

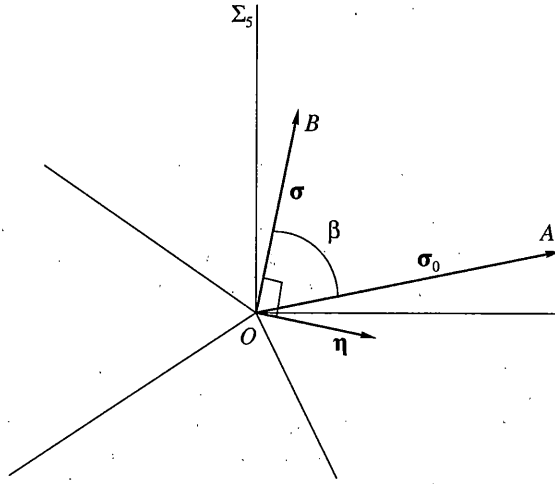
© 2007 г. В.А. ПЕЛЕШКО

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ТЕЛ, АНИЗОТРОПНЫХ ВСЛЕДСТВИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Пластические деформации конструкций на стадиях изготовления, испытания и вывода на режим эксплуатации вызывают в их материалах анизотропное изменение механических свойств, в том числе сопротивления ползучести. Рассматривается следующий частный, но важный для практики класс процессов нагружения начально изотропного материала: после простого активного пластического деформирования следует длительное стационарное нагружение в пределах упругости. Для описания второго этапа девиатор деформации ползучести представлен в виде аддитивного ортогонального разложения по направлениям повторного нагружения и векторной анизотропии. Коэффициенты разложения являются материальными функциями времени, интенсивностей предварительного и повторного нагружений, а также угла между направлениями указанных нагружений. Получены условия на материальные функции, при которых в любой заданный момент времени соответствие между тензорами напряжений и деформаций для предложенной модели является взаимно однозначным и непрерывным, а краевая задача в обобщенной постановке имеет единственное решение; доказана сходимост ь итерационного метода упругих решений для его нахождения. Идентификация модели производится по диаграммам ползучести (при стационарном напряжении различного уровня), определенным для материала в исходном состоянии и после предварительного пластического деформирования под углом (нулевым, развернутым и промежуточным) к направлению повторного нагружения. Показано согласие с имеющимися в литературе результатами экспериментов из рассматриваемого класса процессов для нержавеющей стали при высокой температуре. Предложен инженерный вариант теории, в котором используются данные опытов только при одноосном растяжении. Обсуждаются варианты модели в случаях, когда предварительное пластическое нагружение является циклическим (одномерным или круговым), повторное нагружение – нестационарным.

**1. Исходные предположения и определяющие соотношения.** Будем рассматривать материалы, которые в начальном состоянии (перед нагружением) с приемлемой точностью подчиняются постулату изотропии А.А. Ильюшина [1] (при необходимости, с модификацией пространства напряжений  $\Sigma_5$ , например, путем изменения масштаба осей  $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ ). К таковым, в частности, можно отнести большинство металлов в отожженном состоянии. Разделим объемные и сдвиговые свойства материала. Гидростатическое давление предполагается в пределах его малого влияния на касательные деформации. Объемной пластичностью и ползучестью (по сравнению со сдвиговой) будем пренебрегать.

Определим основной класс рассматриваемых процессов  $\Lambda$ : простое активное нагружение из начального изотропного состояния, затем полная разгрузка и продолжитель-



Фиг. 1

ное стационарное нагружение. Траектория процесса в изображающем пространстве напряжений  $\Sigma_5$  показана на фиг. 1. Предварительное нагружение  $OA$ , разгрузка  $AO$  и выход  $OB$  на этап повторного нагружения предполагаются относительно кратковременными – со скоростями, при которых определяются упругопластические (“мгновенные” квазистатические) свойства материала. Время  $t$  будем отсчитывать от начала стационарного режима  $\sigma = OB$ . Ограничимся процессами, в которых вторичные пластические деформации на участке  $AOB$  пренебрежимо малы<sup>1</sup> (точка  $B$  находится внутри поверхности текучести, получающейся в результате нагружения  $OA$ ). Весь процесс считается изотермическим, деформации – малыми.

Будем предполагать, что деформации пластичности и ползучести преобладают над упругими. Тогда можно пренебречь поправками, учитывающими упругую анизотропию, вызванную предварительным пластическим деформированием на участке  $OA$ . По окончании этапа  $OA$  получим остаточную (пластическую) деформацию [2]:

$$\epsilon_{ij(0)}^{(P)} = \mathcal{E}_{ij(0)}^{(P)} = [1.5F(\sigma_{u(0)})/\sigma_{u(0)} - 1/(2G)]S_{ij(0)} \tag{1.1}$$

где  $S_{ij(0)}$  и  $\sigma_{u(0)} \equiv (1.5S_{kl(0)}S_{kl(0)})^{1/2}$  – девиатор и интенсивность напряжений в точке  $A$ ;  $F(\sigma_{u(0)}) = \epsilon_{u(0)} \equiv (\mathcal{E}_{kl(0)}\mathcal{E}_{kl(0)}/1.5)^{1/2}$  – зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций при простом активном упругопластическом нагружении исходного материала;  $G = \text{const} > 0$  – модуль сдвиговой упругости.

По условию, дополнительные пластические деформации на этапе  $OB$  не возникают, поэтому тензор деформации  $\epsilon_{ij}(t)$  при  $t \geq 0$  можно разложить на три составляющих – предварительную пластическую (1.1), упругую и ползучести:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij(0)}^{(P)} + \epsilon_{ij}^{(E)} + \epsilon_{ij}^{(C)} \tag{1.2}$$

<sup>1</sup> В связи с этим можно рассматривать более широкий, чем  $\Lambda$ , класс процессов  $\tilde{\Lambda}$ , считая переход от точки  $A$  к точке  $B$  произвольным при условиях его кратковременности и отсутствия в нем вторичных пластических деформаций. По отношению к деформации на этапе длительного нагружения, все процессы из класса  $\tilde{\Lambda}$  с заданными точками  $A$  и  $B$  эквивалентны процессу  $OAOB$  из класса  $\Lambda$ .

Упругая деформация определена законом Гука

$$\varepsilon_{ij}^{(E)} = S_{ij}/(2G) + \sigma_{mm}\delta_{ij}/(9K) \quad (1.3)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений в точке  $B$ ;  $S_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \sigma_{mm}\delta_{ij}/3$  – его девиатор (соответствует вектору напряжений  $\sigma = \mathbf{OB}$ );  $K = \text{const} > 0$  – модуль объемной упругости. Будем считать  $F(\sigma_{ij(0)})$ ,  $G$ ,  $K$  известными из опыта при активном упругопластическом одноосном растяжении исходного материала. Требуется построить соотношение для  $\varepsilon_{ij}^{(C)}$  в процессах из класса  $\Lambda$ .

Деформация ползучести (в указанном скоростном режиме нагружения  $ОАОВ$ ) возникает только на этапе повторного нагружения:  $\varepsilon_{ij}^{(C)}|_{t=0} = 0$ . Опираясь на работу [3] (с геометрически сходными рассматриваемыми процессами), будем исходить из ортогонального разложения искомого вектора в плоскости процесса:

$$\varepsilon^{(C)} = \Phi\sigma/\sigma + \Psi\eta \quad (1.4)$$

$$\eta \equiv \frac{\sigma_0}{\sigma_0 \sin \beta} - \frac{\sigma}{\sigma \tan \beta}, \quad \sigma \equiv |\sigma|, \quad \sigma_0 \equiv |\sigma_0|, \quad \beta \equiv \arccos\left(\frac{\sigma_0 \cdot \sigma}{\sigma_0 \sigma}\right) \quad (1.5)$$

в девиаторном виде формулы (1.4), (1.5) записываются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^{(C)} = \varepsilon_{ij}^{(C)} = \Phi S_{ij}/\sigma + \Psi N_{ij} \quad (1.4)$$

$$N_{ij} \equiv \frac{S_{ij(0)}}{\sigma_0 \sin \beta} - \frac{S_{ij}}{\sigma \tan \beta}, \quad \sigma = (S_{kl}S_{kl})^{1/2}, \quad \sigma_0 = (S_{kl(0)}S_{kl(0)})^{1/2}, \quad \beta = \arccos\left(\frac{S_{kl(0)}S_{kl}}{\sigma_0 \sigma}\right) \quad (1.5)$$

Здесь  $\eta$  – единичный вектор, лежащий в плоскости  $(\sigma_0; \sigma)$  ортогонально к  $\sigma$  и под острым углом к  $\sigma_0$ ;  $\varepsilon_{ij}^{(C)}$ ,  $S_{ij}$ ,  $N_{ij}$  – девиаторы, соответствующие векторам  $\varepsilon^{(C)}$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$ ;  $\beta$  – угол между направлениями предварительного и повторного нагружений (фиг. 1). Коэффициенты разложения (1.4), согласно постулату изотропии [1], являются материальными функциями времени и параметров внутренней геометрии траектории нагружения  $ОАОВ$ , в качестве которых, как и в [3], выберем длины направляющих отрезков и угол между ними:

$$\Phi = \Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta), \quad \Psi = \Psi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) \quad (1.6)$$

Область определения функций  $\Phi$ ,  $\Psi$  (1.6) есть  $U = [0; +\infty)^3 \times [0; \pi]$ . При  $\sigma_0$ ,  $\sigma$ , превышающих предел прочности материала при заданной температуре,  $\Phi$  и  $\Psi$  не имеют физического смысла и могут быть доопределены из математических соображений.

**2. Исследование математической корректности определяющих соотношений.** Для стабильного материала соответствие между процессами нагружения и деформирования является взаимно однозначным и непрерывным. Найдем условия на функции  $\Phi$ ,  $\Psi$ , при которых модель (1.1)–(1.6) обладает указанными свойствами. В рамках данного раздела  $S_{ij(0)}$ ,  $t$  считаются заранее заданными (фиксированными), поэтому  $\Phi$ ,  $\Psi$  рассматриваются как функции двух переменных  $(\sigma, \beta)$ , параметрически зависящие от  $(t, \sigma_0)$ .

Чтобы избежать некорректных вычислений  $\eta$ ,  $N_{ij}$  (1.5) при значениях  $\beta$  вблизи краев интервала  $[0; \pi]$ , положим

$$\Psi(\sigma, \beta) = 0, \quad \forall (\sigma, \beta) \in [0; +\infty) \times ([0; \rho] \cup [\pi - \rho; \pi]); \quad \rho = \text{const} \ll \pi \quad (2.1)$$

Кроме того, пусть

$$\Phi(\sigma, \beta), \Psi(\sigma, \beta) \in C(U_1), \quad U_1 = [0; +\infty) \times [0; \pi] \quad (2.2)$$

При задании  $S_{ij(0)}$ ,  $t$  и выполнении условий (2.1), (2.2) тензор деформаций  $\epsilon_{ij}$  (1.1)–(1.6) однозначно определен тензором напряжений  $\sigma_{ij}$  и непрерывно от него зависит.

Рассмотрим вопрос о разрешимости (1.1)–(1.6) относительно  $\sigma_{ij}$ . Гидростатическое напряжение однозначно определяется объемной деформацией:  $\sigma_{mm} = 3K\epsilon_{mm}$ . Сдвиговые соотношения модели (1.1)–(1.6) запишем в виде операторного уравнения

$$\mathbf{F}\sigma = \varepsilon, \quad \mathbf{F}\sigma \equiv \varepsilon_{(0)}^{(P)} + \sigma/(2G) + \Phi(\sigma, \beta)\sigma/\sigma + \Psi(\sigma, \beta)\eta \quad (2.3)$$

Вектор предварительной пластической деформации (1.1):

$$\varepsilon_{(0)}^{(P)} = [\sqrt{1.5}F(\sqrt{1.5}\sigma_0)/\sigma_0 - 1/(2G)]\sigma_0$$

является известным (фиксированным), поскольку заранее задан вектор  $\sigma_0$ .

Можно показать, что при выполнении условий

$$1/(2G) + [\Phi(\sigma, \beta) - \Psi(\sigma, \beta)\text{ctg}\beta]/\sigma \geq m_F = \text{const} > 0, \quad \forall(\sigma, \beta) \in U_1 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} W \equiv [1/(2G) + \Phi(\sigma_1, \beta_1)/\sigma_1 - m_F][\sigma_1 - \sigma_2 \cos(\beta_1 - \beta_2)]\sigma_1 + [1/(2G) + \Phi(\sigma_2, \beta_2)/\sigma_2 - \\ - m_F][\sigma_2 - \sigma_1 \cos(\beta_1 - \beta_2)]\sigma_2 + \Psi(\sigma_1, \beta_1)\sigma_2[\cos\beta_1 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \cos\beta_2]/\sin\beta_1 + \\ + \Psi(\sigma_2, \beta_2)\sigma_1[\cos\beta_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \cos\beta_1]/\sin\beta_2 \geq 0, \quad \forall(\sigma_1, \beta_1), (\sigma_2, \beta_2) \in U_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

оператор  $\mathbf{F}$  обладает свойством сильной монотонности:

$$(\mathbf{F}\sigma_1 - \mathbf{F}\sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) - m_F(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq W \geq 0, \quad \forall\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_5$$

Если функции  $\Phi, \Psi$  – кусочно-гладкие, и

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\sigma \partial \beta} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial(\Psi/\sin\beta)}{\partial \sigma} \right| \leq M_3, \quad \left| \frac{\partial(\Psi/\sin\beta)}{\sigma \partial \beta} \right| \leq M_4; \quad M_1, \dots, M_4 = \text{const} \quad (2.6)$$

$$\Phi(0, \beta) = \Psi(0, \beta) = 0, \quad \forall\beta \in [0; \pi] \quad (2.7)$$

то справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}\sigma_1 - \mathbf{F}\sigma_2| \leq M_F |\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \forall\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_5 \\ M_F \equiv 1/(2G) + 3M_1 + 4M_3 + (M_2 + M_3 + 2M_4)\pi/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

т.е. оператор  $\mathbf{F}$  является непрерывным по Липшицу с константой  $M_F$ .

Из установленных свойств  $\mathbf{F}$  следует [4, с. 104], что при выполнении условий (2.4)–(2.7) уравнение (2.3) имеет точно одно решение  $\sigma \in \Sigma_5$ . Его можно найти с помощью итерационного метода

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - \lambda \left[ \frac{\sigma^{(k)}}{2G} + \Phi(\sigma^{(k)}, \beta^{(k)}) \frac{\sigma^{(k)}}{\sigma^{(k)}} + \Psi(\sigma^{(k)}, \beta^{(k)}) \eta^{(k)} + \varepsilon_{(0)}^{(P)} - \varepsilon \right] \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.9)$$

сходящегося при любом  $\lambda \in (0; 2m_F/M_F^2)$  (константа  $M_F$  указана в (2.8)) и любом начальном приближении  $\sigma^{(0)} \in \Sigma_5$  со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$\kappa_F = (1 - 2m_F\lambda + M_F^2\lambda^2)^{1/2} < 1$ ; имеет место оценка погрешности  $|\sigma^{(k)} - \sigma| \leq |F\sigma^{(0)} - \varepsilon|\lambda\kappa_F^k/(1 - \kappa_F)$ . Кроме того, решение уравнения (2.3) непрерывно зависит от правой части:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \frac{(F\sigma_1 - F\sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)}{m_F|\sigma_1 - \sigma_2|} \leq \frac{|F\sigma_1 - F\sigma_2|}{m_F} = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{m_F}, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{E}_5$$

При практическом применении метода (2.9) можно взять  $\sigma^{(0)} = 0$ , а параметр  $\lambda$  для ускорения сходимости сделать переменным:  $\lambda = \lambda_k$ , например,  $\lambda_0 = 2G$ ;  $\lambda_k = \lambda_{k-1}/2^{n(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), где  $n(k)$  – первое целое неотрицательное число, при котором  $(|F\sigma^{(k+1)} - \varepsilon| < |F\sigma^{(k)} - \varepsilon|) \wedge ((F\sigma^{(k+1)} - \varepsilon) \cdot (F\sigma^{(k)} - \varepsilon) > 0)$ .

Итак, соотношения (1.1)–(1.6) при заданных  $S_{ij(0)}$ ,  $t$  устанавливают взаимно однозначное и непрерывное соответствие между тензорами напряжений и деформаций, если функции  $\Phi$ ,  $\Psi$  при любых фиксированных значениях параметров  $t$ ,  $\sigma_0$  являются кусочно-гладкими и удовлетворяют условиям (2.1), (2.4)–(2.7).

Эти условия связаны с определенными физическими свойствами материалов. Требование (2.1) оправдано симметричностью анизотропии относительно направления предварительного нагружения и устойчивостью свойств материала при близких нагружениях. Условие (2.4) означает, что проекции векторов  $\sigma$  и  $\varepsilon$  на направление  $\eta_0$ ,  $\eta_0 \in (\sigma_0; \sigma)$ ,  $\eta_0 \perp \sigma_0$ , имеют одинаковый знак:  $(\varepsilon \cdot \eta_0)/(\sigma \cdot \eta_0) = 1/(2G) + [\Phi(\sigma, \beta) - \Psi(\sigma, \beta) \operatorname{ctg} \beta]/\sigma \geq m_F > 0$  (например, если  $\sigma_0$  соответствует осевому растяжению трубчатого образца, то при повторном нагружении осевой силой и крутящим моментом не может возникнуть деформация кручения в обратную сторону, что подтверждается опытами [5]).

Рассмотрим проекцию вектора повторной деформации  $\varepsilon - \varepsilon_{(0)}^{(P)}$  на направление повторного нагружения  $\sigma/\sigma$ :  $(\varepsilon - \varepsilon_{(0)}^{(P)}) \cdot \sigma/\sigma = \sigma/(2G) + \Phi(\sigma, \beta) \equiv \Phi_1(\sigma, \beta)$ . Условие (2.5) в частном случае  $\sigma_2 = 0$  и условие (2.7), выражающее естественное предположение  $\{\varepsilon_{ij}^{(C)}(t) = 0$ , если  $\sigma_{ij}(\tau) = 0, \forall \tau \in (0; t]\}$ , обеспечивают неотрицательность  $\Phi_1(\sigma, \beta)$ , причем  $\Phi_1(\sigma, \beta) = 0$  только в случае  $\sigma = 0$ . Условие (2.5) в другом частном случае  $\beta_1 = \beta_2$  означает строго монотонный рост функции  $\Phi_1(\sigma, \beta)$  по аргументу  $\sigma$  (не медленнее линейной функции  $m_F\sigma$ ), что является проявлением свойства упрочнения материала. С другой стороны, условие (2.6) ограничивает сверху (величиной  $1/(2G) + M_1$ ) скорость роста  $\Phi_1(\sigma, \beta)$  по аргументу  $\sigma$ .

Условия (2.1), (2.4)–(2.7) следует проверить (например, каким-либо численным методом), когда получены экспериментальные аппроксимации материальных функций  $\Phi$ ,  $\Psi$ . Нарушение этих условий может привести к ошибочным результатам (расходимость, неединственность) при решении краевых задач.

**3. Постановка и метод решения краевой задачи.** Пусть под действием массовых и поверхностных сил  $X(t, x)$ ,  $T(t, x)$  в каждой точке  $x$  тела, занимающего ограниченную область  $\Omega \subset R^3$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , реализуется процесс нагружения из класса  $\Lambda^2$ . Будем считать, что из решения краевой задачи теории малых упругопластических деформаций [2], соответствующей окончанию этапа активного предварительно-

<sup>2</sup> В общем случае перед началом повторного нагружения в теле имеется поле остаточных напряжений, поэтому можно допустить в каждой точке тела процесс из класса  $\tilde{\Lambda}$ . В прикладных задачах допустимы процессы в пределах применимости модели (1.1)–(1.6) (см. заключительную часть п. 5).

го нагружения, известны поля  $S_{ij(0)}(\mathbf{x})$  и  $\mathfrak{E}_{ij(0)}^{(P)}(\mathbf{x})$  (1.1). Тогда краевая задача об определении напряженно-деформированного состояния тела в заданный момент времени  $t > 0$  при использовании определяющих соотношений (1.1)–(1.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i &= 0; \quad \mathfrak{E}_{ij} = \mathfrak{E}_{ij(0)}^{(P)} + [\sigma/(2G) + \Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta)]S_{ij}/\sigma + \Psi(t, \sigma_0, \sigma, \beta)N_{ij} \\ \sigma_{mm} &= 3K\varepsilon_{mm}; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mm}\delta_{ij}/3; \quad \mathfrak{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{mm}\delta_{ij}/3; \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ u_i|_{\Gamma_1} &= 0; \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Gamma_2} = T_i; \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma; \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset; \quad \Gamma_1 \neq \emptyset \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $N_{ij}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$  определены выражениями (1.5) (в девиаторной форме), а внешние силы  $X_i$ ,  $T_i$  относятся к рассматриваемому моменту  $t$ .

Перейдем к обобщенной постановке краевой задачи (3.1) в виде нелинейного операторного уравнения [6, 7, 4]:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} : H(\Omega) \rightarrow H^*(\Omega), \quad \mathbf{f} \in H^*(\Omega)$$

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} [S_{ij}(\mathbf{u}) + \sigma_{mm}(\mathbf{u})\delta_{ij}/3]\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})d\Omega, \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} X_m v_m d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_m v_m d\Gamma_2, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\Omega) \quad (3.2)$$

Здесь  $H(\Omega)$  – гильбертово пространство, образованное замыканием множества вектор-функций  $\{u_i \in C^2(\bar{\Omega}), u_i|_{\Gamma_1} = 0\}$  в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [2G\mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u})\mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{v}) + K\varepsilon_{mm}(\mathbf{u})\varepsilon_{mm}(\mathbf{v})]d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\Omega)$$

Выражения  $S_{ij}(\mathbf{u})$ ,  $\sigma_{mm}(\mathbf{u})$  определены соотношениями (3.1). Внешние нагрузки, учитывая тип пространства  $H(\Omega)$ , следует подчинить ограничениям

$$X_i(t, \mathbf{x}) \in L^p(\Omega), \quad p > 6/5; \quad T_i(t, \mathbf{x}) \in L^q(\Gamma_2), \quad q > 4/3 \quad (3.3)$$

где  $L^r(Y)$  – пространство измеримых по Лебегу функций  $g(y)$  с нормой

$$\|g\|_{L^r(Y)} = \left( \int_Y |g(y)|^r dY \right)^{1/r}$$

Решение  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  операторного уравнения (3.2) назовем обобщенным решением краевой задачи (3.1).

Свойства сильной монотонности и непрерывности по Липшицу оператора  $\mathbf{F}$  (2.3) можно перенести на оператор  $\mathbf{A}$  (3.2), но с другими числами

$$m_A = \min\{1; m_F/(2GM_F^2)\}, \quad M_A = \max\{1; 1/(2Gm_F)\} \quad (3.4)$$

в качестве констант монотонности и Липшица соответственно:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \rangle - m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 &= \int_{\Omega} \{ [S_{ij}(\mathbf{u}_1) - S_{ij}(\mathbf{u}_2)][\mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u}_1) - \mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u}_2)] - \\ &- 2Gm_A [\mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u}_1) - \mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u}_2)]^2 \} d\Omega + K(1 - m_A) \int_{\Omega} [\varepsilon_{mm}(\mathbf{u}_1) - \varepsilon_{mm}(\mathbf{u}_2)]^2 d\Omega \geq \\ &\geq \int_{\Omega} \{ [\sigma(\mathbf{u}_1) - \sigma(\mathbf{u}_2)] \cdot [\mathbf{F}\sigma(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}\sigma(\mathbf{u}_2)] - m_F [\sigma(\mathbf{u}_1) - \sigma(\mathbf{u}_2)]^2 \} d\Omega \geq \int_{\Omega} W d\Omega \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{A} \mathbf{u}_1 - \mathbf{A} \mathbf{u}_2 \|_*^2 - M_A^2 \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|^2 = (2G)^{-1} \int_{\Omega} [S_{ij}(\mathbf{u}_1) - S_{ij}(\mathbf{u}_2)]^2 d\Omega - \\ & - 2GM_A^2 \int_{\Omega} [\mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u}_1) - \mathfrak{E}_{ij}(\mathbf{u}_2)]^2 d\Omega + K(1 - M_A^2) \int_{\Omega} [\varepsilon_{mm}(\mathbf{u}_1) - \varepsilon_{mm}(\mathbf{u}_2)]^2 d\Omega \leq \\ & \leq (2G)^{-1} \int_{\Omega} \{ |\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2)|^2 - |\mathbf{F}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2)|^2 / m_F^2 \} d\Omega \leq 0, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H(\Omega) \end{aligned}$$

*Теорема.* Пусть кусочно-гладкие функции  $\Phi, \Psi$  удовлетворяют условиям (2.1), (2.4)–(2.7) (при любых фиксированных значениях  $t, \sigma_0$ ), а внешние нагрузки – условиям (3.3). Тогда обобщенное решение  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  краевой задачи (3.1) существует и единственно. Оно непрерывно (по Липшицу, с константой  $m_A^{-1}$ ) зависит от функционала внешних нагрузок  $\mathbf{f}$  и может быть найдено с помощью итерационного метода

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \mathbf{u}^{(k+1)} &= \mathbf{J} \mathbf{u}^{(k)} - \gamma (\mathbf{A} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{f}) \quad (k = 0, 1, \dots) \\ \mathbf{J} : H(\Omega) &\rightarrow H^*(\Omega), \quad \langle \mathbf{J} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H(\Omega) \end{aligned} \quad (3.5)$$

сходящегося при любом  $\gamma \in (0; 2m_A/M_A^2)$  ( $m_A$  и  $M_A$  указаны в (3.4)) и любом начальном приближении  $\mathbf{u}^{(0)} \in H(\Omega)$  со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $\kappa = (1 - 2m_A\gamma + M_A^2\gamma^2)^{1/2} < 1$ ; имеет место оценка погрешности

$$\| \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u} \| \leq \| \mathbf{A} \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{f} \|_* \gamma \kappa^k / (1 - \kappa)$$

Доказательство теоремы следует [4, с. 98, 104] из установленных свойств оператора  $\mathbf{A}$ .

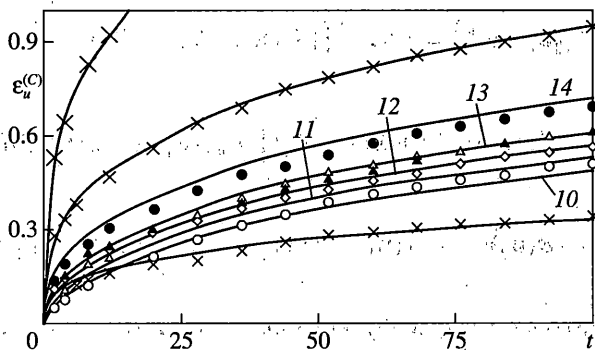
Операторные рекуррентные соотношения (3.5) представляют следующий метод упругих решений:

$$2G\mathfrak{E}_{ij}^{(k+1)} + K\varepsilon_{mm,i}^{(k+1)} + X_i^{(k)} = 0; \quad u_i^{(k+1)}|_{\Gamma_1} = 0; \quad [2G\mathfrak{E}_{ij}^{(k+1)}n_j + K\varepsilon_{mm}^{(k+1)}n_i]|_{\Gamma_2} = T_i^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

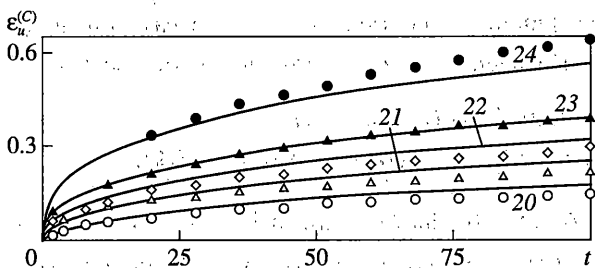
$$\dot{X}_i^{(k)} \equiv \gamma(X_i + S_{ij}^{(k)}) - 2G\mathfrak{E}_{ij}^{(k)} - K(1 - \gamma)\varepsilon_{mm,i}^{(k)}$$

$$T_i^{(k)} \equiv \gamma T_i + [2G\mathfrak{E}_{ij}^{(k)}n_j + K(1 - \gamma)\varepsilon_{mm}^{(k)}n_i - \gamma S_{ij}^{(k)}n_j]|_{\Gamma_2}$$

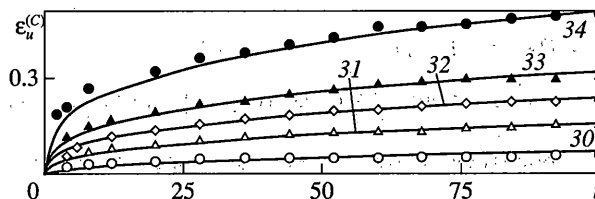
На каждом итерационном шаге надо найти поле  $S_{ij}^{(k)}(\mathbf{x})$ , соответствующее  $\mathfrak{E}_{ij}^{(k)}(\mathbf{x})$  согласно (1.1)–(1.4) (это можно сделать с помощью метода (2.9)), а затем решить краевую задачу линейной теории упругости с фиктивными внешними нагрузками  $\mathbf{X}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}$ , определенными из решения задачи на предыдущем шаге. Нулевым приближением  $\mathbf{u}^{(0)} \in H(\Omega)$  может служить известное поле перемещений в конце этапа активного пластического нагружения. Для ускорения сходимости в (3.5) можно использовать переменный итерационный параметр  $\gamma = \gamma_k$ , например,  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_k = \gamma_{k-1}/2^{n(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), где  $n(k)$  – первое целое неотрицательное число, при котором  $(\| \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)} \| < \| \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)} \|) \wedge ((\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}) > 0)$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

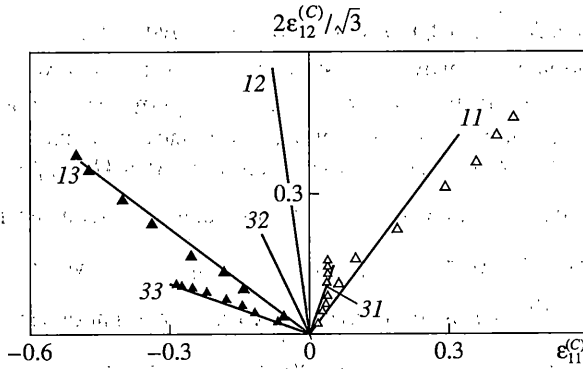


Фиг. 4

Заметим, что условия (2.4)–(2.8) сильной монотонности и непрерывности по Липшицу операторов  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{A}$  можно перенести на соотношения деформационно-анизотропной пластичности [3], формально заменив в (2.4)–(2.8) пару переменных  $(\sigma, \beta)$  на  $(\varepsilon, \alpha)$  и убрав слагаемые  $1/(2G)$ . Это позволяет усилить результаты работы [3] в части возможности и методов разрешения определяющих соотношений и краевых задач.

**4. Аппроксимации материальных функций и экспериментальная проверка модели.** Программы нагружения из рассматриваемого класса  $\Lambda$  реализованы в серии опытов [5]: предварительное пластическое растяжение  $\varepsilon_{11(0)}^{(P)} = i \cdot 1\%$  ( $i = 1, 2, 3$  – соответствующие значения предварительного напряжения  $\sigma_{11(0)} = 174, 196, 218$  [МПа]), полная разгрузка и затем длительное (100 ч) стационарное нагружение  $\{\sigma_{11}; \sigma_{12}\}$  с интенсивностью  $\sigma_u = (\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2)^{1/2} = 140$  МПа и значением  $\beta = \arccos(\sigma_{11}/\sigma_u) = j \cdot \pi/4$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ); номер нагружения далее будем обозначать как  $ij$ . Материал – нержавеющая сталь 316, температура в течение опытов  $650^\circ\text{C}$ , партия тонкостенных трубчатых образцов до испытаний была отожжена и проверена на начальную изотропность при упругоэластических и длительных нагружениях [5]. На фиг. 2, 3, 4, относящихся к опытам с  $i = 1, 2, 3$  соответ-





Фиг. 5

ственно, представлено изменение интенсивности деформаций ползучести  $\epsilon_u^{(C)} = [(\epsilon_{11}^{(C)})^2 + (2\epsilon_{12}^{(C)})^2/3]^{1/2}$  во времени: светлые круги, треугольники, ромбы соответствуют опытам с  $j = 0, 1, 2$ , темные треугольники и круги  $-j = 3, 4$ . На фиг. 5 показаны траектории деформаций ползучести в опытах 11, 13 (крупные треугольники) и 31, 33 (мелкие треугольники); для нагрузжений  $i2, 2j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) траектории деформаций в [5] не приведены. На всех графиках публикуемой статьи деформации даны в процентах, время – в часах, номер линии и маркеров совпадает с номером нагружения.

В дополнение к данным  $1j$ , на фиг. 2 крестами нанесены результаты стандартных опытов на ползучесть исходного материала ( $\epsilon_{u(0)}^{(P)} = 0$ ) при  $\sigma_{11} = 120, 140, 160$  [МПа], большему значению  $\sigma_{11}$  соответствует больший размер крестов. По этим трем кривым, с учетом их подобия, найдена зависимость  $\epsilon_u^{(C)} = \sqrt{2/3} \Phi(t, 0, \sigma, 0) = \Pi(t)f(\sigma_u)$ :

$$\Pi(t) = \Pi_1(t) + \Pi_2(t) + \Pi_3(t) = \mu_1[1 - \exp(-t/\xi_1)] + \mu_2[1 - \exp(-t/\xi_2)] + \mu_3 t \quad (4.1)$$

$$\mu_1 = 0.003, \quad \mu_2 = 0.0041, \quad \mu_3 = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}, \quad \xi_1 = 1.5 \text{ ч}, \quad \xi_2 = 26 \text{ ч} \quad (4.2)$$

$$f(\sigma_u) = 1 - B\{1 - \exp[(\sigma_u - C)/D]\}, \quad B = 2.3, \quad C = 140 \text{ МПа}, \quad D = 60 \text{ МПа} \quad (4.3)$$

Все аппроксимации предназначены для рассматриваемых интервалов напряжений и времени. Заметим, что количество и вид слагаемых  $\Pi_m(t)$ , составляющих функцию ползучести  $\Pi(t)$ , могут отличаться от предложенных в (4.1).

В опытах [5] значение интенсивности повторного нагружения  $\sigma_u = 140$  МПа не варьровалось, поэтому для определения зависимости функций  $\Phi, \Psi$  от пары переменных  $(\sigma_0, \sigma)$  нужны дополнительные предположения. Будем считать, что при  $\beta = 0$  и фиксированном  $\sigma_0$  кривые ползучести  $\epsilon_u^{(C)} \sim t$  для любых значений  $\sigma$  подобны с коэффициентом, не зависящим от  $\sigma_0$ , а форма этих кривых зависит от  $\sigma_0$  через разность  $\sigma_0 - \sigma$ . При высокой нелинейности связи деформаций с напряжениями целесообразно вместо  $\sigma_0 - \sigma$  использовать величину  $\Delta\epsilon_u^{(P)}$  разности интенсивностей пластических деформаций, соответствующих  $\sigma_0$  и  $\sigma$ :  $\Delta\epsilon_u^{(P)} \equiv F(\sigma_{u(0)}) - F(\sigma_u) - (\sigma_{u(0)} - \sigma_u)/(3G)$ . Тогда

$\sqrt{2/3} \Phi(t, \sigma_0, \sigma, 0) = \varphi(t, \Delta \varepsilon_u^{(P)}) f_0(\sigma_u)^3$ . В случае  $\sigma = \sigma_0$  получим  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} = 0$ ,  $\sqrt{2/3} \Phi(t, \sigma, \sigma, 0) = \varphi(t, 0) f_0(\sigma_u)$ . Стационарное нагружение  $\sigma$  исходного материала можно отождествить с процессом из класса  $\Lambda$ , в котором  $\sigma_0 = \sigma$  (добавление упругого цикла разгрузки-нагрузки перед началом стационарного нагружения не повлияет на последующую ползучесть), поэтому  $\Phi(t, 0, \sigma, 0) = \Phi(t, \sigma, \sigma, 0)$ , и, следовательно,  $\varphi(t, 0) = \Pi(t)$ ,  $f_0(\sigma_u) = f(\sigma_u)$ . Для упругого предварительного нагружения ( $\varepsilon_{u(0)}^{(P)} = 0$ ) аналогичное отождествление приводит к  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} = 0$ ,  $\Phi(t, \sigma_0, \sigma, 0) = \Phi(t, 0, \sigma, 0)$ ,  $\forall \sigma_0 < \sigma^{(E)}$  ( $\sigma^{(E)}$  – предел упругости исходного материала). Случай  $\{\sigma_0 < \sigma; \varepsilon_{u(0)}^{(P)} > 0\}$  не рассматривается, т.к. такой процесс не входит в класс  $\Lambda$ . Таким образом, аргумент  $\Delta \varepsilon_u^{(P)}$  функции  $\varphi(t, \Delta \varepsilon_u^{(P)})$  неотрицателен, причем  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} = 0$  только в случае  $\varepsilon_{u(0)}^{(P)} = 0$ .

Сравнение кривых  $\varepsilon_u^{(C)} \sim t$  в стандартном опыте  $\{\sigma_{11(0)} = 0; \sigma_{11} = 140 \text{ МПа}\}$  (в котором  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} = 0$ ,  $\varepsilon_u^{(P)} \approx 0.003$ ) и в опытах  $i0, i = 1, 2, 3$  (в которых  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} = 0.007, 0.017, 0.027$  соответственно) показывает, что с ростом  $\Delta \varepsilon_u^{(P)}$  материал приобретает большее сопротивление ползучести. При небольших  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} < 0.01$  такое упрочнение проявляется в основном на самой начальной стадии ползучести, а скорость установившейся ползучести мало отличается от присущей исходному материалу. При увеличении  $\Delta \varepsilon_u^{(P)}$  дальнейшее “подавление” ползучести происходит меньшими темпами (эффект “насыщения”) и становится более равномерным по времени (кривая ползучести приближается к подобной  $\Pi(t)$ ). Эти явления можно описать с помощью функции  $\varphi$  вида

$$\varphi(t, \Delta \varepsilon_u^{(P)}) = \Pi(t) - \sum_{m=1}^3 \Pi_m(t) \varphi_m(\Delta \varepsilon_u^{(P)}) \quad (4.4)$$

$$\varphi_m(\Delta \varepsilon_u^{(P)}) = a \{1 - \exp[-M(\Delta \varepsilon_u^{(P)} + r_m)/b]\} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

Функция  $M(x) \equiv xH(x)$  (первообразная для функции Хевисайда  $H(x)$ ) дает возможность использовать отрицательные материальные константы  $r_m$ , когда  $m$ -я стадия ползучести зависит от  $\Delta \varepsilon_u^{(P)}$  только начиная с некоторого значения  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} = -r_m$ . Из опытов  $i0$  ( $i = 1, 3$ ) найдены константы

$$a = 1, \quad b = 0.01, \quad r_1 = 0.014, \quad r_2 = r_3 = -0.0035 \quad (4.6)$$

Для непрерывности функции  $\Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta)$  по аргументу  $\sigma$  нужно обеспечить непрерывность  $\varphi_m(\Delta \varepsilon_u^{(P)})$  ( $m = 1, 2, 3$ ) при условии  $\varphi_m(0) = 0$ . Если  $r_m \leq 0$ , то  $\varphi_m$  (4.5) удовлетворяет этому требованию; если  $r_m > 0$ , то на малом начальном участке  $\Delta \varepsilon_u^{(P)} \in [0; \delta]$  функцию  $\varphi_m$  (4.5) можно заменить на линейную, проходящую через точки  $(0; 0)$  и  $(\delta; \varphi_m(\delta))$ .

<sup>3</sup> Если имеются результаты опытов при различных  $\sigma$  и  $\sigma_0$ , согласно которым гипотеза  $\sqrt{2/3} \Phi(t, \sigma_0, \sigma, 0) = \varphi(t, \Delta \varepsilon_u^{(P)}) f_0(\sigma_u)$  выполняется недостаточно точно, то в  $\varphi$  следует ввести зависимость от  $\sigma$  (например, в виде дополнительных множителей  $f_m(\sigma)$  в функции  $\varphi_m$  (4.5)).

Кривые ползучести  $\epsilon_u^{(C)} \sim t$  (фиг. 2–4) можно использовать для построения функции  $\Phi$  не только в случае  $\beta = 0$ , но и при других значениях  $\beta$ . Действительно,  $\epsilon_u^{(C)} = [2(\Phi^2 + \Psi^2)/3]^{1/2}$ , и так как  $|\Psi/\Phi| < 0.2-0.6$  (фиг. 5), то с приемлемой точностью  $\epsilon_u^{(C)} \approx \sqrt{2/3} \Phi$ . Как видно из фиг. 2–4, упрочнение материала, вызванное предварительной пластической деформацией, имеет анизотропный характер, монотонно убывая по  $\beta$ . При фиксированных  $\sigma_0, \sigma$  кривые изменения во времени разности между  $\epsilon_u^{(C)}$  для исходного материала и прошедшего предварительное нагружение приблизительно подобны при разных  $\beta$ , поэтому обобщение функции  $\Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta)$  на случай произвольного  $\beta$  примем в виде

$$\Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) = \sqrt{1.5} f(\sigma_u) \left[ \Pi(t) - \chi(\beta) \sum_{m=1}^3 \Pi_m(t) \Phi_m(\Delta \epsilon_u^{(P)}) \right] \quad (4.7)$$

По данным опытов  $3j$  ( $j = 0, \dots, 4$ ) функция  $\chi(\beta)$  имеет вид двухзвенной ломаной с узловыми точками  $(0; 1), (3\pi/4; 3/4), (\pi; 1/2)$ :

$$\chi(\beta) = 1 - [q_0\beta + q_1 M(\beta - \beta_1)]/\pi, \quad q_1 = 2q_0 = 2/3, \quad \beta_1 = 3\pi/4 \quad (4.8)$$

Перейдем к описанию векторной анизотропии в процессе ползучести, т.е. поведения величины  $\theta \equiv \arccos[(\sigma/\sigma) \cdot (\epsilon^{(C)}/\epsilon^{(C)})] = \arccos[(1 + \Psi^2/\Phi^2)^{-1/2}]$  – угла между векторами  $\sigma$  и  $\epsilon^{(C)}$ . Относительная малость  $\theta$  (по сравнению с изменениями величины  $\epsilon_u^{(C)}$ , характеризующей скалярные свойства материала при ползучести) оправдывает упрощенный подход к отношению  $\Psi/\Phi$ . Как видно из фиг. 5, единой тенденции к росту или уменьшению  $\theta$  во времени нет, поэтому допустим независимость  $\Psi/\Phi$  от  $t$ . Дополнительно предположим, что отношение  $\Psi/\Phi$  зависит от пары переменных  $(\sigma_0, \sigma)$  через разность  $\Delta \epsilon_u^{(P)}$ . Тогда

$$\Psi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) = \Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) \psi(\Delta \epsilon_u^{(P)}, \beta) \quad (4.9)$$

Качественных различий поведения  $\theta$  при разных  $\Delta \epsilon_u^{(P)}$  нет (фиг.5), поэтому примем

$$\psi(\Delta \epsilon_u^{(P)}, \beta) = \psi_1(\beta) \psi_2(\Delta \epsilon_u^{(P)}) \quad (4.10)$$

Функцию  $\psi_1(\beta)$  возьмем в том же виде, что и в модели деформационно-анизотропной пластичности [3]:

$$\psi_1(\beta) = [M(\beta - \pi/36) - M(\beta - \pi/6) - M(\beta - 5\pi/6) + M(\beta - 35\pi/36)]36/(5\pi) \quad (4.11)$$

Вид функции (4.11) на краях интервала  $[0; \pi]$  обусловлен математическими требованиями (2.1) и (2.6). В основной области значений  $\beta \in [\pi/6; 5\pi/6]$  функция (4.11) подчинена условию  $\psi_1(\beta) = 1$ . Таким образом, функция  $\psi_2(\Delta \epsilon_u^{(P)})$  получает роль масштабного фактора в  $\Psi/\Phi$  (4.9)–(4.11). Считая механизмы изменения скалярных и векторных свойств материала сходными, возьмем  $\psi_2(\Delta \epsilon_u^{(P)})$  в аналогичном (4.5) виде

$$\psi_2(\Delta \epsilon_u^{(P)}) = c[1 - \exp(-\Delta \epsilon_u^{(P)}/d)] \quad (4.12)$$

Из опытов  $i3$  ( $i = 1, 3$ ) найдены константы

$$c = -2, \quad d = 0.1 \quad (4.13)$$

Результаты вычислений по соотношениям (1.4) с материальными функциями  $\Phi, \Psi$  (4.1)–(4.13) показаны линиями на фиг. 2–5. Максимальные отклонения от экспериментальных данных приблизительно равны погрешности предположения об изотропии материала в исходном состоянии [5]. Численно проверено, что аппроксимации (4.1)–(4.13) в рассматриваемых интервалах напряжений и времени удовлетворяют условиям (2.1), (2.4)–(2.7).

В аппроксимациях (4.1)–(4.13) использованы результаты опытов при  $\sigma_0 = 0$  (стандартные кривые ползучести исходного материала при разных уровнях стационарного напряжения  $\sigma$ ) и при  $\beta = 0, 3\pi/4, \pi$  с набором значений  $\sigma_0, \sigma$ . Совокупность этих опытов является базовой (позволяющей идентифицировать все материальные функции) для модели (1.4)–(1.6), (4.1), (4.4), (4.5), (4.7)–(4.12). Выбор  $\beta = 3\pi/4$  из всех  $\beta \neq 0; \pi$  (неодномерных нагружений) преследует цель выделить область нагружений, близких к обратному ( $\beta = \pi$ ), для которой характерно более резкое изменение свойств материала в зависимости от  $\beta$  (об этом свидетельствуют, в частности, уплотнение тыльной части поверхности текучести в теории пластичности, а также вид функций влияния  $\varphi(\alpha)$  в работах [3, 8] и  $\chi(\beta)$  (4.8)).

Учитывая сложность проведения неодномерных опытов, рассмотрим варианты теории, использующие в качестве базовых опыты только при  $\beta = 0; \pi$ . В этом случае целесообразно положить  $\Psi \equiv 0$  (информация о векторных свойствах отсутствует), а функцию  $\chi(\beta)$  взять линейной:

$$\chi(\beta) = 1 - q\beta/\pi \quad (4.14)$$

константа  $q$  определяется из опыта при  $\beta = \pi$ . Отличия от  $\Psi/\Phi$  (4.9)–(4.13) и  $\chi(\beta)$  (4.8) невелики, поэтому указанный упрощенный вариант дает удовлетворительные результаты в опытах [5]. Наконец, можно предложить инженерный вариант теории, когда известны результаты повторного нагружения только в направлении  $\sigma_0$  (на практике это означает проведение базовых опытов только при одноосном растяжении):

$$\mathcal{E}_{ij}^{(C)} = 1.5 f(\sigma_u) \left[ \Pi(t) - \chi(\beta) \sum_{m=1}^3 \Pi_m(t) \varphi_m(\Delta \epsilon_u^{(P)}) \right] S_{ij}/\sigma_u, \quad \chi(\beta) = 1 - q\beta/\pi, \quad q = 0.5 \quad (4.15)$$

Значение  $q = 0.5$  выбрано как среднее между случаями изотропного упрочнения ( $q = 0$ ) и исходного сопротивления ( $q = 1$ ) в обратном к  $\sigma_0$  направлении. Для стали 316 при  $650^\circ\text{C}$  [5] значение  $q = 0.5$  является правильным, и инженерный вариант теории совпадает с упрощенным.

В основе анизотропного изменения вязких и пластических свойств, вызванного предварительным пластическим деформированием, лежат одни и те же причины – ориентированно измененная микроструктура и остаточные микронапряжения. Поэтому качественные оценки поправок к выбранному априорному значению  $q = 0.5$  и к функции  $\chi(\beta)$  (4.14) можно произвести на основе имеющихся для рассматриваемого материала и температуры справочных данных об эффекте Баушингера и форме поверхности текучести после простого пластического деформирования (так, если материал показывает существенно более изотропное пластическое упрочнение, чем исследованная в [5] сталь, то можно ожидать  $q < 0.5$  и меньшее, чем в (4.8), отклонение двухзвенной функции  $\chi(\beta)$  от линейного варианта (4.14)).

В работе [9] представлены результаты экспериментов с медью при одноосных растяжениях из класса  $\Lambda$  с небольшими (до 1%) предварительными пластическими деформациями.

циями  $\varepsilon_{11(0)}^{(P)}$ ; температура 200 и 250°C. Этим данным отвечают значения  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ ,  $a = 1$ ,  $b > 0$  для функций (4.5) (увеличение сопротивления ползучести за счет  $\varepsilon_{11(0)}^{(P)}$  одинаково на всем рассмотренном интервале времени и имеет тенденцию к “насыщению” с ростом  $\Delta\varepsilon_u^{(P)}$ ).

**5. Другие типы предварительного и повторного нагружений.** Соотношения (1.1)–(1.6) можно применить и в других случаях, когда траектории предварительных пластических нагружений, входящих в рассматриваемый класс, имеют собственную ось симметрии (задающую направление  $\sigma_0/\sigma_0$ ) и по своей внутренней геометрии принадлежат к однопараметрическому семейству (с некоторым скалярным параметром  $\sigma_0$ )<sup>4</sup>. Это, в частности, циклические процессы по напряжениям или деформациям с установившимся<sup>5</sup> ответным циклом, представляющим в пространстве  $\Sigma_5$  движение по отрезку (в другом варианте, по окружности) с центром в начале координат. Обозначим класс процессов мгновенно упругого стационарного нагружения с указанной предысторией через  $\Lambda_1$  (в варианте с окружностью – через  $\Lambda_2$ ). Роли скаляра  $\sigma_0$  и направления  $\sigma_0/\sigma_0$  выполняют амплитуда полуцикла и его направление – в классе  $\Lambda_1$ , радиус окружности и нормаль к ее плоскости – в классе  $\Lambda_2$ . Из двух противоположных, равноправно допустимых направлений  $\sigma_0/\sigma_0$  в классах  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  выберем для определенности то, которое в базисе  $\Sigma_5$  имеет положительную координату с меньшим номером. В силу равноправности направлений  $\pm\sigma_0/\sigma_0$  в классах  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  зависимость функций  $\Phi$ ,  $\Psi$  от  $\beta$  обладает следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) &= \Phi(t, \sigma_0, \sigma, \pi - \beta), & \Psi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) &= -\Psi(t, \sigma_0, \sigma, \pi - \beta), \\ \forall(t, \sigma_0, \sigma, \beta) &\in U \end{aligned} \quad (5.1)$$

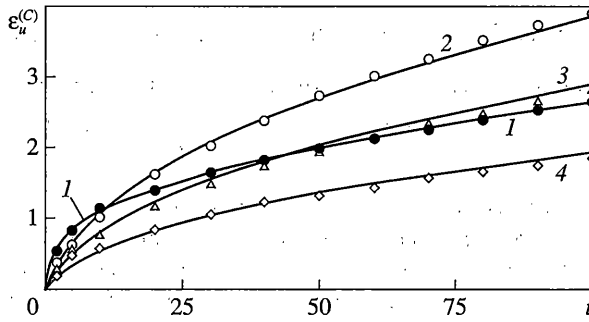
Несколько программ нагружения из классов  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  для стали 316 при 600°C реализовано в работе [10]. На фиг. 6 представлены зависимости  $\varepsilon_u^{(C)} \sim t$  при  $\sigma_u = 230$  МПа для материала в исходном изотропном состоянии (темные круги, опыт 1) и после предварительного установившегося циклического растяжения-сжатия с амплитудой полуцикла 0.4% по деформациям и 252 МПа по напряжениям: светлые круги соответствуют повторному нагружению  $\{\sigma_{11} = \sigma_u; \sigma_{12} = 0\}$  (опыт 2), треугольники –  $\{\sigma_{11} = \sqrt{3} \sigma_{12} = \sigma_u/\sqrt{2}\}$  (опыт 3), ромбы –  $\{\sigma_{11} = 0; \sqrt{3} \sigma_{12} = \sigma_u\}$  (опыт 4). Траектории деформаций в опытах 1–4 [10] практически не отклоняются от направления  $\sigma$ , поэтому в классе  $\Lambda_1$  можно принять

$$\Psi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) = 0, \quad \forall(t, \sigma_0, \sigma, \beta) \in U \quad (5.2)$$

Сравнение результатов опытов [5, 10] показывает, что центрально-симметричное предварительное нагружение по сравнению с односторонним приводит к менее выраженной скалярной и векторной анизотропии (это справедливо и в отношении пластических свойств [11] и объясняется меньшей направленностью предварительного процесса нагружения).

<sup>4</sup> Количество параметров внутренней геометрии семейства траекторий предварительного нагружения может быть и больше, но это увеличит число аргументов функций  $\Phi$ ,  $\Psi$  и объем базовых опытов.

<sup>5</sup> Это позволяет исключить из состава параметров семейства количество циклов.



Фиг. 6

Кривые  $\epsilon_u^{(C)} \sim t$  при  $\beta = 0, \pi/4, \pi/2$  можно считать подобными (фиг. 6), поэтому

$$\Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta) = \Phi(t, \sigma_0, \sigma, 0)\chi(\beta) \quad (5.3)$$

Отметим, что вид зависимости от  $\beta$  в (5.3) отличается от (4.8) – в опытах [5] из класса  $\Lambda$  подобными (при разных  $\beta$ ) являются не сами кривые ползучести, а их отклонения от кривой ползучести исходного материала.

Из опыта 4 найдено значение  $\chi(\pi/2) = 0.5$ , что при линейной интерполяции в интервале  $[0; \pi/2]$  и учете условия симметрии (5.1) приводит к функции влияния

$$\chi(\beta) = 1 - q[\beta - 2M(\beta - \pi/2)]/\pi, \quad q = 1 \quad (5.4)$$

С помощью кривых ползучести исходного материала при  $\sigma_u = 140\text{--}230$  МПа [10] найдена функция  $\Phi(t, 0, \sigma, 0) = \sqrt{1.5} \Pi(t)f(\sigma_u)$ ,  $\Pi$  и  $f$  имеют вид (4.1), (4.3) с константами

$$\mu_1 = 0.006; \quad \mu_2 = 0.0085, \quad \mu_3 = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ ч}^{-1}, \quad \xi_1 = 1.5 \text{ ч}, \quad \xi_2 = 18 \text{ ч} \quad (5.5)$$

$$B = 0.94, \quad C = 230 \text{ МПа}, \quad D = 35 \text{ МПа} \quad (5.6)$$

Влияние интенсивности предварительного нагружения будем учитывать с помощью функций  $\varphi_m(\Delta\sigma_u)$ :

$$\Phi(t, \sigma_0, \sigma, 0) = \sqrt{1.5}f(\sigma_u) \left[ \Pi(t) - \sum_{m=1}^3 \Pi_m(t)\varphi_m(\Delta\sigma_u) \right], \quad \Delta\sigma_u \equiv \sigma_{u(0)} - \sigma_u \quad (5.7)$$

В [10] есть данные для  $\sigma_{u(0)} = 252$  МПа,  $\sigma_u = 230$  МПа. Им соответствуют значения

$$\varphi_1 = 0.7, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = -0.8 \quad (5.8)$$

В опытах с  $\sigma_u = 252, 270$  [МПа] [10] отмечены существенные вторичные пластические деформации при выходе на стационарный режим, поэтому они не входят в класс  $\Lambda_1$ .

Результаты вычислений согласно (1.4), (1.6), (4.1), (4.3), (5.2)–(5.8) показаны линиями на фиг. 6. Относительные отклонения от экспериментальных данных находятся в тех же пределах, что и погрешности предположения об изотропности исходного материала [10].

В работе [12] приведены результаты опытов при одноосных нагружениях из класса  $\Lambda_1$  с  $\sigma_{u(0)} = \sigma_u = 185$  МПа (марка стали и температура те же, что и в [10]). Согласно данным [12], для указанных  $\sigma_{u(0)}, \sigma_u$  значения  $\varphi_m$  для функции  $\Phi$  (5.7) составляют  $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ ,

$\varphi_3 = 0$  (предварительное нагружение “подавило” неустановившуюся ползучесть и не повлияло на микромеханизм вязкого течения, описываемого слагаемым  $\Pi_3(t) = \mu_3 t$ ).

В работе [10] содержатся отдельные данные для следующих нагружений из класса  $\Lambda_2$ : предварительное деформирование с установившимся ответным циклом в виде центральной окружности радиуса  $\sigma_{u(0)} = 252, 270$  [МПа] в плоскости  $(\sigma_{11}; \sqrt{3} \sigma_{12})$ , затем стационарное растяжение  $\sigma_{11} = \sigma_{u(0)}$ . Этому повторному нагружению, как и всем комбинациям  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$ , соответствует угол  $\beta = \pi/2$ . Предварительное круговое нагружение вызывает многократное уменьшение ползучести в рассмотренном направлении  $\beta = \pi/2$  [10]. Данных для других направлений  $\beta$  нет. В отсутствие такой информации предположение об изотропном (одинаковом для всех  $\beta$ ) упрочнении материала в классе  $\Lambda_2$  можно рассматривать лишь как первое приближение. Что касается векторной анизотропии, то слабая направленность предварительного нагружения в классе  $\Lambda_2$  дает основание принять  $\Psi \equiv 0$ .

Модель (1.1)–(1.6) можно применять и в том случае, когда предварительное пластическое деформирование осуществляется при другой температуре, чем последующее стационарное. Важно, чтобы все базовые опыты проводились в том же температурном режиме, что и рассчитываемые процессы. В [13, 14] приведены экспериментальные результаты для меди при нагружениях по траекториям из класса  $\Lambda$ , но с разной температурой предварительного и повторного нагружений – комнатной и 300°C соответственно. По этим данным, упрочняющее влияние  $\varepsilon_{u(0)}^{(P)}$  имеет тенденцию к “насыщению” при достижении уровня  $\varepsilon_{u(0)}^{(P)} = 0.05\text{--}0.1$ , функция  $\chi(\beta)$  в соотношении (4.7) близка к линейной (4.14) с  $q \approx 1$ .

До и после предварительного нагружения из класса  $\Lambda$  (или  $\Lambda_1, \Lambda_2$ ) можно допустить дополнительные упругопластические нагружения при следующих условиях: все они имеют значительно меньшую интенсивность, чем нагружение, определяющее вектор  $\sigma_0$ ; вызванные ими поврежденности и деформации ползучести пренебрежимо малы.

Теория, основанная на соотношениях (1.1)–(1.6), является прикладной в том смысле, что вычисления по ней значительно проще, чем на основе дифференциальных или интегральных уравнений ползучести. Но, как всякая теория старения (временного упрочнения), она ограничена в своем обоснованном применении задачами с медленно меняющимися (при  $t > 0$ ) напряжениями во всем теле [15]. Если проверка решения выявляет существенные нарушения этого условия, то расчеты на основе (1.1)–(1.6) могут служить лишь грубой оценкой. В этом случае в качестве следующего приближения можно предложить использовать подходящую (для полученного при  $t > 0$  нестационарного нагружения) модель ползучести исходного материала (например, из работы [16]), умножая приращение деформации ползучести на каждом временном шаге  $[\tau; \tau + \Delta\tau]$  на величину “коррекции вязкости”  $\dot{\Phi}(\tilde{t}(\tau), \sigma_0, \sigma(\tau), \beta(\tau)) / \dot{\Phi}(\tilde{t}(\tau), 0, \sigma(\tau), 0)$ , где  $\dot{\Phi}$  – частная производная по  $t$  функции  $\Phi(t, \sigma_0, \sigma, \beta)$ , найденной описанным в п. 4, 5 способом,  $\Psi$  считается равной нулю, приведенное время  $\tilde{t}$  получается из  $t$  путем исключения интервалов “отдыха”. При стационарных повторных напряжениях такой подход равнозначен использованию модели (1.1)–(1.6), (5.2). Другие методы описания ползучести после пластического деформирования предложены в работах [17, 18].

Автор выражает благодарность профессору Быкову Д.Л. за ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 03-01-00667, 07-01-00434).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. Пелешко В.А. Деформационная теория пластичности деформационно-анизотропных тел // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 68–78.
4. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
5. Ohashi Y., Kawai M., Momose T. Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature // J. Engng. Mater. Technol. 1986. V. 108. № 1. P. 68–74.
6. Ворovich И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 4. С. 740–743.
7. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 119–139.
8. Пелешко В.А. Использование поверхности поврежденности для описания ползучести и длительной прочности при сложном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 124–138.
9. Каптелин Ю.П. Описание неустановившейся ползучести наклепанной меди // Ползучесть и длительная прочность. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963. С. 192–197.
10. Murakami S., Kawai M., Yamada Y. Creep after cyclic plasticity under multiaxial conditions for type 316 stainless steel at elevated temperature // J. Engng. Mater. Technol. 1990. V. 112. № 3. P. 346–352.
11. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. Сер. МДТТ. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–75.
12. Goodman A.M. Materials data for high-temperature design // Creep of engineering materials and structures (ed. Bernasconi G., Piatti G.). London: Applied Sci. Publ., 1978. P. 289–339.
13. Waniewski M. A simple law of steady-state creep for material with anisotropy introduced by plastic prestraining // Ing.-Arch. 1985. V. 55. № 5. P. 368–375.
14. Kowalewski Z.L. Effect of plastic prestrain magnitude on uniaxial tension creep of copper at elevated temperatures // Mech. Theor. Stos. 1995. V. 33. № 3. P. 507–517.
15. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
16. Пелешко В.А. К построению определяющих соотношений вязкоупругости и ползучести при нестационарных и сложных нагружениях // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 3. С. 144–165.
17. Kawai M. A description of creep anisotropy induced by plastic prestrain // Trans. JSME. 1990. Ser. A. V. 56. № 524. P. 866–874.
18. Радченко В.П., Небогина Е.В. Численное исследование влияния пластической деформации на деформацию ползучести на основании структурной модели // Матем. моделирование и краевые задачи (Тр. 7-ой межвуз. конф.). Самара. 1997. Ч. 1. С. 116–120.

Москва

Поступила в редакцию  
29.12.2004