

УДК 539.214:539.374

© 2006 г. Д.Д. ИВЛЕВ, Н.М. МАТЧЕНКО

О РАЗВИТИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

В работе рассматриваются условия перехода статически неопределимого состояния в статически определимое.

В работе [1] определены три состояния идеально пластического материала. Пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде одной гладкой функции текучести

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1)$$

Развитое пластическое состояние, при котором напряжения удовлетворяют условию пластичности в виде пересечения двух гладких функций текучести

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2)$$

и, наконец, предельное статически определимое состояние, при котором напряжения удовлетворяют трем функциям текучести:

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_3(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3)$$

Статически неопределимые состояния (1), (2) приводят к необходимости использования соотношений ассоциированного закона течения, предельное состояние при статически неопределимых состояниях не достигается. Предельное состояние достигается при статически определимых состояниях материала (3).

Обозначим главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Максимальные касательные напряжения запишем в виде

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (4)$$

Имеет место связь

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (5)$$

Предположим, что

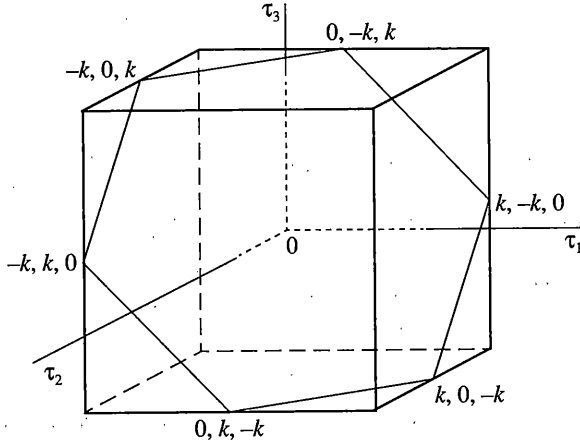
$$|\tau_{i\max}| \leq k, \quad k - \text{const} \quad (6)$$

Введем трехмерное пространство τ_1, τ_2, τ_3 . Область изменения касательных напряжений τ_i ограничена плоскостями (фиг.1):

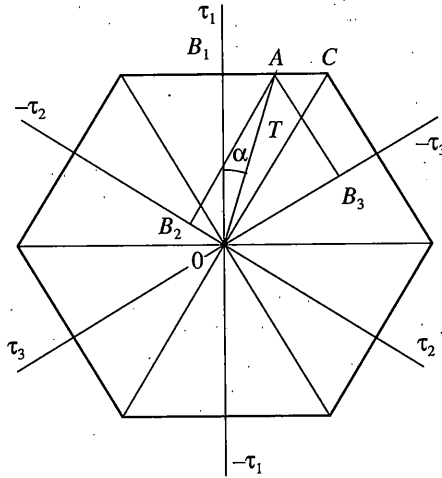
$$-k \leq \tau_i \leq k \quad (7)$$

Введем вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_1 \mathbf{i} + \tau_2 \mathbf{j} + \tau_3 \mathbf{k} \quad (8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные орты вдоль осей τ_1, τ_2, τ_3 . Вектор $\boldsymbol{\tau}$ (8), лежит в девиаторной плоскости пространства τ_1, τ_2, τ_3 . Рассмотрим девиаторную плоскость (5) (фиг. 2). Очевидно

$$T = OA, \quad \tau_1 = OB_1, \quad |\tau_2| = OB_2, \quad |\tau_2| = OB_3$$

$$\tau_1 = T \cos \alpha$$

$$\tau_2 = -T \sin(30^\circ - \alpha) = -T \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \tag{9}$$

$$\tau_3 = -T \cos(60^\circ - \alpha) = -T \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$$

Выражения (9) удовлетворяют соотношению (5). Согласно (9) модуль вектора τ имеет вид

$$|\tau| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}T \quad (10)$$

или

$$T = \sqrt{6} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} / 3 \quad (11)$$

Отметим, что выражение (11) согласно Мизесу [2] пропорционально выражению интенсивности напряжений, которое определяется значением второго инварианта девиатора напряжений:

$$\Sigma_2' = [-(\sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2' \sigma_3' + \sigma_3' \sigma_1')]^{1/2} = \sqrt{2}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{1/2}, \quad \Sigma_2' = \sqrt{3}T \quad (12)$$

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0, \quad \sigma_i' = \sigma_i - \sigma, \quad \sigma = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

где штрих наверху приписан компонентам девиатора.

Для напряженного состояния, изображенного на фиг. 2:

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 \quad (13)$$

отсюда следует

$$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \quad (14)$$

Параметр Лоде [2] имеет вид

$$\mu = \frac{2\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad (15)$$

Согласно (9), σ_3 параметр Лоде (15) примет вид

$$\mu = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha \quad (16)$$

Согласно (15), при изменении параметра Лоде в пределах $|\mu| \leq 1$ величина α ограничена выражением $|\alpha| \leq \pi/6$. Условию полной пластичности соответствуют значения

$$\mu = \pm 1, \quad \alpha = \pm \pi/6 \quad (17)$$

Согласно (9), (17) максимальное значение величины T имеет место при условии полной пластичности

$$T = k \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \tau_1 = k, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = -k \quad (18)$$

При возрастании нагрузок интенсивность напряжений Σ_2' и величина T (12) возрастают. При достижении пластического состояния $\tau_1 = k, \tau_2 = \tau_3 = -1/2k$ (точка B , на фиг. 2), согласно (11) $T = k$; при условии полной пластичности $\tau_1 = k, \tau_2 = 0, \tau_3 = -k$ (точка C на фиг. 2), согласно (11), $T = \sqrt{2}k$. Таким образом, при переходе к статически определенному состоянию величины Σ_2', T меняются в пределах

$$k \leq T \leq \sqrt{2}k, \quad \sqrt{3}k < \Sigma_2' < \sqrt{6}k \quad (19)$$

Отметим, что переход статически неопределимого состояния (состояние неполной пластичности) в статически определимое состояние полной пластичности обсуждался также в работах [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю.* Полная пластичность в теории идеально-пластического тела // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 3. С. 333–334.
2. Теория пластичности, Сб. статей. М.: Изд-во иностр. лит. 1998.
3. *Христианович С.А., Шемякин Е.И.* К теории идеальной пластичности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 4. С. 86–97.
4. *Христианович С.А., Шемякин Е.И.* О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // Инж. ж. МТТ. 1969. № 5. С. 138–149.

Чебоксары, Тула

Поступила в редакцию
22.05.2006