МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2007

УДК 531.381

© 2007 г. Б.С. БАРДИН

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКООБРАЗНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести. Геометрия масс тела и начальные условия его движения соответствуют случаю интегрируемости Горячева–Чаплыгина. Исследуется задача об орбитальной устойчивости периодических движений, отвечающих колебаниям и вращениям твердого тела вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции.

В [1] была доказана орбитальная неустойчивость данных периодических движений в линейном приближении и установлено, что для решения задачи об устойчивости в нелинейной постановке недостаточно анализа членов до четвертой степени в разложении функции Гамильтона в ряд по каноническим переменным.

В настоящей работе показано, что в данной задаче имеет место особенный случай, когда стандартная методика анализа устойчивости по коэффициентам нормальной формы гамильтониана уравнений возмущенного движения неприменима. На основании теоремы Четаева в строгой нелинейной постановке задачи доказана орбитальная неустойчивость указанных периодических движений. В доказательстве существенным образом используется дополнительный первый интеграл задачи Горячева–Чаплыгина.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Пусть mg – вес тела, l – расстояние от центра тяжести до неподвижной точки O. Введем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось Z которой направлена вертикально вверх. С твердым телом жестко свяжем подвижную систему координат $Oxyz$, оси x, y и z которой направим вдоль главных осей инерции тела для точки O. Соответствующие моменты инерции обозначим через A, B и C, а координаты центра тяжести в подвижной системе координат через – x_*, y_*, z_*. Положение тела в неподвижной системе координат зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Предположим, что имеет место случай Горячева–Чаплыгина [2, 3], т.е. $A = C = 4B$, $y_* = 0$, а проекция кинетического момента твердого тела на вертикаль равна нулю. В этом случае уравнения движения твердого тела интегрируются в квадратурах [2–7].

Далее без ограничения общности полагаем $x_* = l$, $z_* = 0$. Движение твердого тела будем описывать каноническими уравнениями с функцией Гамильтона [1]:

$$\begin{aligned} H &= [1 + (1+3\sin^2 q_1)\operatorname{tg}^2 q_2]p_1^2/2 + 3p_1p_2\sin q_1\cos q_1\operatorname{tg} q_2 + \\ &+ (1+3\cos^2 q_1)p_2^2/2 - \cos q_1\cos q_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Независимой переменной является безразмерное время $\tau = \mu t$ (где $\mu^2 = mgl/(4B)$), а канонические переменные q_1, q_2, p_1, p_2 введены по формулам

$$q_1 = \varphi - \frac{3\pi}{2}, \quad q_2 = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad p_1 = \frac{p_\varphi}{4B\mu}, \quad p_2 = \frac{p_\theta}{4B\mu} \tag{1.2}$$

где p_φ, p_θ – обобщенные импульсы, соответствующие обобщенным координатам φ, θ. Угол ψ является циклической координатой, а соответствующий обобщенный импульс p_ψ в случае Горячева–Чаплыгина равен нулю.

Помимо интеграла $H = \mathrm{const}$ уравнения движения с гамильтонианом (1.1) допускают еще один первый интеграл, который в переменных q_1, q_2, p_1, p_2 имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}&(p_1\sin q_1\operatorname{tg}q_2 + p_2\cos q_1)[p_1^2 + (p_1\cos q_1\operatorname{tg}q_2 - p_2\sin q_1)^2] + \\ &+ (p_1\cos q_1\operatorname{tg}q_2 - p_2\sin q_1)\sin q_1\cos q_2 = \mathrm{const}\end{aligned} \tag{1.3}$$

В случае Горячева–Чаплыгина существуют плоские движения твердого тела, для которых экваториальная ось эллипсоида инерции неподвижна и занимает горизонтальное положение. На этих движениях $q_2 = p_2 = 0$, а изменение переменных q_1, p_1 описывается системой канонических уравнений с гамильтонианом $H^{(0)} = 1/2\,p_1^2 - \cos q_1$. В зависимости от значения константы h интеграла энергии $H^{(0)} = h$ плоские движения являются либо асимптотическими ($h = 1$) к неустойчивому положению равновесия твердого тела, либо представляют собой периодические движения: колебания ($|h| < 1$) в окрестности устойчивого положения равновесия или вращения ($h > 1$) относительно оси Oz.

В [1] была рассмотрена задача об орбитальной устойчивости плоских периодических движений данного типа. Было показано, что при любых значениях параметров в линеаризованной системе уравнений возмущенного движения имеет место резонанс, а периодические движения неустойчивы в линейном приближении. Кроме того, в [1] было установлено, что для решения задачи об устойчивости в нелинейной постановке недостаточно анализа членов до четвертой степени в разложении функции Гамильтона (1.1) в ряд по каноническим переменным и сделано замечание о том, что нелинейную задачу об устойчивости предпочтительнее решать вторым методом Ляпунова с использованием дополнительного первого интеграла (1.3).

Целью настоящей работы является решение задачи об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений в строгой нелинейной постановке.

2. Переменные действие – угол. Для описания возмущенного движения введем переменные действие – угол I, w. В случае колебаний каноническая унивалентная замена переменных $q_1, p_1 \to I, w$ имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}&q_1 = 2\arcsin[k_1\operatorname{sn}(u, k_1)], \quad p_1 = 2k_1\operatorname{cn}(u, k_1), \quad u = 2\pi^{-1}K(k_1)w \\ &w = \omega_1\tau + w(0), \quad \omega_1 = \pi/(2K(k_1))\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $k_1 = k_1(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = 8\pi^{-1}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)] \tag{2.2}$$

В случае вращений переменные действие – угол I, w вводятся по формулам [1]:

$$\begin{aligned}&q_1 = 2\operatorname{am}(u, k_2), \quad p_1 = 2k_2^{-1}\operatorname{dn}(u, k_2), \quad u = \pi^{-1}K(k_2)w \\ &w = \omega_2\tau + w(0), \quad \omega_2 = \pi/(k_2K(k_2))\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $k_2 = k_2(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = 4E(k_2)/(\pi k_2) \tag{2.4}$$

В (2.1)–(2.4) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов [8].

В невозмущенном движении $I = I_0 = \mathrm{const}$. В этом случае $k_1(I_0) = \sin(\beta/2)$ (где β –амплитуда плоских колебаний; $0 < \beta < \pi$), $k_2(I_0) = 2(1 + h)^{-1}$, а формулы (2.1) и (2.3) определяют явную зависимость переменных q_1, p_1 от τ на невозмущенном движении.

3. Гамильтониан возмущенного движения. Изоэнергетическая редукция. Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$. Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным q_2, p_2, r_1.

Выполнив в (1.1) замену переменных $q_1, p_1 \to r, w$ и отбросив несущественную аддитивную постоянную, получим гамильтониан возмущенного движения $\Gamma(w, r_1, q_2, p_2)$, разложение которого в ряд по q_2, p_2, r_1 имеет вид

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \ldots + \Gamma_{2m} + \ldots \tag{3.1}$$

где Γ_{2m} – форма степени $2m$ относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с T-периодическими коэффициентами относительно w, причем $T = \pi$ в случае колебаний и $T = 2\pi$ в случае вращений. Квадратичная часть Γ_2 гамильтониана возмущенного движения имеет вид [1]:

$$\Gamma_2 = \omega r_1 + \gamma_2(q_2, p_2, w) \tag{3.2}$$

$$\gamma_2 = f_{20}q_2^2 + f_{11}q_2p_2 + f_{02}p_2^2$$
$$f_{20} = [\cos q_1 + (1 + 3\sin^2 q_1)p_1^2]/2, \quad f_{11} = 3p_1 \sin q_1 \cos q_1, \quad f_{20} = (1 + 3\cos^2 q_1)/2 \tag{3.3}$$

где $\omega = \omega_1$ в случае колебаний и $\omega = \omega_2$ в случае вращений. Величины q_1 и p_1 отвечают невозмущенному движению и определяются по формулам (2.1) и (2.3) в случаях колебаний и вращений соответственно.

Гамильтониан (3.1) зависит от величины I_0, которая является параметром невозмущенного движения. Далее вместо I_0 будем использовать параметр $k_1(I_0)$ (или $k_2(I_0)$), каждому значению которого отвечает колебание твердого тела с определенной амплитудой (или вращение с определенной средней угловой скоростью).

Интеграл (1.3) для уравнений возмущенного движения также можно представить в виде ряда по степеням q_2, p_2, r_1:

$$g_1 + g_3 + \ldots = \text{const} \tag{3.4}$$

где g_1 и g_3 – формы соответственно первой и третьей степеней относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с коэффициентами, T-периодически зависящими от w.

Далее будем рассматривать возмущенное движение на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$, отвечающем невозмущенному движению. Заметим, что в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.1) координата w является возрастающей функцией переменной τ, поэтому в задаче об устойчивости движения она может играть роль времени. Для описания движения на нулевом изоэнергетическом уровне примем координату w за новую независимую переменную. Кроме того, из уравнения $\Gamma = 0$ при малых q_2, p_2, r_1 имеем $r_1 = -\Phi(q_2, p_2, w)$. Функция $\Phi(q_2, p_2, w)$ представляет собой ряд

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_4 + \ldots + \Phi_{2m} + \ldots, \quad \Phi_2 = \gamma_2(q_2, p_2, w)/\omega \tag{3.5}$$

где Φ_4 – форма четвертой степени относительно q_2, p_2, с T-периодическими коэффициентами относительно w.

Уравнения движения на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$ можно записать в гамильтоновой форме

$$dq_2/dw = \partial\Phi/\partial p_2, \quad dp_2/dw = -\partial\Phi/\partial q_2 \tag{3.6}$$

Начало координат $q_2 = p_2 = 0$ фазового пространства редуцированной системы (3.6) является положением равновесия, соответствующим невозмущенному периодическому движению исходной системы с гамильтонианом (1.1).

Система уравнений (3.6) имеет первый интеграл

$$G_1 + O_3 = \text{const} \tag{3.7}$$

который получается из интеграла (3.4), если в нем выполнена замена $r_1 = -\Phi(q_2, p_2, w)$. Интеграл (3.7) T-периодически зависит от w, а его линейная относительно q_2, p_2 часть имеет вид

$$G_1 = p_1 \sin q_1 (p_1^2 + \cos q_1) q_2 + (p_1^2 \cos q_1 - \sin^2 q_1) p_2 \tag{3.8}$$

где величины q_1 и p_1 в (3.8) соответствуют невозмущенному движению.

В (3.7) и далее через O_k обозначается совокупность членов не ниже k-й степени относительно канонических переменных.

Ниже интеграл (3.7) используется для доказательства неустойчивости положения равновесия $q_2 = p_2 = 0$, откуда, очевидно, будет следовать также неустойчивость соответствующего невозмущенного движения.

4. Линейная система. Рассмотрим систему линейных уравнений с гамильтонианом Φ_2:

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{1}{\omega}(f_{11} q_2 + 2 f_{02} p_2), \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{1}{\omega}(2 f_{20} q_2 + 2 f_{11} p_2) \tag{4.1}$$

Величины f_{11}, f_{20}, f_{02} в (4.1) определяются равенствами (3.3).

Пусть $X(w)$ – матрица фундаментальных решений системы (4.1), такая что $X(0) = E$, где E – единичная матрица второго порядка. Непосредственной проверкой можно убедиться, что линейная часть (3.8) интеграла (3.7) является первым интегралом системы (4.1). Используя этот интеграл, элементы $x_{ij}(w)$ матрицы $X(w)$ можно получить в аналитической форме

$$\begin{gathered}
x_{11}(w) = C(p_1^2 \cos q_1 - \sin^2 q_1), \quad x_{21}(w) = -C p_1 \sin q_1 (p_1^2 + \cos q_1) \\
x_{12}(w) = x_{11}(w) J(w), \quad x_{12}(w) = \frac{1}{x_{11}(w)} + x_{21}(w) J(w) \\
J(w) = \int_0^w \frac{1 + 3\cos^2 q_1}{x_{11}(v)^2} dv
\end{gathered} \tag{4.2}$$

где C – постоянная величина; в случае колебаний $C = (2k_1)^{-2}$, а в случае вращений $C = k_2^2/4$. Величины q_1 и p_1 в (4.2) вычисляются на невозмущенном движении.

При $w = T$ матрица $X(w)$ будет иметь вид

$$X(T) = \begin{Vmatrix} 1 & x_{12}(T) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

При этом в случае колебаний

$$x_{12}(T) = x_{12}(\pi) = 2\frac{(4k_1^2 - 2)E(k_1) - (3k_1^2 - 2)k_1'^2 K(k_1)}{k_1'^4} \tag{4.4}$$

а в случае вращений

$$x_{12}(T) = x_{12}(2\pi) = 2\frac{k_2(k_2'^2 K(k_2) - 2(2 - k_2^2)E(k_2))}{k_2'^4} \tag{4.5}$$

$$k_i'^2 = 1 - k_i^2 \ (i = 1, 2)$$

Оба собственных значения матрицы (4.3) вещественны и равны единице при любой амплитуде колебаний и любой угловой скорости вращений в невозмущенном движении, т.е. в системе (4.1) имеет место тождественный резонанс [1]. Если величина $x_{12}(T)$ отлична от нуля, то матрица (4.3) имеет непростой элементарный делитель. В этом случае положение равновесия $q_2 = p_2 = 0$ системы (4.1) (а значит и соответствующее невозмущенное движение) неустойчиво в первом приближении [9]. Используя формулы (4.4) и (4.5), можно показать, что неравенство $x_{12}(T) \neq 0$ всегда выполнено. Действительно, из (4.4) и (4.5) при малых значениях k_1 и k_2 в случае колебаний и в случае вращений соответственно получаем следующие разложения

$$x_{12}(\pi) = 9\pi k_1^4/8 + O(k_1^6), \quad x_{12}(2\pi) = 3\pi k_2 + O(k_2^3) \tag{4.6}$$

Следовательно, при достаточно малых значениях k_1 (или k_2) величина $x_{12}(T)$ положительна и стремится к нулю при $k_1 \to 0$ в случае колебаний (или при $k_2 \to 0$ в случае вращений).

Теперь вычислим производную величины $x_{12}(T)$ по k_1 в случае колебаний

$$\frac{dx_{12}(\pi)}{dk_1} = \frac{2k_1((1+3k_1^2)(E(k_1) - k_1'^2 K(k_1)) + 4k_1^2 E(k_1))}{k_1'^6} \tag{4.7}$$

и по k_2 в случае вращений

$$\frac{dx_{12}(2\pi)}{dk_2} = \frac{(3+k_2^2)E(k_2) + 4(E(k_2) - k_2'^2 K(k_2))}{k_2'^6} \tag{4.8}$$

Для полных эллиптических интегралов первого и второго рода справедливо неравенство $E(k) - (1-k^2)K(k) > 0$. Поэтому производные (4.7) и (4.8) положительны и, следовательно, $x_{12}(T)$ является положительной монотонно возрастающей функцией величины k_1 в случае колебаний (или величины k_2 в случае вращений). Таким образом, $x_{12}(T) \neq 0$.

В работе [1] этот результат был установлен на основании численного интегрирования системы (4.1).

5. Об орбитальной неустойчивости плоских колебаний и вращений в строгой нелинейной постановке задачи. Сделаем ряд канонических преобразований, приводящих гамильтониан (3.5) к виду удобному для анализа устойчивости равновесия $q_2 = p_2 = 0$. Выполним сначала линейную каноническую, унивалентную, T-периодическую по w замену переменных (см. [10]), нормализующую квадратичную часть гамильтониана (3.5):

$$\begin{aligned} q_2 &= n_{11}\xi + n_{12}\eta, \quad p_2 = n_{21}\xi + n_{22}\eta \\ n_{i1} &= \kappa x_{i1}(w), \quad n_{i2} = x_{i2}(w)/\kappa - \kappa w x_{i1}(w) \ (i = 1, 2) \\ \kappa &= \sqrt{(|x_{12}(T)|/T)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Функции $x_{ij}(w)$ задаются формулами (4.2), а величина $x_{12}(T)$ вычисляется по формулам (4.4) и (4.5) в случаях колебаний и вращений соответственно.

В новых переменных ξ, η функция Гамильтона (3.5) запишется в виде

$$F = \eta^2/2 + O_4 \tag{5.2}$$

Согласно общей методике решения нелинейной задачи об устойчивости гамильтоновой системы следует выполнить нелинейную нормализацию, т.е. построить нелинейное каноническое преобразование $\xi, \eta \to x, y$, приводящее функцию Гамильтона (5.2) к следующей нормальной форме [10, 11]:

$$N = y^2/2 + a_{2n}x^{2n} + O_{2k+1} \tag{5.3}$$

где a_{2n} – постоянная величина, причем нормализация проводится до такого порядка $2n$, при котором $a_{2n} \neq 0$.

Вопрос об устойчивости решается на основании следующего критерия [10, 12]: при $a_{2n} > 0$ равновесие $x = y = 0$ устойчиво по Ляпунову, а при $a_{2n} < 0$ – неустойчиво. Однако, как будет показано ниже, в рассматриваемой задаче мы имеем дело с особенным случаем, когда $a_{2n} = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ (см. п. 6). Поэтому указанная методика исследования устойчивости здесь неприменима.

Для анализа устойчивости равновесия $\xi = \eta = 0$ воспользуемся первым интегралом (3.7), который в переменных ξ, η с точностью до несущественного постоянного множителя ($4k_1^2/\kappa$ в случае колебаний или $4/(\kappa k_2^2)$ в случае вращений) имеет вид

$$\eta + \tilde{G}^{(3)}(\xi, \eta, w) = \text{const} \tag{5.4}$$

где $\tilde{G}^{(3)}$ – ряд по степеням ξ и η, сходящийся в малой окрестности $\xi = \eta = 0$. Ряд $\tilde{G}^{(3)}$ не содержит членов ниже третьей степени по ξ и η, а его коэффициенты являются T-периодическими функциями w.

Покажем, что каноническим, близким к тождественному, T-периодическим по w преобразованием переменных $\xi, \eta \to P, Q$ интеграл (5.4) можно привести к виду

$$P = \text{const} \tag{5.5}$$

Пусть $S(\xi, P, w)$ – производящая функция данного преобразования, тогда старые и новые переменные связаны соотношениями

$$Q = \partial S/\partial P, \quad \eta = \partial S/\partial \xi \tag{5.6}$$

С другой стороны, чтобы в новых переменных интеграл (5.4) имел вид (5.5) должно выполняться равенство

$$\eta + \tilde{G}^{(3)}(\xi, \eta, w) = P \tag{5.7}$$

При достаточно малых ξ и P равенство (5.7) можно разрешить относительно η:

$$\eta = P + \Psi(\xi, P, w) \tag{5.8}$$

где $\Psi(\xi, P, w)$ – T-периодическая по w, аналитическая при достаточно малых значениях ξ и P функция, разложение которой в ряд по степеням ξ и P начинается с членов не ниже третьей степени.

Из (5.6) и (5.8) следует, что производящая функция $S(\xi, P, w)$ преобразования $\xi, \eta \to P, Q$ должна удовлетворять уравнению

$$\partial S/\partial \xi = P + \Psi(\xi, P, w) \tag{5.9}$$

Решая уравнение (5.9), получаем следующее выражение для S:

$$S = \xi P + \int_0^{\xi} \Psi(y, P, w)dy + f(P, w) \tag{5.10}$$

где функция $f(P, w)$ может быть выбрана произвольным образом. Далее положим $f(P, w) \equiv 0$.

Построенная таким образом производящая функция $S(\xi, P, w)$ является аналитической в малой окрестности $\xi = P = 0$ и T-периодической по w. Система канонических уравнений для Q и P имеет первый интеграл (5.5), это означает, что Q является циклической координатой, т.е. новый гамильтониан явно не зависит от Q и, следовательно, представим в виде

$$\Gamma_* = P^2/2 + \Gamma_*^{(4)}(P, w) \tag{5.11}$$

где $\Gamma_*^{(4)}(P, w)$–T-периодическая по w, аналитическая при достаточно малых P функция, разложение которой в ряд по степеням P начинается с членов не ниже четвертой степени.

Положение равновесия $Q = P = 0$ системы с гамильтонианом (5.11) неустойчиво. Это можно доказать на основании теоремы Четаева [9]. Возьмем функцию Четаева в виде

$$V = PQ \tag{5.12}$$

В области $Q > 0$, $P > 0$ функция $V > 0$, а ее производная

$$dV/dw = P^2 + P\partial\Gamma_*^{(4)}/\partial P \tag{5.13}$$

вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, при достаточно малых P положительна в указанной области. Следовательно, согласно теореме Четаева положение равновесия $Q = P = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Таким образом, доказана неустойчивость равновесия редуцированной системы с гамильтонианом (3.5), а это означает и неустойчивость соответствующего периодического движения.

6. Замечание о нормальной форме функции Гамильтона. Докажем теперь, что в рассматриваемой задаче действительно имеет место особенный случай, когда в нормальной форме (5.3) $a_{2n} = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Доказательство проведем от противного. Пусть при некотором $n \in \mathbb{N}$ коэффициент $a_{2n} \neq 0$. Поскольку положение равновесия $x = y = 0$ канонической системы с гамильтонианом (5.3) неустойчиво, то в силу упомянутого выше критерия устойчивости $a_{2n} < 0$. В [11, 13] показано, что в этом случае система с гамильтонианом (5.3) имеет два однопараметрических семейства асимптотических решений, стремящихся к положению равновесия $x = y = 0$ при $w \to +\infty$. С другой стороны, вещественной канонической, близкой к тождественной, T-периодической по w заменой переменных $Q, P \to x, y$ гамильтониан (5.11) можно привести к нормальной форме (5.3). Поэтому система уравнений с гамильтонианом (5.11) также должна иметь семейства асимптотических решений указанного типа. Эти решения могут существовать только на инвариантном многообразии $P = 0$. Однако, на данном многообразии лежат лишь положения равновесия $Q = \text{const}$, $P = 0$, поэтому асимптотических решений в системе с гамильтонианом (5.11) не существует. Из полученного противоречия следует, что $a_{2n} = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.П. Маркееву, который привлек его внимание к данной проблеме и сделал ряд ценных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00386) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ № НШ-1477.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* О тождественном резонансе в одном частном случае задачи об устойчивости периодических движений твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 32–37.

2. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. 1900. Т. 21. Вып. 3. С. 431–438.
3. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10. Вып. 2. С. 32–34.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
5. *Дошкевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 167 с.
6. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 255 с.
7. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
8. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
10. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963–970.
11. *Мерман Г.А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей // Бюл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР. 1964. Т. 9. № 6 (109). С. 394–424.
12. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 833–847.
13. *Бардин Б.С.* Об асимптотических решениях гамильтоновых систем при резонансе первого порядка // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 587–593.

Москва

Поступила в редакцию
1.11.2005