$

где $u_j, j = \overline{0,3}$ – компоненты кватерниона $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{E}$ обозначает единичную матрицу.

Так как сведение исходной задачи Дарбу (1.1), (1.2) к задаче вида (3.1)–(3.4) носит не единственный характер, то в выражениях (3.1), (3.4) матрицы $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ и функции $g_1(t)$, $g_2(t)$ могут иметь и другой вид.

Выполним процедуру, указанную в [1], для задачи (3.1), (3.2). Обозначим через $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$, и $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$ характеристические числа матриц $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ (3.4) и положим $\mathbf{N}_1 - \xi_1^{(1)}\mathbf{E} = \overline{\mathbf{N}}_1$, $\mathbf{N}_2 - \xi_2^{(1)}\mathbf{E} = \overline{\mathbf{N}}_2$. Получим

$$\xi_1^{(1)} = 1, \quad \xi_1^{(2)} = -1; \quad \xi_2^{(1)} = i, \quad \xi_2^{(2)} = -i \tag{3.5}$$

$$\overline{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{N}}_2 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Характеристические числа двух новых матриц равны:

$$0, \quad \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \xi_1 = -2; \quad 0, \quad \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} = \xi_2 = -2i \tag{3.7}$$

Положим еще

$$\sigma(\overline{\mathbf{N}}_1\overline{\mathbf{N}}_2) = \rho = 2i \tag{3.8}$$

где $\sigma(\circ)$ обозначает след матрицы.

В соответствии с [1] интегральная матрица системы (3.1), обращающаяся в единичную матрицу $\mathbf{E}$ в точке $t = 0$, может быть представлена в виде

$$\mathbf{Y}(t) = \exp\left[\int_0^t [\xi_1^{(1)} g_1(\tau) + \xi_2^{(1)} g_2(\tau)]d\tau\right][\mathbf{E} + \overline{\mathbf{N}}_1\varphi_{11}(\rho|\xi_1\xi_2|t) + \overline{\mathbf{N}}_1\overline{\mathbf{N}}_2\varphi_{12}(\rho|\xi_1\xi_2|t) + \tag{3.9}$$
$$+ \overline{\mathbf{N}}_2\overline{\mathbf{N}}_1\varphi_{21}(\rho|\xi_1\xi_2|t) + \overline{\mathbf{N}}_2\varphi_{22}(\rho|\xi_1\xi_2 t|)]$$

где коэффициенты $\varphi_{kl}(\rho|\xi_1\xi_2|t)$ $(k, l = 1, 2)$ суть целые функции параметра ρ:

$$\varphi_{kl}(\rho|\xi_1\xi_2|t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho^\nu \varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|t) \tag{3.10}$$

причем функции $\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|t)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\varphi_{11}^{(0)}(\xi_1\xi_2|t) = \left[\exp\left[\xi_1\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right] - 1\right]/\xi_1$$

$$\varphi_{12}^{(0)}(\xi_1\xi_2|t) = \exp\left[\xi_2\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right]\int_0^t g_2(\tau)\exp\left[\int_0^\tau [\xi_1 g_1(\tau') - \xi_2 g_2(\tau')]d\tau'\right]d\tau/\xi_1 -$$
$$-\left[\exp\left[\xi_2\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right] - 1\right]/\xi_1\xi_2$$

$$\varphi_{21}^{(0)}(\xi_1\xi_2|t) = \exp\left[\xi_1\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right]\int_0^t g_1(\tau)\exp\left[\int_0^\tau [\xi_2 g_2(\tau') - \xi_1 g_1(\tau')]d\tau'\right]d\tau/\xi_2 -$$
$$-\left[\exp\left[\xi_1\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right] - 1\right]/\xi_1\xi_2 \tag{3.11}$$

$$\varphi_{22}^{(0)}(\xi_1\xi_2|t) = \left[\exp\left[\xi_2\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right] - 1\right]/\xi_2$$

$$\varphi_{11}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|t) = \exp\left[\xi_1\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right]\int_0^t g_1(\tau)\varphi_{12}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2|\tau)\exp\left[-\xi_1\int_0^\tau g_1(\tau')d\tau'\right]d\tau$$

$$\varphi_{12}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|t) = \exp\left[\xi_2\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right]\int_0^t g_2(\tau)\varphi_{11}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|\tau)\exp\left[-\xi_2\int_0^\tau g_2(\tau')d\tau'\right]d\tau$$

$$\varphi_{21}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|t) = \exp\left[\xi_1\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right]\int_0^t g_1(\tau)\varphi_{22}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|\tau)\exp\left[-\xi_1\int_0^\tau g_1(\tau')d\tau'\right]d\tau$$

$$\varphi_{22}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2|t) = \exp\left[\xi_2\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right]\int_0^t g_2(\tau)\varphi_{21}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2|\tau)\exp\left[-\xi_2\int_0^\tau g_2(\tau')d\tau'\right]d\tau, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Переходя от комплексных параметров Кейли–Клейна α, β, γ, δ обратно к компонентам кватерниона u_0, u_1, u_2, u_3 по формулам (3.3) и учитывая замену переменных (2.4), (2.5), получим решение задачи Дарбу (1.1), (1.2), построенное на основе рекуррентных соотношений (3.9)–(3.11).

4. Частные случаи решения задачи Дарбу в замкнутой форме. Немного изменим постановку задачи (1.1), (1.2), а именно, пусть

$$2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \chi(t)\mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}(t) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{\Lambda}(0) = 1 \tag{4.2}$$

где неизвестный кватернион $\mathbf{\Lambda}(t)$ и заданный вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ имеют тот же смысл, что и в задаче (1.1), (1.2), $\chi(t)$ – некоторая скалярная, пока не определенная функция времени $t \in [0, \infty)$. Требуется осуществить выбор функции $\chi(t)$ так, чтобы задача Коши (4.1), (4.2) была аналитически разрешима в замкнутой форме.

Рассмотрим одно из возможных решений задачи. Сделаем замену зависимой кватернионной переменной $\mathbf{\Lambda}(t)$ типа (2.1)–(2.3):

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{U}(t) \circ \mathbf{V}(t) \tag{4.3}$$

где $\mathbf{U}$ – новый неизвестный кватернион, а $\mathbf{V}$ – заданный кватернион вида

$$\mathbf{V}(t) = \nu_0(t) + \nu_3(t)\mathbf{i}_3 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \left(1 + \omega_2/(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}\right)^{1/2} \\ \nu_3 &= \left(1 - \omega_2/(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

При этом кватернионное дифференциальное уравнение для $\mathbf{U}$ имеет вид

$$2\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \circ (\chi\mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{V}^{-1} - 2\dot{\mathbf{V}} \circ \mathbf{V}^{-1}) \tag{4.6}$$

Кватернионный коэффициент уравнения (4.6) следующий

$$\chi\mathbf{V} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{V}^{-1}/2 - \dot{\mathbf{V}} \circ \mathbf{V}^{-1} = \rho(t)\mathbf{i}_2 + \sigma(t)\mathbf{i}_3 \tag{4.7}$$

$$\rho = \chi\gamma, \quad \gamma = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} \tag{4.8}$$

$$\sigma = \chi\omega_3 + (\dot{\omega}_2\omega_1 - \dot{\omega}_1\omega_2)/(\omega_1^2 + \omega_2^2) \tag{4.9}$$

Выберем $\chi(t)$ из соображения выполнения равенства $\sigma(t)/\rho(t) = k$ (k – произвольная постоянная):

$$\chi(t) = \frac{\dot{\omega}_2\omega_1 - \dot{\omega}_1\omega_2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(k(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} - \omega_3)} \tag{4.10}$$

где $\omega_j(t)$ для любого t должны быть подчинены условию

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2)(k(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} - \omega_3) \neq 0 \tag{4.11}$$

Таким образом, скалярная функция $\chi(t)$ явно выражается через компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Кватернионное уравнение (4.6) в итоге запишется в одном из двух видов:

$$2\dot{\mathbf{U}} = \frac{\dot{\omega}_2\omega_1 - \dot{\omega}_1\omega_2}{(k(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2} - \omega_3)(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2}}\mathbf{U}\circ(\mathbf{i}_2 + k\mathbf{i}_3) \tag{4.12}$$

$$2\dot{\mathbf{U}} = \chi(t)\gamma(t)\mathbf{U}\circ(\mathbf{i}_2 + k\mathbf{i}_3)$$

Аналитическое решение уравнения (4.12) имеет вид

$$\mathbf{U}(t) = \cos(\varphi(t)/2) + \mathbf{c}\sin(\varphi(t)/2)|\mathbf{c}| \tag{4.13}$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \chi(\xi)\gamma(\xi)d\xi, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i}_2 + k\mathbf{i}_3 \tag{4.14}$$

Итак, уравнение вида $2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \chi(t)\mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}(t)$, где $\chi(t)$ имеет вид (4.10), разрешимо для любого вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ (за исключением ограничения на равенство нулю знаменателя функции $\chi(t)$ (4.11)) и его решение представимо в явной форме:

$$\mathbf{\Lambda}(t) = (\cos(\varphi(t)/2) + \mathbf{c}\sin(\varphi(t)/2)/|\mathbf{c}|)\circ\mathbf{V} \tag{4.15}$$

где $\varphi(t)$ и $\mathbf{c}$ определяются (4.14), а кватернион $\mathbf{V}(t)$ задается выражениями (4.4), (4.5).

Полученный результат можно рассматривать и как частный случай интегрируемости общей задачи Дарбу (1.1), (1.2), когда заданная вектор-функция угловой скорости твердого тела, записанная в связанной с твердым телом системе координат, имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\omega}_2\omega_1 - \dot{\omega}_1\omega_2}{(\omega_1^2+\omega_2^2)(k(\omega_1^2+\omega_2^2)^{1/2} - \omega_3)}(\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3) \tag{4.16}$$

где $\omega_j = \omega_j(t)$ – произвольные дифференцируемые функции, подчиненные условию (4.11). Решение задачи дается явными выражениями (4.4), (4.5), (4.8), (4.10), (4.14), (4.15).

Следует отметить, что в отличие от известных случаев разрешимости задачи Дарбу в замкнутой форме, где накладываются жесткие ограничения на направление вектора угловой скорости (например, постоянное направление [3, 7], коническая прецессия [3, 8, 9, 12], обобщение этих двух вариантов [11], а также случаи интегрируемости [7, 10]), в найденном частном случае вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ имеет произвольное направление за исключением слабого ограничения (4.11). Интегрируемость задачи Дарбу (1.1), (1.2) тем самым достигается только за счет требования, накладываемого на модуль вектора угловой скорости твердого тела.

Аналогичным образом можно показать, что задача Дарбу (1.1), (1.2) разрешима в замкнутой форме, когда заданный в связанной с твердым телом системе координат вектор угловой скорости записывается в одной из двух форм:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\omega}_3\omega_2 - \dot{\omega}_2\omega_3}{(\omega_2^2+\omega_3^2)(k(\omega_2^2+\omega_3^2)^{1/2} - \omega_1)}(\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3),$$

$$(\omega_2^2+\omega_3^2)(k(\omega_2^2+\omega_3^2)^{1/2} - \omega_1) \neq 0, \quad \forall t$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\omega}_1\omega_3 - \dot{\omega}_3\omega_1}{(\omega_1^2+\omega_3^2)(k(\omega_1^2+\omega_3^2)^{1/2} - \omega_2)}(\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3),$$

$$(\omega_1^2+\omega_3^2)(k(\omega_1^2+\omega_3^2)^{1/2} - \omega_2) \neq 0, \quad \forall t$$

Следует отметить, что ряд новых частных случаев интегрируемости задачи Дарбу в замкнутой форме может быть получен также на основе выражений (2.5), (2.6), (2.7). В самом деле, если в задаче (2.6)–(2.8), к которой сводится исходная задача Дарбу (1.1), (1.2), потребовать

$$\mu(t) = k\nu(t), \quad k = \text{const} \tag{4.17}$$

то решение задачи Дарбу (1.1) запишется в виде

$$\boldsymbol{\Delta}(t) = \exp\left((k\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3)\int_0^t \nu(\tau)d\tau/2\right) \circ \exp\left(\mathbf{i}_1\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau/2\right)$$

где $\nu(t)$ определяется формулой (2.5).

Условие (4.17) можно достичь, задавая угловую скорость твердого тела в связанной системе координат, например, таким образом:

$$1)\ \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \frac{k\cos\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau - \sin\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau}{\cos\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau + k\sin\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau}\,\omega_2(t)\mathbf{i}_3$$

$$2)\ \boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \frac{\cos\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau + k\sin\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau}{k\cos\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau - \sin\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau}\,\omega_3(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$$

где $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ – произвольные функции времени t.

Также следует отметить, что частные случаи интегрируемости задачи Дарбу в замкнутой форме могут быть получены и на основе выражений типа (3.9) (при $\rho = 0$). В [1] указаны условия на матрицы $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ линейной дифференциальной системы вида (3.1), при которых $\rho = 0$: если матрицы $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ удовлетворяют одному из условий

$$2\sigma(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2) - \sigma(\mathbf{N}_1)\sigma(\mathbf{N}_2) + \varepsilon\sqrt{[\sigma(\mathbf{N}_1)^2 - 4\det(\mathbf{N}_1)]\cdot[\sigma(\mathbf{N}_2)^2 - 4\det(\mathbf{N}_2)]} = 0 \tag{4.18}$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, то интегральная матрица системы (3.1), обращающаяся в $\mathbf{E}$ в точке $t = 0$, может быть представлена в виде

$$\mathbf{Y}(t) = \exp\left[\int_0^t [\xi_1^{(1)}g_1(\tau) + \xi_2^{(1)}g_2(\tau)]d\tau\right][\mathbf{E} + \bar{\mathbf{N}}_1\varphi_{11}^{(0)} + \bar{\mathbf{N}}_1\bar{\mathbf{N}}_2\varphi_{12}^{(0)} + \bar{\mathbf{N}}_2\bar{\mathbf{N}}_1\varphi_{21}^{(0)} + \bar{\mathbf{N}}_2\varphi_{22}^{(0)}]$$

Накладывая определенные условия на вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ в исходной задаче (1.1), (1.2) и используя соответствующие замены переменных вида (2.1)–(2.3), можно получить достаточно широкий класс систем типа (3.1), удовлетворяющих условию (4.18). Тем самым будет получен еще целый ряд частных случаев интегрируемости задачи Дарбу (1.1), (1.2) с помощью квадратур.

5. Заключение. В статье предложены преобразования, приводящие кватернионное кинематическое уравнение вращательного движения твердого тела при произвольной заданной вектор-функции угловой скорости (задачу Дарбу) к линейной дифференциальной системе, матрица коэффициентов которой отвечает некоторому новому переменному вектору угловой скорости, прецессирующему вокруг одной из осей декартовой системы координат.

Для этой новой формы кинематических уравнений поставлена задача поиска соответствия между движениями твердого тела с противоположно направленными векторами угловой скорости. Этот подход может оказаться полезным с точки зрения дальнейшего поиска решения задачи Дарбу в замкнутой форме.

Приведено решение задачи Дарбу, построенное на основе рекуррентных соотношений И.А. Лаппо-Данилевского.

Получены новые частные случаи разрешимости задачи Дарбу в замкнутой форме, отличающиеся от известных тем, что задаваемый вектор угловой скорости твердого тела может иметь произвольное направление. Интегрируемость задачи Дарбу достигается только за счет требования, накладываемого на модуль вектора угловой скорости твердого тела.

Приведены новые частные случаи интегрируемости задачи Дарбу в явном виде, при которых накладываются ограничения на направление вектора угловой скорости твердого тела.

Следует отметить, что все полученные в статье результаты (вектор угловой скорости твердого тела задается своими компонентами в связанной с твердым телом системе координат) могут быть получены и для случая, когда вектор угловой скорости твердого тела задается своими проекциями в инерциальной системе координат.

Автор благодарит Ю.Н. Челнокова и Н.Н. Макеева за обсуждение работы и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00347).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1957. 456 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1981. Вып. 11. С. 122–129.
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионы и связанные с ними преобразования в динамике симметричного твердого тела. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 3–18.
6. *Иванова Е.А.* Об одном подходе к решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 45–52.
7. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
8. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О применении методов теории приводимости к некоторым задачам динамики гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 8–14.
9. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М.: Изд-во МГУ, 1988. 143 с.
10. *Сачков Г.П., Харламов Ю.М.* Об интегрируемости кинематических уравнений вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 11–15.
11. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.
12. *Плотников П.К.* Измерительные гироскопические системы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. 167 с.
13. *Еругин Н.П.* Приводимые системы // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 1947. Т. 13 С. 1–95.

Саратов

Поступила в редакцию
13.04.2004