МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2007

УДК 539.374

© 2007 г. М.Я. БРОВМАН

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В работах [1–3] приведены уравнения, описывающие деформацию идеальной жесткопластической среды в криволинейных координатах. В [4] показано, что при плоской деформации существуют простые решения данных уравнений, причем напряжения зависят только от метрической функции координат.

В данной работе рассмотрены уравнения, описывающие объемную деформацию с осевой симметрией. Такие виды деформации часто используют в процессах обработки металлов: прессовании, ковке, волочении.

При деформации с осевой симметрией можно ввести декартовы координаты x, y и криволинейные ортогональные координаты α, β в меридиональной плоскости, а третью координату γ определить как угол поворота данной плоскости, проходящей через ось y, относительно плоскости x, y (фиг. 1). Обозначим декартовы координаты x_0, y_0, z_0 как функции величин x, y, γ, и произвольная точка A будет иметь координаты равные длинам отрезков OB, OC и OD (фиг. 1):

$$x_0 = x(\alpha, \beta)\cos\gamma, \quad y = y_0, \quad z_0 = x(\alpha, \beta)\sin\gamma \tag{1}$$

Тогда криволинейные координаты α, β, γ определяют положение точки A, а коэффициенты Ламе равны

$$H_{10} = \sqrt{x_{0,\alpha}^2 + y_{0,\alpha}^2 + z_{0,\alpha}^2} = \sqrt{x_{,\alpha}^2 + y_{,\alpha}^2} = H_1$$

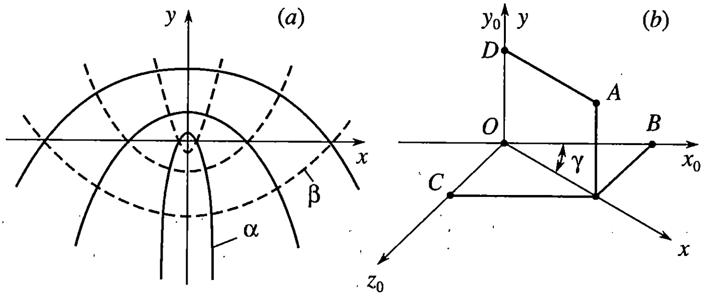
$$H_{20} = \sqrt{x_{0,\beta}^2 + y_{0,\beta}^2 + z_{0,\beta}^2} = \sqrt{x_{,\beta}^2 + y_{,\beta}^2} = H_2$$

$$H_{30} = \sqrt{x_{0,\gamma}^2 + y_{0,\gamma}^2 + z_{0,\gamma}^2} = x(\alpha, \beta)$$

где H_1 и H_2 – коэффициенты Ламе для двумерной системы координат α, β, причем величина H_{30} (третий из коэффициентов Ламе) равна координате x.

Такие координаты можно использовать для осесимметричных задач, если $\alpha(x) = \alpha(-x)$, $\beta(x) = \beta(-x)$, причем условия ортогональности [5] выполнены. Коэффициенты Ламе должны удовлетворять шести уравнениям связности [5, 6], а для задач с осевой симметрией остаются четыре уравнения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}H_{2,\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}H_{1,\beta}\right) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}H_{3,\alpha}\right) + \frac{1}{H_2^2}H_{1,\beta}H_{3,\beta} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}H_{3,\beta}\right) + \frac{1}{H_1^2}H_{2,\alpha}H_{3,\alpha} = 0 \\
H_{3,\alpha\beta} = \frac{1}{H_1}H_{1,\beta}H_{3,\alpha} + \frac{1}{H_2}H_{2,\alpha}H_{3,\beta}
\end{gathered} \tag{2}$$



Фиг. 1

Для плоской деформации при $H_3 = 1$ из этой системы остается только первое уравнение, которое удовлетворено при введении метрической функции $\Phi(\alpha, \beta)$ [4], определенной формулами

$$\frac{1}{H_1}H_{2,\alpha} = \Phi_{,\beta}; \quad \frac{1}{H_2}H_{1,\beta} = -\Phi_{,\alpha} \tag{3}$$

При осевой симметрии все условия связности (четыре уравнения (2)) выполнены, если принять дополнительно к (3):

$$\frac{1}{H_1}H_{3,\alpha} = \cos\Phi, \quad \frac{1}{H_2}H_{3,\beta} = -\sin\Phi \tag{4}$$

Используя условия ортогональности, легко показать, что

$$\left(\frac{1}{H_1}H_{3,\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_2}H_{3,\beta}\right)^2 = 1$$

Уравнения (3) и (4) можно записать, используя символы Кристоффеля [6]: $\Phi_{,\alpha} = -\Gamma^1_{22}$, $\Phi_{,\beta} = \Gamma^1_{21}$, $\cos\Phi = \Gamma^3_{11}$, $\sin\Phi = -\Gamma^3_{22}$. При плоской деформации к функции Φ можно добавить произвольную постоянную c_0, но для осесимметричной деформации это будет допустимым не всегда.

Легко показать, что для декартовых, полярных, параболических или гиперболических координат $c_0 = 0$. Однако, для логарифмических спиралей [4] $\Phi = c_0 + 0.5\ln(\alpha/\beta)$, $c_0 = -\pi/4$.

Для циклоид $\Phi = 0.25(\beta - \alpha) + 0.25\pi$; а для биполярных координат

$$\Phi = c_0 + 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{(1+\mathrm{ch}\beta)}{\mathrm{sh}\beta}\mathrm{tg}(0.5\alpha)\right], \quad c_0 = \frac{\pi}{2}$$

Поскольку в формулах (4) приведены периодические функции $\sin\Phi$ и $\cos\Phi$, то допустимо изменение Φ на величины, кратные 2π.

При осесимметричной деформации уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha,\alpha} + \frac{H_1}{H_2}\tau_{\alpha\beta,\beta} + \tau_{\alpha\beta}\left(\frac{2H_{1,\beta}}{H_2} + \frac{H_1H_{3,\beta}}{H_2H_3}\right) + (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\frac{\partial \ln H_2}{\partial\alpha} - (\sigma_\alpha - \sigma_\gamma)\frac{\partial \ln H_3}{\partial\alpha} = \rho\Phi_1 \\
&\sigma_{\beta,\beta} + \frac{H_2}{H_1}\tau_{\alpha\beta,\alpha} + \tau_{\alpha\beta}\left(\frac{2H_{2,\alpha}}{H_1} + \frac{H_2H_{3,\alpha}}{H_1H_3}\right) + (\sigma_\beta - \sigma_\alpha)\frac{\partial \ln H_1}{\partial\beta} + (\sigma_\beta - \sigma_\gamma)\frac{\partial \ln H_3}{\partial\beta} = \rho\Phi_2
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\Phi_1 = H_1 \upsilon_{\alpha,\tau} + \upsilon_\alpha \upsilon_{\alpha,\alpha} + \upsilon_\beta \frac{H_1}{H_2} \upsilon_{\alpha,\beta} - \frac{\upsilon_\beta^2}{H_2} H_{2,\alpha} + \frac{\upsilon_\alpha \upsilon_\beta}{H_2} H_{1,\beta}$$

где σ_α, σ_β, σ_γ, $\tau_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала, υ_α, υ_β – компоненты вектора скорости течения, τ – время; Φ_2 получаем из Φ_1 заменами α на β, υ_α на υ_β, H_1 на H_2 и наоборот.

Для статических задач $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Если удается найти систему напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, условию текучести и краевым условиям, то они в ряде случаев определяют нижнюю границу усилий, что полезно для многих задач, имеющих значение для технологии обработки металлов давлением.

Условие текучести будет выполнено, если записать напряжение в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= f_0 - k\cos\omega\cos 2f, \quad \sigma_\beta = f_0 + k\cos\omega\cos 2f \\ \sigma_\gamma &= f_0 + k\sqrt{3}\sin\omega\cos 2f, \quad \tau_{\alpha\beta} = k\sin 2f \end{aligned} \tag{6}$$

где f_0, ω, f – функции координат α, β; а k – предел текучести при сдвиге. После подстановки в (5) получим уравнения равновесия

$$f_{0,\alpha} + k\varphi_1\cos 2f + k\varphi_2\sin 2f = 0$$

$$f_{0,\beta} + k\varphi_3\cos 2f + k\varphi_4\sin 2f = 0$$

$$\varphi_1 = \omega_{,\alpha}\sin\omega + \frac{2H_1}{H_2}(f_{,\beta} - \Phi_{,\beta}\cos\omega) - (\cos\omega + \sqrt{3}\sin\omega)\frac{\partial \ln H_3}{\partial\alpha}$$

$$\varphi_2 = 2(f_{,\alpha} - \Phi_{,\alpha}\cos\omega) + \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial \ln H_3}{\partial\beta}$$

$$\varphi_3 = -\omega_{,\beta}\sin\omega + \frac{2H_2}{H_1}(f_{,\alpha} - \Phi_{,\alpha}\cos\omega) + (\cos\omega - \sqrt{3}\sin\omega)\frac{\partial \ln H_3}{\partial\beta}$$

$$\varphi_4 = 2(\Phi_{,\beta} - f_{,\beta}\cos\omega) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial \ln H_3}{\partial\alpha}$$

После дифференцирования первого уравнения по β, а второго по α получим одно уравнение, содержащее функции $\omega(\alpha, \beta)$ и $f(\alpha, \beta)$:

$$(\varphi_{1,\beta} - \varphi_{3,\alpha} + 2\varphi_2 f_{,\beta} - 2\varphi_4 f_{,\alpha})\cos 2f + (\varphi_{2,\beta} - \varphi_{4,\alpha} + 2\varphi_3 f_{,\alpha} - 2\varphi_1 f_{,\beta})\sin 2f = 0 \tag{7}$$

Отметим, что существует простое решение (7): $\omega = 0$, $f = \Phi$ (α, β), при котором уравнения равновесия

$$f_{0,\alpha} - k\frac{\partial \ln H_3}{\partial\alpha} = 0, \quad f_{0,\beta} - k\frac{\partial \ln H_3}{\partial\beta} = 0$$

имеют простое решение $f_0 = C_1 + k\ln H_3$ (для плоской деформации аналогичное решение $f_0 = \text{const}$ [4]); C_1 – постоянная, определяемая краевыми условиями. Это определяет статически допустимую систему напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= C_1 + k\ln H_3 - k\cos 2\Phi, \quad \tau_{\alpha\beta} = k\sin 2\Phi \\ \sigma_\beta &= C_1 + k\ln H_3 + k\cos 2\Phi, \quad \sigma_\gamma = C_1 + k\ln H_3 \end{aligned} \tag{8}$$

или с учетом формул (4):

$$\sigma_\alpha = C_1 + k\ln x - k\left(\frac{x_{,\alpha}^2}{H_1^2} - \frac{x_{,\beta}^2}{H_2^2}\right), \quad \tau_{\alpha\beta} = -\frac{2kx_{,\alpha}x_{,\beta}}{H_1H_2}$$

$$\sigma_\beta = C_1 + k\ln x + k\left(\frac{x_{,\alpha}^2}{H_1^2} - \frac{x_{,\beta}^2}{H_2^2}\right), \quad \sigma_\gamma = C_1 + k\ln x$$

Во многих задачах, имеющих значение для практики, можно выбором постоянной C_1 добиться удовлетворительного согласования напряжений с краевыми условиями и, выбрав криволинейные ортогональные координаты α, β в плоскости x, y, просто получить систему статически допустимых напряжений согласно (8).

Если принять $\tau_{\alpha\beta} = f = 0$, то σ_α, σ_β, σ_γ – главные напряжения и коэффициент Лоде [2] равен

$$\mu = \frac{2\sigma_\alpha - \sigma_\beta - \sigma_\gamma}{\sigma_\beta - \sigma_\gamma} = -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\omega, \quad \sigma_\alpha > \sigma_\beta > \sigma_\gamma$$

В этом случае ω – угол, определяющий ориентацию вектора напряжений в пространстве главных напряжений.

Вместо уравнения (7) имеем при $f = 0$ одно уравнение для функции φ: $\varphi_{1,\beta} - \varphi_{3,\alpha} = 0$.

В любой системе ортогональных координат в этом случае решением является $\omega = \pi/2$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_1 - k\sqrt{3}\ln H_3$, $\sigma_\gamma = \sigma_\alpha - k\sqrt{3}$.

Если система координат такова, что величину $(H_1 H_2 H_3)$ можно представить как произведение функции α и β, например, $H_1 H_2 H_3 = \psi_1(\alpha)\psi_2(\beta)$, то уравнение равновесия выполнено при любой функции $\omega = \text{const}$. Так при $\omega = -\pi/6$:

$$\sigma_\alpha = C_1 - k\sqrt{3}\ln\left[\frac{H_1H_3}{\psi_1(\alpha)}\right] - 0.5k\sqrt{3}$$

$$\sigma_\beta = \sigma_\alpha + k\sqrt{3}, \quad \sigma_\gamma = \sigma_\alpha$$

например, в полярных координатах $\psi_1(\alpha) = \alpha^2$, $\psi_2(\beta) = \cos\beta$:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = C_1 - 0.5k\sqrt{3} + k\sqrt{3}\ln(\alpha/\cos\beta)$$

Если $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma$ при $\omega = \text{const} = -\pi/6 \pm 2\pi$, то при $\omega = \pi/6 \pm 2\pi$ $\sigma_\beta = \sigma_\gamma$.

Получить точное решение можно только в случае, когда напряжениям соответствует поле скоростей. Введя функцию тока F согласно формулам $v_\alpha = F_{,\beta}/(H_2H_3)$, $v_\beta = -F_{,\alpha}/(H_1H_3)$, можно определить компоненты тензора скорости деформации:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[F_{,\alpha\beta} - F_{,\alpha}\frac{\partial \ln H_1}{\partial\beta} - F_{,\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln(H_2H_3)\right]$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[-F_{,\alpha\beta} + F_{,\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(H_1H_3) + F_{,\beta}\frac{\partial \ln H_2}{\partial\alpha}\right]$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(F_{,\beta}\frac{\partial \ln H_3}{\partial\alpha} - F_{,\alpha}\frac{\partial \ln H_3}{\partial\beta}\right)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{F_{,\beta}}{H_1H_2H_3}\right) - \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{F_{,\alpha}}{H_1H_2H_3}\right)$$

обеспечивающие выполнение условия несжимаемости. Два соотношения Леви – Мизеса определяют в этом случае ω и f:

$$\frac{\varepsilon_\beta-\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\alpha-\varepsilon_\beta} = \frac{\sigma_\beta-\sigma_\gamma}{\sigma_\alpha-\sigma_\beta} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\omega-1), \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{3}\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha}$$

$$\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\varepsilon_\alpha-\varepsilon_\beta} = \frac{2\tau_{\alpha\beta}}{\sigma_\alpha-\sigma_\beta} = -\frac{\operatorname{tg}2f}{\cos\omega}, \quad f = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{\gamma_{\alpha\beta}\cos\omega}{(\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha)}\right]$$

Если принять, что в некоторой системе координат существует решение при $\tau_{\alpha\beta} = k$, $f = \pi/4$, то $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = f_0$ и из уравнения равновесия (7) получаем, что необходимо выполнение уравнения

$$4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial^2\ln x}{\partial\beta^2} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial^2\ln x}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial\ln x}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H_2}{H_1}\right) - \frac{\partial\ln x}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = 0 \tag{9}$$

Аналогичное уравнение при плоской деформации имеет вид [4]:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta} = 0 \tag{10}$$

При плоской деформации условие $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta = 0$ определяет достаточно широкий класс функций тока. Но при осесимметричной деформации, если выполнено еще дополнительное условие $\varepsilon_\gamma = 0$, то

$$H_1H_2H_3\varepsilon_\gamma = F_{,\beta}\frac{\partial\ln H_3}{\partial\alpha} - F_{,\alpha}\frac{\partial\ln H_3}{\partial\beta} = 0$$

и это определяет решение

$$F = F(H_3) = F(x) \tag{11}$$

С учетом формулы (11) получим

$$\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta = \frac{\sin(2\Phi)}{2x}\left(-F_{,xx} + \frac{1}{x}F_{,x}\right)$$

а поскольку $\varepsilon_\alpha = 0$, то $F = cx^2$ при $\sin 2\Phi \neq 0$; c – постоянная.

Это существенно сужает класс допустимых функций F, однако главное не в этом, а в том, что из условия (11) получим при $\tau_{\alpha\beta} = k$, $\varepsilon_\gamma = 0$ компоненту скорости деформации сдвига

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{\cos(2\Phi)}{x}\left(-F_{,xx} + \frac{1}{x}F_{,x}\right)$$

которая при $F = cx^2$ также равна нулю. Поскольку в этом случае все компоненты тензора скорости деформации равны нулю, такое пластическое течение невозможно.

Если $\Phi = 0$ и принять, что реализуется течение в направлении оси y, то легко показать, что не существует функции f_0, удовлетворяющей при этом уравнениям равновесия (при плоской деформации такое решение есть). Осесимметричная деформация существенно отличается от плоской. Для осесимметричной деформации при $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = 0$ нет такого решения, при котором в меридиональной плоскости существовала бы система взаимно ортогональных линий, вдоль которых выполнялось бы условие $\tau_{\alpha\beta} = k$. Приняв эти линии за координатные, получим $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = \gamma_{\alpha\beta} = 0$.

В некоторых случаях можно найти точные решения, приняв координатные линии за линии тока. В этом случае, если $\upsilon_\beta = 0$, $F_{,\alpha} = 0$, то

$$\omega = \operatorname{arctg}[\sqrt{3}(1+2\varphi_0)^{-1}], \quad \varphi_0 = \frac{H_{2,\alpha}H_3}{H_2 H_{3,\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}(2f) = \frac{H_1^2 H_3^2}{2F_{,\beta}H_{3,\alpha}}(1+\varphi_0+\varphi_0^2)^{-0.5}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{F_{,\beta}}{H_1 H_2 H_3}\right)$$

Так для биполярных координат $\varphi_0 = 1$, $\omega = \pi/6$. В полярных координатах $\varphi_0 = 1$, $\omega = \pi/6$, $\sigma_\beta = \sigma_\gamma$.

Если удается найти некоторую функцию σ_0, такую что $\partial\sigma_0/\partial\alpha = \rho\Phi_1$, $\partial\sigma_0/\partial\beta = \rho\Phi_2$, то добавив σ_0 к σ_α, σ_β и σ_γ, можно получить решение динамической задачи.

Для полярных координат получено решение

$$\upsilon_\alpha = -\upsilon_0\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2}; \quad \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 0, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{2\upsilon_0\alpha_0^2}{\alpha^3}, \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = -\frac{\upsilon_0\alpha_0^2}{\alpha^3}, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0$$

$$\sigma_\alpha = C_1 - k\sqrt{3}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - 0.5\rho\upsilon_0^2\left(1-\frac{\alpha_0^4}{\alpha^4}\right), \quad \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\alpha - k\sqrt{3}$$

где υ_0 – заданная величина скорости на поверхности α_0, $\sigma_\alpha = C_1$.

Если $C_1 = 0$, то на некоторой граничной поверхности $\alpha = \alpha_1$ должно действовать давление

$$p = k\sqrt{3}\left[\ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) + \frac{\rho\upsilon_0^2}{2k\sqrt{3}}\left(1-\frac{\alpha_0^4}{\alpha_1^4}\right)\right]$$

Например, при $\upsilon_0 = 100$ м/с, $k = 250$ мПа, $\rho = 7800$ кг/м^3, $\alpha_1/\alpha_0 = 2$, $p = 0.774k\sqrt{3} = 335$ мПа, $\rho\upsilon_0^2/(2k\sqrt{3}) = 0.09$, т.е. влияние динамики в этом случае незначительно (около 13%).

Приведем далее пример расчета в координатах: $\alpha = y^2 - x^2/2$, $\beta = x^2 y$, приняв α-линии, (при $\beta = \text{const}$) за линии тока. Для этих координат

$$\Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{x}\right) + \pi, \quad H_1 = \frac{1}{\sqrt{d}}, \quad H_2 = \frac{1}{x\sqrt{d}}$$

$$F_{,\alpha} = \upsilon_\beta = 0, \quad \upsilon_\alpha = F_{,\beta}\sqrt{d}$$

При $F_{,\beta} = \text{const}$ можно найти

$$\varepsilon_\alpha = \frac{F_{,\beta}}{d}(8y^2 - x^2), \quad \varepsilon_\beta = \frac{2F_{,\beta}}{d}(x^2 - 2y^2)$$

$$\varepsilon_\gamma = -F_{,\beta}, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{12xy}{d}, \quad d = x^2 + 4y^2$$

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-4y^2)(x^4-4x^2y^2+16y^4)^{-0.5}$$

$$f = 1/2\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}xy}{d}\right)$$

и определено точное решение

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{2k\sqrt{3}}{d}xy, \quad \sigma_\alpha = k\sqrt{3}\left[C_1+\frac{4y^2}{x^2+4y^2}+\frac{a}{c^2}(x^2+4y^2)\right],$$

$$\sigma_\beta = k\sqrt{3}\left[C_1+\frac{x^2}{x^2+4y^2}+\frac{a}{c^2}(x^2+4y^2)\right]$$

$$\sigma_\gamma = k\sqrt{3}\left[C_1+\frac{a}{c^2}(x^2+4y^2)\right], \quad \upsilon_\alpha = \frac{\upsilon_0 c}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$a = \frac{\rho\upsilon_0^2}{2k\sqrt{3}}$$

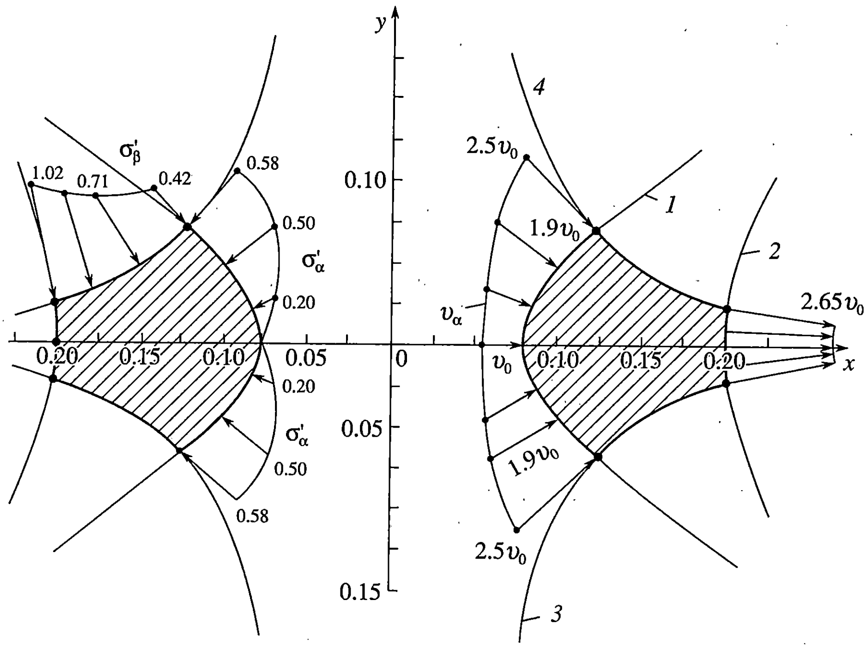
где a – безразмерная величина характеризующая влияние динамики, υ_0 – величина скорости при $y = 0$, $x = c$; C_1 – постоянная (x, y – функции α, β).

На фиг. 2 заштриховано сечение кольца ограниченное координатными линиями $\alpha = -3\cdot10^{-3}$ м^2, $\alpha = -2\cdot10^{-2}$ м^2 и $\beta = \pm10^{-3}$ м^2.

На фиг. 2 линии *1*, *2* соответствуют величинам $\alpha = \text{const} = -3\cdot10^{-3}$ м^2 и $\alpha = -2\cdot10^{-2}$ м^2, а линии *3*, *4* – величинам $\beta = -10^{-3}$ м^3 и $\beta = 10^{-3}$ м^3.

Кольцо деформируется под действием внутреннего давления. В правой части сечения показаны эпюры скоростей υ_α на граничных поверхностях (линии β = const являются линиями тока). Вдоль линии $\alpha = -3\cdot10^{-3}$ м^2 скорость минимальна в центре сечения кольца $\upsilon_\alpha = \upsilon_0$, а на поверхности $\beta = \pm10^{-3}$ м^3 имеем $\upsilon_\alpha = 2.5\upsilon_0$. В левой части фиг. 2 приведены эпюры безразмерных величин: напряжения $\sigma'_\alpha = \sigma_\alpha/(k\sqrt{3})$ на поверхности $\alpha = -3\cdot10^{-3}$ м^2 и $\sigma'_\beta = \sigma_\beta/k\sqrt{3}$ на поверхности $\beta = 10^{-3}$ м^3. Постоянная C_1 определена из условия равенства нулю суммарного усилия на граничной поверхности $\alpha = -2\cdot10^{-2}$ м^2. Расчеты при $\rho = 7800$ кг/м^3, $k = 120$ МПа, $\upsilon_0 = 40$ м/с определяют величину $a = 0.03$. Отметим, что при растяжении кольца в матрице, ограниченной поверхностью, которая образована вращением вокруг оси y линии $x^2y = \beta = \text{const}$, компонента скорости деформации ε_γ и интенсивность тензора скорости деформации являются величинами постоянными по объему деформируемого тела (равными υ_0/c и $2\sqrt{3}\,\upsilon_0/c$ соответственно). В то же время при растяжении внутренним давлением кольца постоянной толщины деформация значительно выше у его внутренней поверхности. Это может иметь значение для обеспечения однородности свойств и структуры деформируемого тела.

Метрическая функция $\Phi(\alpha, \beta)$ является существенной характеристикой координатных систем, а использование формул (3), (4) обеспечивает выполнение всех условий связности (2). Можно задать не координаты α, β в виде функций $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ (или $x(\alpha, \beta)$; $y(\alpha, \beta)$), а метрическую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$, из которой, следуя ниже описанной схеме, находятся все параметры координатной системы.



Фиг. 2

Из формул (3) легко получить уравнения

$$H_{1,\alpha\beta} - H_{1,\beta}\frac{\Phi_{,\alpha\alpha}}{\Phi_{,\alpha}} + H_1\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} = 0, \quad H_2 = -\frac{H_{1,\beta}}{\Phi_{,\alpha}} \tag{12}$$

а после определения H_1 и H_2, используя формулы (4), определить $x_{,\alpha}$ и $x_{,\beta}$. Далее, зная H_1 и $x_{,\alpha}$, H_2 и $x_{,\beta}$, определим $y_{,\alpha}$ и $y_{,\beta}$ и, наконец, функции $x(\alpha, \beta)$; $y(\alpha, \beta)$.

Частные производные $x_{,\alpha}$, $y_{,\alpha}$, $x_{,\beta}$, $y_{,\beta}$ связаны с помощью метрической функции формулами $y_{,\alpha} = x_{,\alpha}\operatorname{tg}\Phi$; $y_{,\beta} = -x_{,\beta}\operatorname{ctg}\Phi$.

Поскольку число решений уравнений (12) бесконечно, то одной метрической функции могут соответствовать много координатных систем. В [4] показано, что для полярных координат $\Phi = \beta$. Но этой функции при $\Phi_{,\alpha} = H_{1,\beta} = 0$ могут соответствовать и координаты

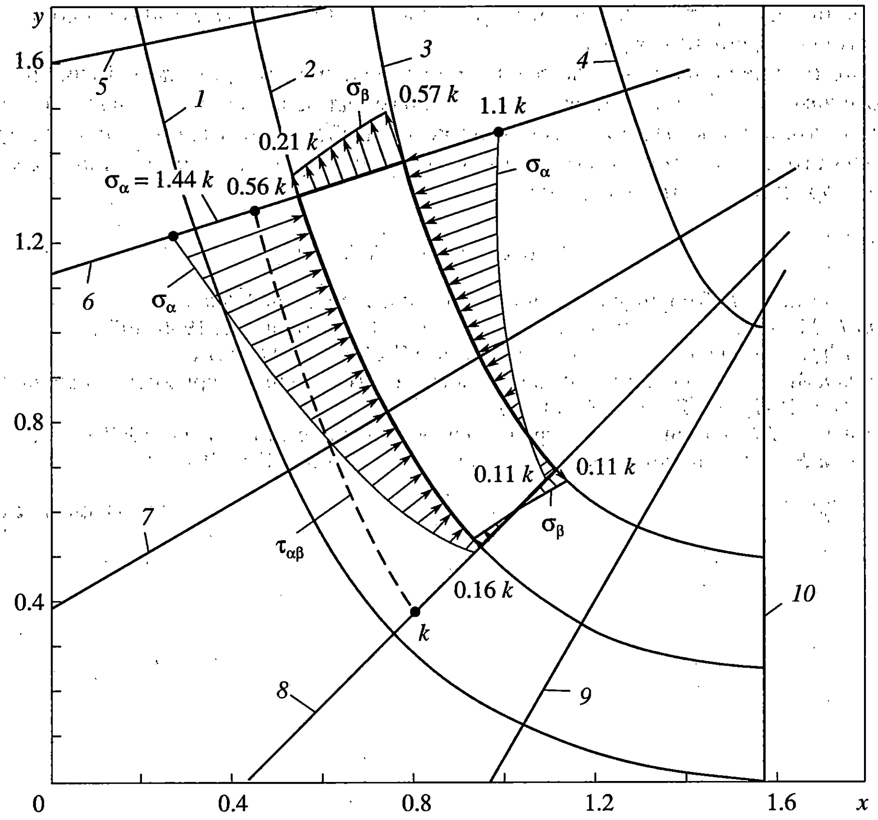
$$x = \alpha\cos\beta - \psi_0(\beta)$$

$$y = \alpha\sin\beta - \int\psi_{0,\beta}\operatorname{ctg}\beta\, d\beta$$

где $\psi_0(\beta)$ – дифференцируемая функция β.

Коэффициенты Ламе следующие: $H_1 = 1$, $H_2 = \alpha - \psi_{0,\beta}/\sin\beta$ и если, например, принять $\psi_0(\beta) = \beta$, то получим

$$\begin{aligned} x &= \alpha\cos\beta + \beta \\ y &= \alpha\sin\beta - \ln|\sin\beta| \\ H_1 &= 1, \quad H_2 = \alpha - 1/\sin\beta \end{aligned} \tag{13}$$



Фиг. 3

Эти координатные линии приведены на фиг. 3, причем линии *1, 2, 3* и *4* соответствуют значениям $\alpha = 0$, 0.25, 0.50 и 1.0; а линии *5, 6, 7, 8, 9* и *10* значениям переменной $\beta = 0.20$, 0.30, 0.523, 0.785, 1.053 и 1.57.

В области, ограниченной координатами $x < 3/2$ $\beta < 1$ (где через каждую точку проходят две, взаимно перпендикулярных, координатные линии) приведены эпюры напряжений, построенных по формулам (8) для кольца, ограниченного поверхностями $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.50$ и $\beta = 0.30$, $\beta = 0.785 = \pi/4$.

Схема соответствует волочению в криволинейной матрице, причем постоянная C_1 в формулах (8) определена из условия равенства нулю суммарного усилия на участке линии $\beta = \text{const} = \pi/4$ между линиями $\alpha = 0.50$ и $\alpha = 0.25$.

Приведены эпюры нормальных напряжений σ_α на поверхностях $\alpha = \text{const}$, а пунктиром на линии $\alpha = 0.25$ приведена эпюра касательных напряжений $\tau_{\alpha\beta}$. Их величина значительна: $\tau_{\alpha\beta}$ изменяется от 0.56 k при $\beta = 0.30$ до $\tau_{\alpha\beta} = k$ при $\beta = \pi/4$. На поверхности $\beta = 0.30$ приведена эпюра напряжений σ_β, причем среднее напряжение волочения равно 0.42 k.

На фиг. 3 видно, что координатные линии (13) существенно отличаются от полярных координат, хотя у них одна и та же метрическая функция $\Phi(\alpha, \beta) = \beta$.

Одно из семейств координатных линий ($\beta = \text{const}$) является прямыми, как и в полярных координатах, но они не все проходят через точку $x = y = 0$. Через эту точку проходит только линия $\beta = 0.655$.

При плоской деформации линии α, β на фиг. 3 могут быть линиями скольжения и применимы для решения ряда задач.

Использование криволинейных координат с введением метрической функции согласно формулам (3) и (4) может оказаться полезным для решения некоторых задач теории пластичности, а также гидродинамики. При этом обеспечивается выполнение уравнений связности, так что можно получить статически допустимые системы напряжений, а для некоторых задач – точные решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Бровман М.Я.* О решении уравнений пластического течения в криволинейных координатах // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 87–98.
5. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
6. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1974. 206 с.

Тверь

Поступила в редакцию
12.11.2004