

## ВИБРАЦИОННЫЙ ДРЕЙФ С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ДВИЖЕНИЮ

Рассматривается движение механической системы, на одно из тел которой действует сила сопротивления среды, пропорциональная квадрату скорости. Предполагается, что движение вызывается гармонической внутренней силой. Получены приближенные выражения, определяющие скорость системы относительно среды.

**1. Введение.** Только при очень малых скоростях движения тела сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости. В случае вибрационного перемещения это соответствует малым частотам колебаний несбалансированного рабочего тела. При этом скорость дрейфа оказывается чрезвычайно низкой [1]. Переход к существенным скоростям дрейфа системы требует рассмотрения силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости [2]. Разумеется, этот вопрос рассматривался в литературе [3]. К сожалению, расчет проводился для достаточно экзотической внутренней силы, представляющей собой сумму дельта-функций, сдвинутых на величину периода колебаний. Интеграл от внутренней силы, взятый в пределах периода колебаний, должен быть равен нулю [4]. Обратное противоречит не только понятию периодического процесса, но и закону сохранения импульса. По существу это означает, что возникла необходимость доработки результатов. Более того, имеет смысл рассмотреть случай более привычной внутренней силы, возникающей, например, при вынужденных гармонических колебаниях рабочего тела.

**2. Модель.** Система представляет собой несимметричную платформу 1 массой  $M$ , внутри которой совершает вынужденные гармонические колебания рабочее тело 2 массой  $m$  (фиг. 1). Платформа, находящаяся в жидкости 3, может перемещаться в горизонтальном направлении под действием внутренней силы  $F_{mM}$ , создаваемой рабочим телом, и силы сопротивления среды  $F_r$ . Реальность такого дрейфа не вызывает сомнений, если коэффициент сопротивления среды  $\sigma$ , связывающий силу сопротивления со скоростью платформы  $v = dx/dt$  выражением

$$F_r = -\sigma v |v| \quad (1)$$

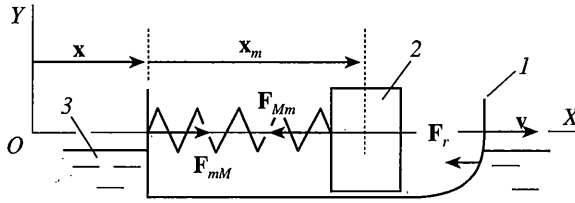
имеет разные значения для разных направлений движения платформы:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_+, & v > 0 \\ \sigma_-, & v < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Вопрос об инфинитном движении симметричной платформы пока остается открытым.

В проекциях на ось  $X$  неподвижной системы отсчета  $XOY$  уравнения движения платформы и рабочего тела имеют вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_r + F_{mM} \quad (3)$$



Фиг. 1

$$M \frac{d^2(x + x_m)}{dt^2} = F_{Mm} \tag{4}$$

Поскольку рассмотрение проводится в инерциальной системе отсчета, то  $F_{Mm} + F_{mM} = 0$ , где  $F_{Mm}$  – сила, с которой платформа действует на рабочее тело. Поэтому суммирование (3) и (4) с учетом силы сопротивления (1), (2) и заданного изменения положения рабочего тела относительно платформы  $x_m = a_0 + a \cos(2\pi t/T)$  приобретает вид

$$M_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} + \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2} \right) \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi^2 ma}{T^2} \cos \frac{2\pi t}{T} \tag{5}$$

где  $M_0 = m + M$  – полная масса системы,  $T$  – период колебаний рабочего тела,  $\{v\}$  – краткая запись операции  $\text{sign}(v)$ . Имеет смысл ввести безразмерные переменные

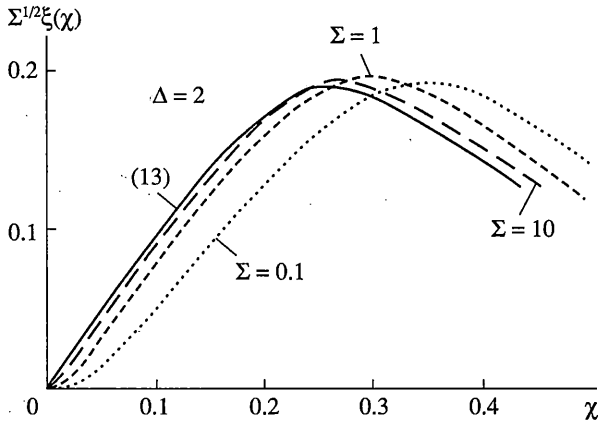
$$\xi = \frac{M_0 x}{ma}; \quad \chi = \frac{t}{T}; \quad \Lambda = \frac{d\xi}{d\chi}; \quad \Sigma = \frac{m a \sigma_+}{4\pi^2 M_0^2}; \quad \Delta = \frac{\sigma_-}{\sigma_+}$$

в которых уравнение движения (5) может быть переписано как

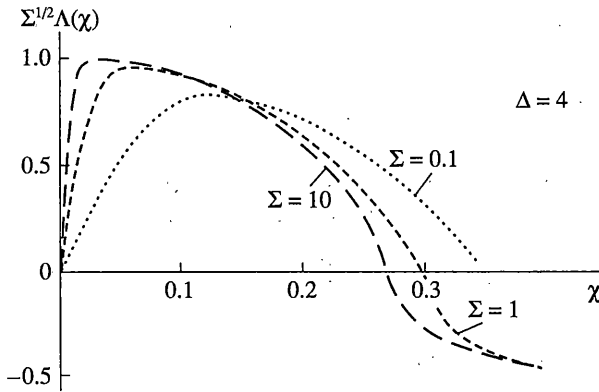
$$\frac{1}{4\pi} \frac{d^2 \xi}{d\chi^2} + \left( \frac{1 - \Delta}{2} \left\{ \frac{d\xi}{d\chi} \right\} + \frac{1 + \Delta}{2} \right) \left\{ \frac{d\xi}{d\chi} \right\} \Sigma \left( \frac{d\xi}{d\chi} \right)^2 - \cos 2\pi \chi = 0 \tag{6}$$

Теперь приведенная координата платформы  $\xi$  зависит от приведенного интервала времени  $\chi$ , параметра асимметрии системы  $\Delta$  и приведенного коэффициента сопротивления  $\Sigma$ . Более того, при больших значениях приведенного коэффициента сопротивления  $\Sigma \gg 0.01$  величины  $\Sigma^{1/2} \xi$  и  $\Sigma^{1/2} \Lambda$  должны зависеть только от параметра асимметрии  $\Delta$  и приведенного интервала времени  $\chi$ .

**3. Скорость вибрационного дрейфа.** Уравнение движения (6) следует решать при нулевом начальном условии:  $d\xi/d\chi|_{\chi=0} = 0$ . Для малых приведенных интервалов времени  $\chi$  примеры решения уравнения (6) показаны на фиг. 2 и фиг. 3, для больших – на фиг. 4 и фиг. 5. Это – зависимости приведенной координаты платформы  $\xi$  и ее скорости  $\Lambda$  от времени. Расчеты проводились для трех значений приведенного коэффициента сопротивления среды 0.1, 1 и 10 при различных величинах параметра асимметрии  $\Delta$ . Разделение на малые и большие интервалы времени сделано специально. С одной стороны, необходимо продемонстрировать, что скорость платформы при малых временах движения очень резко возрастает. С другой стороны, следовало показать, что при больших интервалах времени движения и больших коэффициентах сопротивления среды величины  $\Sigma^{1/2} \xi$  и  $\Sigma^{1/2} \Lambda$  зависят только от  $\chi$  и  $\Delta$ . В этой области значений разность фаз между внутренней силой и скоростью платформы асимптотически мала, то есть стремится к



Фиг. 2



Фиг. 3

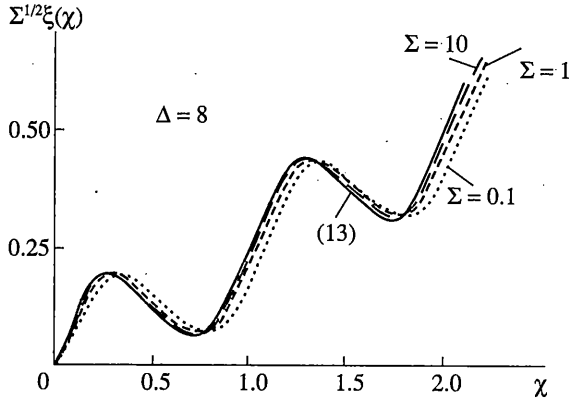
нулю при больших коэффициентах сопротивления. Это дает возможность оценить значения максимальной  $\Lambda_+$  и минимальной  $\Lambda_-$  приведенных скоростей платформы. Действительно, для того момента времени, когда скорость платформы достигает максимального значения,  $d\Lambda/d\chi = 0$  и  $\Lambda > 0$ , поэтому

$$\Lambda_+ = \Sigma^{-1/2} \quad (7)$$

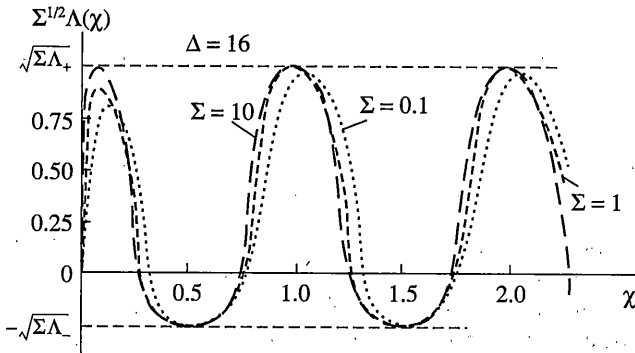
Аналогично, для минимального значения скорости:  $d\Lambda/d\chi = 0$  и  $\Lambda < 0$  и следовательно

$$\Lambda_- = (\Sigma\Delta)^{-1/2} \quad (8)$$

Последние результаты (7), (8) и характер зависимостей, приведенных на фиг. 4 и фиг. 5, позволяют вычислить среднюю скорость вибрационного дрейфа. Вычисление такой величины предполагает усреднение за достаточно большой интервал времени, другими словами, рассмотрение установившегося режима движения. В этом режиме движение платформы в одном направлении ( $\{d\xi/d\chi\} = 1$ ) от перемещения в другую сторону ( $\{d\xi/d\chi\} = -1$ ) отличается только параметром асимметрии. Действительно, замена  $\Delta \rightarrow 1/\Delta$  в уравнении движения (6) означает переход к дрейфу в обратном направлении,



Фиг. 4



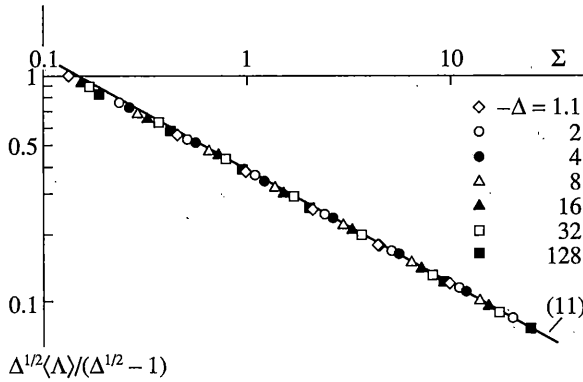
Фиг. 5

при этом замена  $d\xi/d\chi \rightarrow \Delta^{1/2}d\xi/d\chi$  приводит к тому же самому уравнению, если первый член уравнения движения (6), содержащий ускорение  $d^2\xi/d\chi^2$ , по модулю мал по сравнению с двумя другими членами. Это обстоятельство нарушается лишь в узких областях, где скорость  $d\xi/d\chi$  и  $\cos(2\pi\chi)$  малы по абсолютной величине. На интегральную характеристику, какой является средняя скорость движения, это не оказывает существенного влияния. Итак, для установившегося режима движения можно считать

$$\Sigma^{1/2}\Lambda(\chi) = \begin{cases} \lambda(\chi, \Sigma), & \cos 2\pi\chi > 0 \\ -\Delta^{1/2}\lambda(\chi - 1/2, \Sigma), & \cos 2\pi\chi < 0 \end{cases} \quad (9)$$

где  $\lambda(\chi, \Sigma)$  – некоторая функция  $\chi$  и  $\Sigma$ . Следует особо подчеркнуть, что эта функция одна и та же как для положительной скорости, так и для отрицательной. Более того, определена она на одной и той же области  $\chi$ . Это обстоятельство подтверждает также фиг. 5: отрицательная скорость платформы в установившемся режиме есть скорость платформы в положительном направлении, помноженная на  $-\Delta^{1/2}$  и сдвинутая на величину  $\chi$ , приблизительно равную одной второй.

Скорость платформы положительна при  $n - 1/4 \leq \chi \leq n + 1/4$  и отрицательна при  $n + 1/4 \leq \chi \leq n + 3/4$ , где  $n$  – номер колебания ( $n \geq 1$ ). Поэтому интегрирова-



Фиг. 6

ние выражения (9) в пределах  $n - 1/4 \leq \chi \leq n + 3/4$  приводит к следующему выражению

$$\Sigma^{1/2} \int_{n-1/4}^{n+3/4} \Lambda(\chi) d\chi = \int_{n-1/4}^{n+1/4} \lambda(\chi, \Sigma) d\chi - \frac{1}{\Delta^{1/2}} \int_{n+1/4}^{n+3/4} \lambda(\chi - 1/2, \Sigma) d\chi$$

Интеграл слева пропорционален средней приведенной скорости. Интегралы справа с учетом изложенных выше аргументов в первом приближении равны. Поэтому наиболее общий вид зависимости средней приведенной скорости платформы  $\langle \Lambda \rangle$  от всех параметров системы может быть записан следующим образом

$$\frac{\Delta^{1/2}}{\Delta^{1/2} - 1} \langle \Lambda \rangle = f(\Sigma) \tag{10}$$

Правая часть этого выражения представляет собой некоторую функцию, зависящую только от приведенного коэффициента сопротивления среды. Вид этой функции можно найти только либо исходя из численного решения дифференциального уравнения (6), либо из экспериментальных данных по средним скоростям вибрационного дрейфа, если бы таковые имелись. Для этого достаточно построить значения средних скоростей в переменных (10). Для расчетных данных это сделано на фиг. 6.

Получается достаточно неожиданный результат: средняя скорость вибрационного дрейфа сравнительно слабо зависит от коэффициента сопротивления среды. При больших значениях  $\Sigma$  эта зависимость приближенно может быть описана выражением

$$\langle \Lambda \rangle = 0.38 \frac{\sqrt{\Delta} - 1}{\sqrt{\Sigma \Delta}} \tag{11}$$

Именно эта зависимость соответствует сплошной линии на фиг. 6. Зависимость средней скорости  $\langle v \rangle$  от частоты колебаний рабочего тела при прочих равных условиях линейна, поскольку  $\langle v \rangle = ma \langle \Lambda \rangle / M_0 T$ .

Вернемся к зависимости скорости платформы от времени, изображенной, например, на фиг. 5. Тот факт, что при больших  $\Sigma$  средняя скорость пропорциональна  $\Sigma^{-1/2}$ , означа-

ет, что функция  $\lambda(\chi, \Sigma)$  не зависит от  $\Sigma$ . В этом случае частным решением уравнения (6) является функция  $\lambda(\chi, \Sigma) = \sqrt{|\cos 2\pi\chi|}$ . Это означает, что

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}-1} \langle \Lambda \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \frac{1}{\sqrt{\Sigma}} = 0.38 \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Итак, при больших приведенных коэффициентах сопротивления скорость как функция времени определяется выражением

$$\Lambda(\chi) = \frac{1}{2\sqrt{\Sigma\Delta}} [\sqrt{\Delta}-1 + (\sqrt{\Delta}+1)\{\cos 2\pi\chi\}] \sqrt{|\cos 2\pi\chi|} \quad (12)$$

Зависимость координаты платформы от времени имеет вид

$$\xi(\chi) = \int_0^{\chi} \Lambda(\chi) d\chi \quad (13)$$

На фиг. 2 и фиг. 4 эта зависимость представлена сплошной кривой. Ситуация, по-видимому, точно такая же, как в случае обычного движения тела под действием постоянной внешней силы в среде с сопротивлением. В установившемся режиме внешняя сила почти полностью компенсируется силой сопротивления.

**4. Заключение.** Получен новый результат, на который обязательно следует обратить внимание. Судя по всему, автомодельным преобразованием приведенной скорости при вибрационном перемещении с квадратичным сопротивлением движению является антисимметричное преобразование  $\Lambda \rightarrow \sqrt{\Delta} \Lambda / (\sqrt{\Delta} - 1)$ . Приведенный коэффициент сопротивления  $\Sigma$  в таком подходе не преобразуется. Эти выводы важны при изучении вибрационного полета, когда коллинеарны направлению движения не только внутренняя сила и сила сопротивления, но и сила тяжести. Без таких преобразований аналитическое описание критического режима вибрационного полета [5] практически невозможно.

Пусть  $T = 1$  с,  $a = 1$  м,  $m/M_0 = 1/2$ ,  $\Sigma = 0.1$  и  $\Delta = 10$ . В этом случае  $\langle v \rangle \approx 0.4$  м/с. При этом коэффициент сопротивления среды  $\sigma_+$  имеет такое значение, что любое тело, движущееся в среде с начальной скоростью, равной  $\langle v \rangle$ , за время  $T$  теряет 76% своей скорости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gerasimov S.A. On vibrational floating // Mech. Res. Comm. 2004. V. 31. № 1. P. 45–53.
2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1978. 464 с.
3. Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // Машиноведение. 1980. № 4. С. 3–8.
4. Герасимов С.А. Динамика вибрационного перемещения. // Вопр. прикл. физ. 2003. Вып. 9. С. 89–91.
5. Герасимов С.А. О вибрационном перемещении в поле силы тяжести // Прикл. мех. и техн. физ. 2003. Т. 44. № 6. С. 44–48.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
8.10.2004