

© 2007 г. Д.В. ГОЦЕВ, И.А. ЕНЕНКО, А.Н. СПОРИХИН

ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВАХ

В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована локальная неустойчивость горизонтальной горной выработки с эллиптическим поперечным сечением при упруговязкопластическом поведении массива горных пород. Дана оценка влияния на величину критического давления параметров горного массива.

Известно [1], что решение задач горной механики, относящихся к процессу проведения подземных выработок, сводится к постановке и решению задач [2–4] локальной неустойчивости массива возле выработок при упругопластических деформациях [5, 6]. Решение такого класса задач состоит из двух частей. Первая часть – определение основного напряженно-деформированного состояния массива горных пород вблизи выработки. Вторая часть – решение вопроса об устойчивости основного состояния динамическим методом, который в свою очередь сводится к определению величины критического давления, равномерно распределенного по контуру выработки и оптимального размера поперечного сечения сооружаемых подземных конструкций. В отличие от [3, 4] в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [7] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны горизонтальной горной выработки, когда имеет эллиптическую форму поперечное сечение выработки.

Рассмотрим локальную неустойчивость горизонтальной выработки с эллиптической формой поперечного сечения в упруговязкопластическом массиве. Примем, что свойства пород приствольной зоны моделируются соотношениями несжимаемого упруговязкопластического тела [4] с трансляционным упрочнением [5, 6].

В этом случае функция нагружения и соотношения ассоциированного закона течения имеют вид

$$F = (S_i^j - c(\epsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p)(S_j^i - c(\epsilon_j^i)^p - \eta(e_j^i)^p) - k^2 \quad (1)$$

$$d(\epsilon_i^j)^p = d\lambda \partial F / \partial \sigma_i^j \quad (2)$$

Здесь c – коэффициент упрочнения; k – предел текучести; η – коэффициент вязкости; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma \delta_i^j$ – девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k / 3$; δ_i^j – символ Кронекера; ϵ_i^j – компоненты тензора деформаций; e_i^j – компоненты тензора скоростей деформаций; $d\lambda$ – скалярный положительный множитель. Индексы i, j принимают значения от 1 до 3. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Здесь и далее верхние индексы “ p ” или “ e ” обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Заменим горный массив с выработкой, как это обычно делается, невесомой бесконечной пластиной с эллиптическим отверстием радиуса R_0 , по контуру которого прило-

жена равномерно распределенная нагрузка q_0 . Величина q_0 такова, что образовавшаяся пластическая область полностью охватывает контур выработки. На бесконечности напряжения в пластине стремятся к величине gh (g – объемный вес породы, h – глубина заложения выработки), т. е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим.

При определении компонент основного напряженно-деформированного состояния все функции представляются в виде рядов по степеням малого параметра δ :

$$\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^e, e_{ij}^p, \dots\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^e, e_{ij}^p, \dots\}$$

Здесь δ характеризует отклонение от исходного невозмущенного состояния, т.е. отклонение эллипса радиуса R_3 от окружности радиуса R_0 . При этом

$$R_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n R_3^{(n)} = R_0 \left(1 + \delta d' \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d'^2 (1 - \cos 4\theta + \dots) \right) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Нулевое приближение соответствует осесимметричному состоянию плоскости с круговым отверстием радиуса R_0 и имеет в полярных координатах (r, θ) вид [8]:
в пластической области ($R_0 < r < 1$):

$$\sigma_r^{(0)} = -q_0 + \frac{4\chi\mu}{2\mu + c} \left[\frac{c + 2\mu e^{-\alpha r}}{4\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) + (1 - e^{-\alpha r}) \ln \frac{r}{R_0} \right]$$

$$\sigma_\theta^{(0)} = -q_0 + \frac{4\chi\mu}{2\mu + c} \left[\frac{c + 2\mu e^{-\alpha r}}{4\mu} \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) + (1 - e^{-\alpha r}) \left(1 + \ln \frac{r}{R_0} \right) \right] \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta^{p(0)} = -\varepsilon_r^{p(0)} = \frac{\chi(1 - e^{-\alpha r})}{2\mu + c} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)$$

где μ – модуль сдвига, $\chi = \text{sign}(q_0 - gh)$, $\alpha = (2\mu + c)/\eta$;
в упругой области ($1 < r < \infty$):

$$\sigma_r^{(0)} = -gh - \frac{1}{r^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)} = -gh + \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta^{p(0)} = -\varepsilon_r^{p(0)} = \frac{\chi}{2\mu r^2} \quad (4)$$

Уравнение для определения радиуса $\gamma^{(0)}$ упругопластической границы в массиве имеет вид

$$|q_0 - gh|(2\mu + c) - 2\mu + 4\mu \ln R_0 (1 - e^{-\alpha r}) - (2\mu e^{-\alpha r} + c)/R_0^2 = 0 \quad (5)$$

Первое приближение согласно [8] запишем в виде соотношений:
в пластической области ($R_0 < r < 1$):

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{r^2} - 2 \ln \frac{r}{R_0} \right) + \frac{4AR_0 d'}{r} \sin \left(\phi_1' - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{m_1}{2} \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{r^2} - 2 - 2 \ln \frac{r}{R_0} \right) + \frac{4AR_0 d'}{r} \sin \left(\phi_1' - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = -\frac{4AR_0d'}{r} \cos\phi'_1 \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{p(1)} = \frac{2AR_0d'}{\mu(2\mu+c)} \left[\frac{(2\mu e^{-2\alpha} + c)}{r} \cos\phi'_1 + \frac{2\mu(1-e^{-2\alpha})}{r^3} \cos\phi'_1 \right] \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{\theta}^{p(1)} = -\frac{m_1 a_0}{2\mu r} - \left\{ 2c_1 \cos\phi + 2c_2 \cos\phi' + \frac{AR_0d'}{\mu(2\mu+c)} \left[\frac{2\mu(1-e^{-2\alpha})}{r^2} \sin\left(\phi'_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{4(2\mu e^{-2\alpha} + c)}{\sqrt{3}} \ln r \sin\phi'_1 \right] \right\} \sin 2\theta \quad (6)$$

$$\varepsilon_r^{p(1)} = -\varepsilon_{\theta}^{p(1)}$$

$$c_1 = \frac{AR_0d'}{6\mu(2\mu+c)} [3\mu(1-e^{-2\alpha}) \cos\phi'_0 - \sqrt{3}(\mu(1+3e^{-2\alpha}) + 2c) \sin\phi'_0]$$

$$c_2 = -\frac{AR_0d'}{6\mu(2\mu+c)} [\sqrt{3}(\mu(1-5e^{-2\alpha}) - 2c) \cos\phi'_0 + (\mu(3+5e^{-2\alpha}) + 4c) \sin\phi'_0]$$

$$A = \frac{1}{2\mu+c} \left[2\mu(1-e^{-\alpha r}) + \frac{c+2\mu e^{-\alpha r}}{R_0^2} \right], \quad m_1 = \frac{2c}{2\mu+c} (1-e^{-\alpha r}) + 2e^{-2\alpha r}$$

$$\phi'_0 = \sqrt{3} \ln R_0, \quad \phi'_1 = \sqrt{3} \ln \frac{r}{R_0}, \quad \phi' = \sqrt{3} \ln r, \quad a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_0^2} - 1 + 2 \ln R_0 \right)$$

в упругой области ($1 < r < \infty$):

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{m_1 a_0}{r^2} + \left\{ 4AR_0d' \left[\sin\left(\phi'_0 + \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{2}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) + 2 \cos\phi'_0 \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \right\} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)} = -\frac{m_1 a_0}{r^2} + \left\{ 4AR_0d' \left[\frac{1}{r^4} \sin\left(\phi'_0 + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{2}{r^4} \cos\phi'_0 \right] \right\} \cos 2\theta \quad (7)$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \left\{ -4AR_0d' \left[\sin\left(\phi'_0 + \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) + 2 \cos\phi'_0 \left(\frac{2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \right\} \sin 2\theta$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы $\gamma^{(1)}$ имеет вид

$$\gamma^{(1)} = -\frac{(2\mu+c)m_1 a_0}{4\mu(1-e^{-2\alpha})} + \frac{(2\mu+c)}{2\mu(1-e^{-2\alpha})} 2AR_0d' \cos\phi'_0 \cos 2\theta \quad (8)$$

В (3)–(8) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу текучести k при чистом сдвиге, а имеющие размерность длины – к радиусу $\gamma^{(0)}$ упругопластической границы в нулевом приближении.

Для определения нулевого и первого приближений этой задачи использовались уравнения равновесия, условие пластичности (1), соотношения ассоциированного закона пластического течения (2), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации, общие уравнения теории упругости, граничные условия, а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях.

Исследование устойчивости основного состояния (3)–(8) горизонтальной выработки, имеющей в поперечном сечении форму эллипса при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [7], сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [4].

Уравнения равновесия для областей пластического V^p и упругого V^e деформирования массива имеют вид

$$\nabla_i(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j) - \rho s^2 u_j = 0, \quad s = i\omega \quad (9)$$

Здесь и далее ∇ – символ ковариантного дифференцирования, кружок сверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния, определенного соотношениями (3)–(8).

Граничные условия на внутренней поверхности выработки и условия затухания возмущений на внешней поверхности S_∞^e массива запишем в виде

$$N_i(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j) = 0, \quad u_j|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (10)$$

Условия непрерывности на упругопластической границе γ имеют вид

$$[N_i(\sigma_j^i + \sigma_\alpha^{0i} \nabla^\alpha u_j)] = 0, \quad [u_j] = 0 \quad (11)$$

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений в несжимаемой упруговязкопластической модели в пластической и упругой областях представима в форме

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{11} a_{ij}^1 + r^{-2} \varepsilon_{22} a_{ij}^2 + \varepsilon_{33} a_{ij}^3 + 2\mu \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{12} a_{ij}^4 + p g_{ij} \quad (12)$$

где коэффициенты a_{ij}^s в пластической области имеют вид

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= (1/3) a f_{ij} (-2f_{11} + r^2 f_{22}), & a_{ij}^2 &= (1/3) a f_{ij} (f_{11} - 2r^2 f_{22}) \\ a_{ij}^3 &= (1/3) a f_{ij} (f_{11} + r^2 f_{22}), & a_{ij}^4 &= -2a f_{ij} f_{12}, & f_{ij} &= S_{ij}^0 - c \varepsilon_{ij}^{0p} \end{aligned} \quad (13)$$

$$a = \frac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + \eta s)}, \quad s = i\omega, \quad \omega = \alpha + i\beta$$

где p – множитель Лагранжа. В упругой области надо положить $a = 0$. В случае однородного докритического состояния эти соотношения совпадают с полученными в [4].

Соотношения (12)–(13) описывают напряженно деформированное состояние массива горных пород в пластической и упругой областях.

Уравнения (9)–(13) с учетом условий несжимаемости в областях V^p и V^e массива представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости основного состояния горизонтальной выработки с эллиптическим поперечным сечением, когда имеется граница областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в массиве горных пород. Система уравнений (9), (12), (13) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных от-

носителем амплитудных значений векторов перемещений u , v , w и гидростатического давления p для пластической и упругой зон массива. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений перемещения и гидростатические давления в упругой и пластической областях деформирования горного массива аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_n \sum_m A_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), & v &= \sum_n \sum_m B_{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz) \\
 w &= \sum_n \sum_m C_{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), & p &= \sum_n \sum_m D_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Здесь n , m – параметры волнообразования.

Подставляя функции u , v , w , p в линеаризованные уравнения устойчивости (9) и учитывая (12), (13), а также условие несжимаемости, после ряда преобразований получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно A_{nm} и B_{nm} :

$$\begin{aligned}
 \xi_1 A(r) + \xi_2 A'(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 A'''(r) + \xi_5 A^{(IV)}(r) + \xi_6 B(r) + \xi_7 B'(r) + \xi_8 B''(r) + \xi_9 B'''(r) &= 0 \\
 \xi_{10} A(r) + \xi_{11} A'(r) + \xi_{12} A''(r) + \xi_{13} A'''(r) + \xi_{14} B(r) + \xi_{15} B'(r) + \xi_{16} B''(r) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \left\{ a_{2,r} + \frac{1}{r}(a_{10,\theta} - a_6) - \frac{\sigma_\theta^0}{r}(1+m^2) + r\rho\omega^2 - m^2 a_{12} - n^2 \mu r + \frac{1}{r} \left[a_7 - a_{11,\theta} - r a_{3,r} + \frac{1}{n^2} \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left(\frac{3\mu}{r^2}(1-m^2) - \frac{3m^2}{r^2} \sigma_\theta^0 + \frac{m^2}{r} \sigma_{\theta,r}^0 + \frac{1}{r} \left(r\rho\omega^2 - \frac{3}{r}(\tau_{r\theta,\theta}^0 - 3\sigma_r^0) - 5\sigma_{r,r}^0 + r\sigma_{r,rr}^0 + \tau_{r\theta,r\theta}^0 \right) \right) \right] \right\} \times \\
 &\times \cos m\theta + \left\{ a_4 - a_{12,\theta} + r a_{4,r} - a_8 - \tau_{r\theta,r}^0 + \frac{1}{r} \left[a_{11} - a_{10} - \sigma_{\theta,\theta}^0 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{6\tau_{r\theta}^0}{r^2} - \frac{4}{r} \tau_{r\theta,r}^0 - \frac{3}{r^2} \sigma_{\theta,\theta}^0 + \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. + \tau_{r\theta,r\theta}^0 + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta r}^0 \right) \right] \right\} m \sin m\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_2 &= \left\{ a_1 + a_2 - 2a_3 - a_5 + a_7 + r(a_{1,r} - a_{3,r}) + a_{9,\theta} - a_{11,\theta} - \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 + \frac{\mu}{r} - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{n^2} \left[\frac{\mu}{r^2}(3+m^2) + \frac{m^2}{r^2} \sigma_\theta^0 - \frac{m^2}{r} \sigma_{\theta,r}^0 + \frac{1}{r} \left(r\rho\omega^2 + r\sigma_{r,rr}^0 - \frac{3}{r} \tau_{r\theta,\theta}^0 + \frac{9}{r} \sigma_r^0 + \tau_{r\theta,r\theta}^0 - 5\sigma_{r,r}^0 \right) \right] \right\} \times \\
 &\times \cos m\theta + \left\{ r a_4 + a_{11} - a_9 - 2\tau_{r\theta}^0 \left(1 + \frac{3}{r^2 n^2} \right) + \frac{1}{n^2} \left[\frac{2\tau_{r\theta,r}^0}{r} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta,\theta}^0 + \tau_{r\theta,r\theta}^0 + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta r}^0 \right] \right\} m \sin m\theta
 \end{aligned}$$

$$\xi_3 = \left\{ r(a_1 - a_3 + \sigma_r^0) + (r-1)\mu - \frac{1}{n^2} \left[r\rho\omega^2 - \frac{\mu}{r}(m^2+3) - \frac{m^2}{r} \sigma_\theta^0 + \sigma_{r,r}^0 - \frac{3}{r} \sigma_r^0 + \tau_{r\theta,r\theta}^0 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + r\sigma_{r,rr}^0 \left. \right\} \cos m\theta + \left\{ \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta r}^0 + 3\tau_{r\theta,r}^0 \right\} \frac{m}{n^2} \sin m\theta \\
 \xi_4 = & -\frac{1}{n^2} \{ 2r\sigma_{r,r}^0 + 2\mu + \tau_{r\theta,\theta}^0 \} \cos m\theta + \frac{2m}{n^2} \tau_{r\theta}^0 \sin m\theta, \quad \xi_5 = -\frac{r(\mu + \sigma_r^0)}{n^2} \cos m\theta \\
 \xi_6 = & \left\{ a_{2,r} - a_{12} + \frac{1}{r} \left[a_{10,\theta} - a_6 - 2\sigma_{\theta}^0 - a_{11,\theta} + a_7 - ra_{3,r} - \frac{1}{n^2} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left(\frac{\mu}{r^2} (5 + 3m^2) + \frac{2m^2}{r^2} \sigma_{\theta}^0 - \frac{m^2}{r} \sigma_{\theta,r}^0 + \rho\omega^2 - \frac{3}{r} \sigma_{r,r}^0 - \frac{1}{r^2} \tau_{r\theta,\theta}^0 + \frac{7}{r^2} \sigma_r^0 - \sigma_{r,rr}^0 - \frac{1}{r} \tau_{r\theta,r\theta}^0 \right) \right] \right\} \times \\
 & \times m \cos m\theta + \left\{ ra_{4,r} - a_{12,\theta} + a_4 - a_8 - \tau_{r\theta,r}^0 - \frac{1}{r} (\sigma_{\theta,\theta}^0 + m^2(a_{10} - a_{11})) - \frac{m^2}{n^2} \left[\frac{2\tau_{r\theta}^0}{r^2} + \frac{4}{r} \tau_{r\theta,r}^0 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{r^2} \sigma_{\theta,\theta}^0 - \tau_{r\theta,r\theta}^0 - \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta r}^0 \right] \right\} \sin m\theta \\
 \xi_7 = & \left\{ a_2 + ra_{12} - a_3 - \frac{1}{rn^2} \left[r\rho\omega^2 + \frac{\mu}{r} (3 - m^2) - \frac{m^2}{r} \sigma_{\theta}^0 + r\sigma_{r,rr}^0 - \frac{3}{r} \tau_{r\theta,\theta}^0 + \frac{9}{r} \sigma_r^0 - 5\sigma_{r,r}^0 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tau_{r\theta,r\theta}^0 \right] \right\} m \cos m\theta + \left\{ r \left(a_{12,\theta} - a_4 + a_8 - ra_{4,r} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^0 \right) - \frac{m^2}{n^2 r} \left(\frac{6\tau_{r\theta}^0}{r} - 3\tau_{r\theta,r}^0 - \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta}^0 \right) \right\} \sin m\theta \quad (16) \\
 \xi_8 = & -\frac{m}{rn^2} \{ 2r\sigma_{r,r}^0 - 2\mu - 4\sigma_r^0 + \tau_{r\theta,\theta}^0 \} \cos m\theta + \left\{ \frac{2m^2}{rn^2} \tau_{r\theta}^0 - r^2 a_4 \right\} \sin m\theta \\
 \xi_9 = & -\frac{m(\mu + \sigma_r^0)}{n^2} \cos m\theta \\
 \xi_{10} = & m \left\{ a_{8,\theta} - 2a_{12} - a_{12,r} + \frac{1}{r} \left[a_7 - a_6 - 2\sigma_{\theta}^0 + \frac{1}{rn^2} \left(r\rho\omega^2 + \frac{\mu}{r} (1 - m^2) - \frac{m^2}{r} \sigma_{\theta}^0 - \sigma_{r,r}^0 - \frac{1}{r} \times \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \times (\tau_{r\theta,\theta}^0 - 3\sigma_r^0) \right) \right] \right\} \cos m\theta \sin m\theta + \left\{ \frac{1}{r} \left[(a_{10} - a_{11}) \left(2 - \frac{1}{r} \right) + a_{10,r} + a_{6,\theta} + r\tau_{r\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0 - a_{11,r} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - a_{7,\theta} + rm^2 a_8 \right] \right\} \cos^2 m\theta + \left(\frac{m}{rn} \right)^2 \left\{ \frac{1}{r} (2\tau_{r\theta}^0 - \sigma_{\theta,\theta}^0) - \tau_{r\theta,r}^0 \right\} \sin^2 m\theta \\
 \xi_{11} = & m \left\{ a_7 - a_{12} - a_5 + \frac{1}{r} \left[\mu(1 - r) + \frac{1}{n^2} \left(r\rho\omega^2 - \frac{\mu}{r} (1 + m^2) - \frac{m^2}{r} \sigma_{\theta}^0 + \sigma_{r,r}^0 + \frac{1}{r} \times \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\times (\tau_{r,\theta}^0 - 3\sigma_r^0)] \} \cos m\theta \sin m\theta + \left\{ 2\tau_{r,\theta}^0 + 2a_9 + a_{9,r} + \frac{1}{r}a_{10,r} + a_{5,\theta} - a_{11,r} - a_{7,\theta} - a_{11} \times \right.$$

$$\left. \times \left(2 + \frac{1}{r} \right) \right\} \cos^2 m\theta - \frac{m^2}{rn^2} \left\{ \frac{1}{r}(2\tau_{r,\theta}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0) + \tau_{r,\theta,r}^0 \right\} \sin^2 m\theta$$

$$\xi_{12} = \frac{m}{rn^2} \{ 2\mu + r\sigma_{r,r}^0 + \tau_{r,\theta,\theta}^0 \} \cos m\theta \sin m\theta + \{ a_9 - a_{11} \} \cos^2 m\theta - \frac{2m^2}{rn^2} \tau_{r,\theta}^0 \sin^2 m\theta$$

$$\xi_{13} = \frac{m}{n^2} \{ \mu + \sigma_r^0 \} \cos m\theta \sin m\theta$$

$$\xi_{14} = \left\{ a_{8,\theta} - 2a_{12} - a_{12,r} + r\rho\omega^2 \left(1 + \left(\frac{m}{rn} \right)^2 \right) - n^2\mu r - \frac{1}{r}\sigma_{\theta}^0 + \frac{m^2}{r} \left[a_7 - a_6 - \sigma_{\theta}^0 + \frac{1}{rn^2} \left(\frac{\mu}{r} \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (1 - m^2) - \frac{m^2}{r}\sigma_{\theta}^0 - \sigma_{r,r}^0 - \frac{1}{r}(\tau_{r,\theta,\theta}^0 - 3\sigma_r^0) \right] \right\} \cos m\theta \sin m\theta + \frac{m}{r} \left\{ (a_{10} - a_{11}) \left(2 - \frac{1}{r} \right) + a_{10,r} + \right.$$

$$\left. + r\tau_{r,\theta,r}^0 + \sigma_{\theta,\theta}^0 + a_{6,\theta} - a_{11,r} - a_{7,\theta} + ra_8 \right\} \cos^2 m\theta - \frac{m^3}{r^3 n^2} \{ 2\tau_{r,\theta}^0 - \sigma_{\theta,\theta}^0 - r\tau_{r,\theta,r}^0 \} \sin^2 m\theta$$

$$\xi_{15} = \left\{ r \left(2a_{12} + a_{12,r} - a_{8,\theta} + \sigma_{r,r}^0 + \frac{1}{r}(\tau_{r,\theta,\theta}^0 - \sigma_r^0) \right) + \left(\frac{m}{rn} \right)^2 (\tau_{r,\theta,\theta}^0 + r\sigma_{r,r}^0 - 3\sigma_r^0 - \mu) \right\} \cos m\theta \times$$

$$\times \sin m\theta + m \left\{ \frac{1}{r}(a_{10} - a_{11}) - ra_8 + 2\tau_{r,\theta}^0 \right\} \cos^2 m\theta - \frac{2m^3}{r^2 n^2} \tau_{r,\theta}^0 \sin^2 m\theta$$

В горном массиве в пластической области V^p докритическое состояние определяется по формулам (3), (6), а в упругой области V^e – по формулам (4), (8) соответственно. Для упрощения записи здесь в (15) и далее индексы n, m у величин A, B опущены. Отметим, что если устойчивость основного состояния исследовать по предельной [4] системе уравнений, то в соотношениях (3)–(8), определяющих докритическое состояние, следует $t \rightarrow \infty$.

Граничные условия (10) на внутреннем контуре выработки при $r = R_0(1 + \delta d' \cos 2\theta - (3/4)\delta^2 d'^2(1 - \cos 4\theta + \dots))$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) с учетом (12), (13) принимают вид

$$A\varphi_1 + A'\varphi_2 + A''\varphi_3 + A'''\varphi_4 + B\varphi_5 + B'\varphi_6 + B''\varphi_7 = 0$$

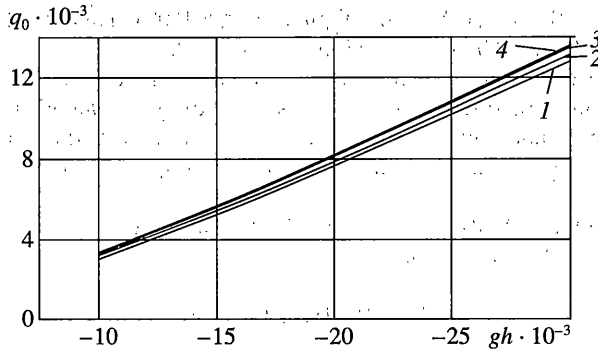
$$A\varphi_8 + A'\varphi_9 + B\varphi_{10} + B'\varphi_{11} = 0 \tag{17}$$

$$A\varphi_{12} + A'\varphi_{13} + A''\varphi_{14} + B\varphi_{15} + B'\varphi_{16} = 0$$

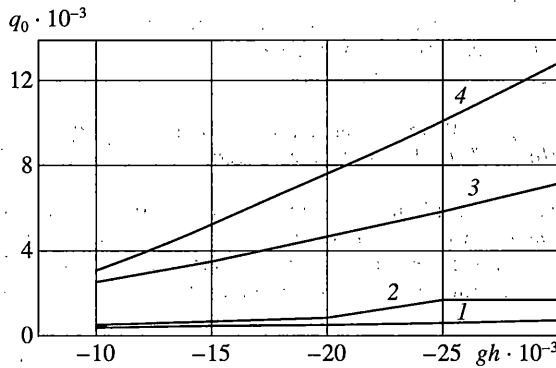
$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = & -\frac{1}{r} \left\{ a_3 - a_2 - \mu + \frac{1}{rn^2} \left[r\rho\omega^2 + \frac{\mu}{r}(1-m^2) - \frac{m^2}{r}\sigma_r^0 + \frac{1}{r}(3\sigma_r^0 - \tau_{r\theta, \theta}^0 - r\sigma_{r,r}^0) \right] \right\} \cos m\theta + \\
 & + m \left\{ a_4 - \frac{1}{r}\tau_{r\theta}^0 \left(1 + \frac{2}{r^2 n^2} \right) + \frac{1}{n^2 r^2} \left(\tau_{r\theta, r}^0 + \frac{1}{r}\sigma_{\theta, \theta}^0 \right) \right\} \sin m\theta \\
 \varphi_2 = & \left\{ a_1 - a_3 + \sigma_r^0 - \frac{1}{r} \left[(1-r)\mu + \frac{1}{n^2} \left(r\rho\omega^2 - \frac{\mu}{r}(m^2 + 1 + n^2 r^2) - \frac{m^2}{r}\sigma_r^0 + \frac{1}{r} \times \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left. (r\sigma_{r,r}^0 - 3\sigma_r^0 + \tau_{r\theta, \theta}^0) \right) \right] \right\} \cos m\theta + \frac{m}{rn^2} \left\{ \frac{1}{r}\sigma_{\theta, \theta r}^0 + \tau_{r\theta, r}^0 + \frac{2}{r}\tau_{r\theta}^0 \right\} \sin m\theta \\
 \varphi_3 = & -\frac{1}{rn^2} \{ r\sigma_{r,r}^0 + 2\mu + \tau_{r\theta, \theta}^0 \} \cos m\theta + \frac{2m}{rn^2} \tau_{r\theta}^0 \sin m\theta, \quad \varphi_4 = -\frac{(\mu + \sigma_r^0)}{n^2} \cos m\theta \\
 \varphi_5 = & -\frac{m}{r} \left\{ a_3 - a_2 - \mu + \frac{1}{rn^2} \left[r\rho\omega^2 + \frac{\mu}{r}(1-m^2) - \frac{m^2}{r}\sigma_r^0 + \frac{1}{r}(3\sigma_r^0 - \tau_{r\theta, \theta}^0 - r\sigma_{r,r}^0) \right] \right\} \cos m\theta + \\
 & + \left\{ a_4 - \frac{1}{r}\tau_{r\theta}^0 + \left(\frac{m}{nr} \right)^2 \left(\tau_{r\theta, r}^0 + \frac{1}{r}\sigma_{\theta, \theta}^0 - \frac{2}{r}\tau_{r\theta}^0 \right) \right\} \sin m\theta \quad (18) \\
 \varphi_6 = & \frac{m}{r^2 n^2} \{ \mu + 3\sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0 - \tau_{r\theta, \theta}^0 \} \cos m\theta + \left\{ 2 \left(\frac{m}{rn} \right)^2 \tau_{r\theta}^0 - ra_4 \right\} \sin m\theta \\
 \varphi_7 = & -\frac{m(\mu + \sigma_r^0)}{rn^2} \cos m\theta, \quad \varphi_8 = \frac{1}{r} \{ a_{10} - a_{11} + \tau_{r\theta, \theta}^0 \} \cos m\theta - ma_{12} \sin m\theta \\
 \varphi_9 = & \{ a_9 - a_{11} \} \cos m\theta, \quad \varphi_{10} = \frac{m}{r} \{ a_{10} - a_{11} - \tau_{r\theta, \theta}^0 \} \cos m\theta - a_{12} \sin m\theta \\
 \varphi_{11} = & \{ ra_{12} + \sigma_r^0 \} \sin m\theta, \quad \varphi_{12} = \left\{ n\mu - \frac{\mu + \sigma_r^0}{nr^2} \right\} \cos m\theta - \frac{m}{nr^2} \tau_{r\theta}^0 \sin m\theta \\
 \varphi_{13} = & \frac{\mu + \sigma_r^0}{nr} \cos m\theta - \frac{m}{nr} \tau_{r\theta}^0 \sin m\theta, \quad \varphi_{14} = \frac{\mu + \sigma_r^0}{nr} \cos m\theta \\
 \varphi_{15} = & -\frac{m(\mu + \sigma_r^0)}{nr^2} \cos m\theta - \frac{m^2}{nr^2} \tau_{r\theta}^0 \sin m\theta, \quad \varphi_{16} = \frac{m(\mu + \sigma_r^0)}{nr} \cos m\theta
 \end{aligned}$$

Условия непрерывности напряжений (11) на упругопластической границе $\gamma = \gamma^{(0)} + \delta\gamma^{(1)}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) с учетом (12), (13) имеют вид

$$\begin{aligned}
 & A^P \zeta_1 + A^P \zeta_2 + A^{nP} \varphi_3^P - A^{n^e} \varphi_3^e + A^{mP} \varphi_4^P - A^{mP} \varphi_4^P + \\
 & + B^P \zeta_5 + B^P \zeta_6 + B^{nP} \varphi_7^P - B^{nP} \varphi_7^e = 0 \\
 & A^P \zeta_8 + A^P \zeta_9 + B^P \zeta_{10} + B^P \zeta_{11} = 0 \\
 & A^P \zeta_{12} + A^P \zeta_{13} + A^{nP} \varphi_{14}^P - A^{n^e} \varphi_{14}^e + B^P \zeta_{15} + B^P \zeta_{16} = 0, \quad \zeta_i = \varphi_i^P - \varphi_i^e \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 16)
 \end{aligned} \quad (19)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из условия локальности возмущений $u_j \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2, 3$) следует

$$(A')^e = 0, \quad (A'')^e = 0, \quad (B')^e = 0, \quad (B'')^e = 0 \quad (20)$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (15)–(20) не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей [9]. В результате получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров A_{nm}, B_{nm} . Отсюда следует, что определение величины критической нагрузки q_0 , соответствующей локальной потере устойчивости горизонтальной выработки с эллиптическим поперечным сечением, сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области V^p, V^e массива (3), (4), (6), (8) необходимо учитывать уравнения (5) и (8), определяющие положение упруго-пластической границы γ – в горном массиве. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру m и образующей n , параметрам материала и конструкции λ_j . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины q_0 в зависимости от m, n при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы: $\det(q_0, m, n, \lambda_j) = 0$.

На фиг. 1 и 2 представлена зависимость критического давления на контуре выработки от величины гидростатического давления gh . При этом $R_0 = 0.4, \delta = 0.06, \mu = 1$, им соответствуют значения параметров волнообразования $n = m = 4$. На фиг.1 кривые 1, 2, 3

и 4 соответствуют $c = 0.9, 0.5, 0.1$ и 0.01 . При этом $\eta = 0.001$. На фиг. 2 кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют $\eta = 0.5, 0.1, 0.01$ и 0.001 . При этом $c = 0.9$.

Анализ численного эксперимента показал, что при увеличении глубины заложения выработки величина критического давления на контуре выработки увеличивается (фиг. 1, 2); с ростом коэффициента упрочнения c , область устойчивости увеличивается (фиг. 1). Критическая нагрузка на контуре выработки при увеличении вязкости уменьшается (фиг. 2).

Если в соотношениях (3)–(8) положить $\delta = 0$, то придем к результатам работы [4] для случая круговой цилиндрической выработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Л.В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 298–300.
2. Алимжанов М.Т. Проблемы устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Успехи механики. 1990. Т. 13. Вып. 3. С. 21–57.
3. Спорыхин А.Н., Гоцев Д.В. Локальная неустойчивость горизонтальных выработок с многослойной крепью в упруго-пластических массивах // Изв. РАН. МГТ. 2004. № 1. С. 158–166.
4. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. 359 с.
5. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
6. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
7. Гузь А.Н. Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977. 204 с.
8. Спорыхин А.Н., Ковалев А.В., Щеглова Ю.Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2004. 219 с.
9. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
6.07.2004