

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В ПЛАНЕ ПЛАСТИН

В статье проводится анализ упругих пластин, периодических в плане, при поперечном изгибе с помощью метода осреднения [1, 2]. Асимптотическое исследование таких пластин может осуществляться на основе двух подходов. Первый использует уравнения теории оболочек (например, пологих оболочек или пластин с начальным прогибом), к которым применяется метод осреднения. Второй подход исходит из уравнений трехмерной теории упругости. Применение метода осреднения приводит к двумерным уравнениям теории пластин для определения гладких составляющих НДС, а также локальным трехмерным задачам на ячейке периодичности для нахождения флуктуаций. Отметим некоторые работы этого направления. Следует назвать работу [3], в которой, наверно, впервые исследован изгиб однородной пластины с периодически неровными поверхностями. В [4] рассмотрено продольное растяжение периодически неоднородной пластины, но с плоскими границами. В [5, 6] получено асимптотическое представление решения как для растяжения в плоскости пластины, так и для изгиба произвольно неоднородной пластины с неровными границами. Единственным условием остается требование периодичности формы, а также свойств пластины. В [6] рассматривались отдельно плосконапряженное состояние и изгиб. В [5] показано, что такое разделение возможно только в том случае, когда пластина имеет плоскость симметрии формы и свойств. В противном случае получены уравнения совместного плоскоизгибного состояния. Во всех перечисленных работах по существу изучены только первые члены асимптотического разложения. В [7] для состояния изгиба без растяжения получены два следующих приближения, позволяющие вычислять касательные и поперечное напряжения.

В данной работе дается полный анализ состояния изгиба-растяжения периодической пластины под действием поперечной нагрузки. Областью применения этой теории являются всевозможные ребристые, штампованные и сотовые пластины. Нулевое приближение (такая терминология введена в [1]) дает осредненные уравнения плоскоизгибного состояния. Локальные задачи нулевого приближения позволяют вычислить эффективные жесткости. После преобразования эти задачи соответствуют экспериментальному определению эффективных жесткостей. Первое и второе приближения позволяют найти касательные напряжения и поперечное напряжения, для вычисления которых получены локальные задачи на ячейке периодичности и показана их разрешимость. Приведен пример вычисления жесткостей растяжения, изгиба и взаимного влияния для модельной пластины, имеющей ячейку периодичности в форме шестиугольника. Полученная теория может быть применена к слоистым пластинам. В этом случае нулевое приближение дает классическую теорию слоистых пластин, описанную, например, в [8, 9].

1. В этом пункте проведем процедуру осреднения для совместного плоскоизгибного состояния. Под этим термином будем иметь в виду состояние изгиба-кручения и растяжения-сдвига в плоскости. Такое состояние возникает в пластине, не имеющей плоскости симметрии или формы и/или упругих свойств. Используемые обозначения и терминология метода осреднения соответствуют [1, 7]. Отметим, что искомые функции, например, перемещения, считаются функциями координат x_i и быстрых координат $\xi_i = x_i/\varepsilon$: $u_i = u_i(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Плоскость $x_3 = 0$ будем называть отсчетной. Способ ее выбора относительно пластины обсуждается ниже. Будем рассматривать поперечный изгиб пластины под действием вертикальной нагрузки, приложенной к верхней поверхности. Главный вектор этой нагрузки по ячейке периодичности равен $\varepsilon^3 p(\mathbf{x})$ и направлен перпендикулярно отсчетной плоскости пластины. Краевой эффект, возникающий у границы, не изучается. Индексы, обозначенные большими латинскими буквами, пробегают значения 1, 2; малыми – 1, 2, 3; запятой обозначается производная как по координатам x_j , так и по координатам ξ_j в зависимости от контекста. Следует подчеркнуть, что НДС зависит от трех быстрых пространственных координат и двух медленных, лежащих в отсчетной плоскости. Зависимость внешней нагрузки p от медленных координат x_1, x_2 означает, что она слабо меняется на расстоянии порядка размера ячейки периодичности.

Перемещения представляются в виде асимптотического разложения $\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^b$:

$$u_i^e = v_i(x_1, x_2) + \sum_{m=1} \varepsilon^m N_{iPQ_0 \dots Q_{m-1}}^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P, Q_0 \dots Q_{m-1}}(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

$$u_I^b = -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N_{IPQ_0 \dots Q_{m-2}}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2) \quad (1.2)$$

$$u_3^b = w(x_1, x_2) + \sum_{m=2} \varepsilon^m N_{3PQ_0 \dots Q_{m-2}}^b(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_{m-2}}(x_1, x_2)$$

где $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, 0\}$ – гладкая составляющая перемещения в плоскости пластины, w – гладкая составляющая прогиба. Локальные функции, отмеченные индексом “e”, соответствуют состоянию растяжения в плоскости пластины (extension) в отличие от локальных функций изгиба, которые отмечены индексом “b” (bending). Ряды (1.1), (1.2) не являются сходящимися и обычно используются несколько первых членов. Для нулевого приближения достаточно только первых членов (1.1), (1.2). Далее рассматриваются три члена сумм (1.1), (1.2). Напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij}^e = P_{ijPQ} v_{P, Q} + \sum_{m=1} \varepsilon^m P_{ijPQ_0 \dots Q_m}^m w_{P, Q_0 \dots Q_m} \quad (1.3)$$

$$P_{ijPQ_0 \dots Q_m}^m = C_{ijkQ_m} N_{kPQ_0 \dots Q_{m-1}}^e + C_{ijkl} N_{kPQ_0 \dots Q_{m,l}}^e$$

$$P_{ijPQ} = P_{ijPQ}^0 = C_{ijPQ} + C_{ijkl} N_{kPQ,l}^e$$

$$\sigma_{ij}^b = \varepsilon Q_{ijPQ} w_{,PQ} + \sum_{m=1} \varepsilon^{m+1} Q_{ijPQ_0 \dots Q_m}^m w_{,PQ_0 \dots Q_m} \quad (1.4)$$

$$Q_{ijPQ_0 \dots Q_m}^m = C_{ijkQ_m} N_{kPQ_0 \dots Q_{m-1}}^b + C_{ijkl} N_{kPQ_0 \dots Q_{m,l}}^b$$

$$Q_{ijPQ}^0 = Q_{ijPQ} = -\xi_3 C_{ijPQ} + C_{ijkl} N_{kPQ,l}^b$$

где $C_{ijkl}(\xi)$ – упругие модули материала. Уравнения равновесия получаются в виде $\sigma_{ij,j}^e + \sigma_{ij,j}^b = 0$, где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^e &\equiv 1/\varepsilon P_{ijPQ_0,j} \nu_{P,Q_0} + \sum_{m=0} \varepsilon^m P_{ijPQ_0 \dots Q_{m+1},j}^m \nu_{P,Q_0 \dots Q_{m+1}} + \sum_{m=0} \varepsilon^m P_{iQ_{m+1}PQ_0 \dots Q_m}^m \nu_{P,Q_0 \dots Q_{m+1}} \\ \sigma_{ij,j}^b &\equiv Q_{ijPQ_0,j} W_{PQ_0} + \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} Q_{ijPQ_0 \dots Q_{m+1},j}^{m+1} W_{PQ_0 \dots Q_{m+1}} + \\ &+ \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} Q_{iQ_{m+1}PQ_0 \dots Q_m}^{m+1} W_{PQ_0 \dots Q_{m+1}} \end{aligned}$$

Для общего плоскоизгибного состояния построение и обоснование корректности локальных задач отличаются от описанного в [7]. Конечно, есть отличие и от случая периодичности по всем направлениям. Локальные задачи нулевого приближения возникают из необходимости обнулить первые члены в (1.1), (1.2). Тогда функции нулевого приближения (перемещения в локальной задаче) N_{iPQ}^e, N_{iPQ}^b находятся из решения задач на ячейке периодичности V_{ξ}^{cell} :

$$\begin{aligned} P_{ijPQ,j} &= 0, \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad P_{ijPQ} n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \\ Q_{ijPQ,j} &= 0, \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad Q_{ijPQ} n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

с условиями периодичности на ее боковых гранях $\Sigma_{\text{lateral}}^{\text{cell}}$ ($\xi_I = \pm l_I/2, I = 1, 2$). Здесь $\mathbf{n}(\xi)$ – вектор нормали к верхней или нижней границе $\Sigma_2^{\text{cell}} = \Sigma_{\text{top}}^{\text{cell}} + \Sigma_{\text{bot}}^{\text{cell}}$ ячейки периодичности. Проекция на плоскость $\xi_1 \xi_2$ ячейки периодичности есть прямоугольник со сторонами l_1, l_2 , а $\Sigma_{\text{top}}^{\text{cell}}, \Sigma_{\text{bot}}^{\text{cell}}$ обозначают соответственно верхнюю и нижнюю поверхности ячейки. Задачи (1.5) являются трехмерными и могут решаться различными способами. Поскольку пластина – тонкостенное тело, то при решении можно использовать как трехмерные конечные элементы, так и оболочечные. Выбор зависит от вида конкретной ячейки. Для слоистой пластины задачи (1.5) являются одномерными и решаются аналитически [7].

Нулевое приближение достаточно, чтобы получить разрешающие уравнения теории пластин, которые следуют, как известно, из уравнений равновесия усилий и моментов. Для произвольной периодической в плане пластины эти уравнения получены в [7] и имеют обычный для теории пластин вид

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,J} + Q_I = 0, \quad Q_{I,I} + \varepsilon^3 p(x) = 0 \quad (1.6)$$

где определения усилий, моментов и поперечных сил приведены ниже

$$T_{IJ} = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{\text{cell}}} \int_{V_{\eta}^{\text{cell}}} \sigma_{IJ} dV_{\eta}, \quad M_{IJ} = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{\text{cell}}} \int_{V_{\eta}^{\text{cell}}} x_3 \sigma_{IJ} dV_{\eta}, \quad Q_I = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{\text{cell}}} \int_{V_{\eta}^{\text{cell}}} \sigma_{I3} dV_{\eta} \quad (1.7)$$

В (1.7) через $\Sigma_{\eta}^{\text{cell}} \equiv \varepsilon^2 l_1 l_2$ обозначена реальная площадь ячейки периодичности в координатах η_1, η_2 в отличие от площади в координатах ξ : $\Sigma_{\xi}^{\text{cell}} \equiv l_1 l_2$. Координаты $\eta_i = \varepsilon \xi_i$ отли-

чаются от координат x_i тем, что определены только для ячейки периодичности, тогда как x_i пробегает всю пластину. Полагаем, что при стремлении малого параметра ϵ к нулю соотношение сторон ячейки периодичности не меняется. При этом изгибные жесткости имеют порядок ϵ^3 , что отражено в записи внешней нагрузки

$$\epsilon^3 p(x) = \frac{1}{\Sigma_{\xi}^{\text{cell}}} \int_{\Sigma_{\xi}^{\text{cell}}} S_3 d\Sigma_{\xi}, \quad S_3(x, \xi) = \epsilon^3 p(x) n_3(\xi)$$

В нулевом приближении из (1.3), (1.4) следует, что напряжения имеют вид $\sigma_{ij} = P_{ijPQ} v_{P,Q} + \epsilon Q_{ijPQ} w_{,PQ}$. Из последнего соотношения и из (1.7) следуют эффективные определяющие соотношения осредненной пластины

$$T_{IJ} = A_{IJPQ} e_{PQ} + B_{IJPQ}^{(I)} \kappa_{PQ}, \quad M_{IJ} = B_{IJPQ}^{(II)} e_{PQ} + D_{IJPQ} \kappa_{PQ} \quad (1.8)$$

$$e_{PQ} = v_{P,Q}, \quad \kappa_{PQ} = -w_{,PQ}$$

$$A_{IJPQ} = \frac{\epsilon}{\Sigma_{\xi}^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} P_{IJPQ} dV_{\xi}, \quad B_{IJPQ}^{(I)} = \frac{\epsilon^2}{\Sigma_{\xi}^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} -Q_{IJPQ} dV_{\xi} \quad (1.9)$$

$$B_{IJPQ}^{(II)} = \frac{\epsilon^2}{\Sigma_{\xi}^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} \xi_3 P_{IJPQ} dV_{\xi}, \quad D_{IJPQ} = \frac{\epsilon^3}{\Sigma_{\xi}^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} -\xi_3 Q_{IJPQ} dV_{\xi}$$

В соотношениях (1.9) A_{IJPQ} – жесткости на растяжение, D_{IJPQ} – на изгиб, а $B_{IJPQ}^{(I)}$ и $B_{IJPQ}^{(II)}$ – жесткости взаимного влияния. В (1.9) верхние индексы I, II обозначены римскими цифрами. Для симметричной пластины Q_{IJPQ} является антисимметричными функциями ξ_3 , а P_{IJPQ} симметричными, поэтому жесткости взаимного влияния равны нулю и система распадается.

В общем случае нулевого приближения система уравнений равновесия относительно перемещений v и прогиба w , как следует из (1.6), (1.8), приобретает вид

$$A_{IJPQ} v_{P,QJ} - B_{IJPQ}^{(I)} w_{,PQJ} = 0, \quad -B_{IJPQ}^{(II)} v_{P,QIJ} + D_{IJPQ} w_{,PQIJ} = \epsilon^3 p \quad (1.10)$$

т.е. внешне такой же, как для слоистых пластин. Разница, конечно, состоит в определении жесткостей (1.9). В случае пластины, имеющей плоскость симметрии, уравнения (1.10) разделяются и получается классическое уравнение изгиба $D_{IJPQ} w_{,IJPQ} = \epsilon^3 p(x)$.

Энергия упругой деформации определяется в виде

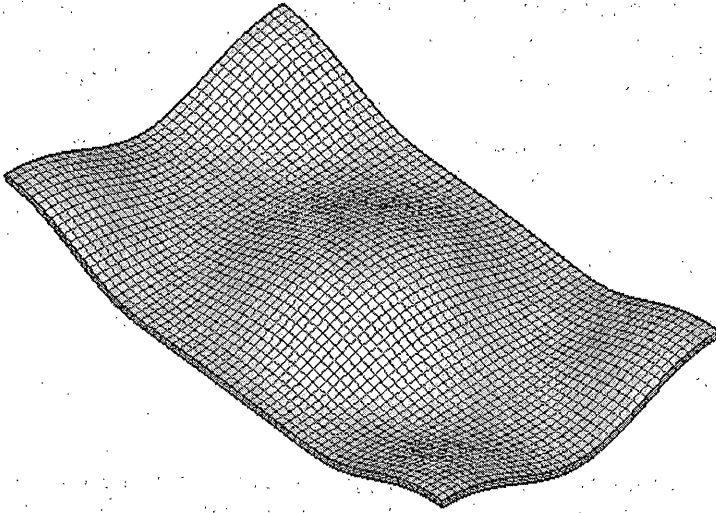
$$\varphi(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{\text{cell}}} \int_{V^{\text{cell}}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^1) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}^2) dV_{\eta}$$

Эта энергия отнесена не к единице объема, а к единице площади. Удобно ввести жесткости, не зависящие от параметра ϵ :

$$A_{IJPQ}^{\xi} = A_{IJPQ}/\epsilon, \quad B_{IJPQ}^{\xi(\alpha)} = B_{IJPQ}^{(\alpha)}/\epsilon^2, \quad D_{IJPQ}^{\xi} = D_{IJPQ}/\epsilon^3, \quad \alpha = I, II \quad (1.11)$$

Можно показать, что выражение энергии, записанное через деформации в отсчетной плоскости и кривизны, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = \epsilon A_{IJPQ}^{\xi} e_{IJ}^1 e_{PQ}^2 + \epsilon^2 B_{IJPQ}^{\xi(I)} e_{IJ}^1 \kappa_{PQ}^2 + \epsilon^2 B_{IJPQ}^{\xi(II)} \kappa_{IJ}^1 e_{PQ}^2 + \epsilon^3 D_{IJPQ}^{\xi} \kappa_{IJ}^1 \kappa_{JI}^2$$



откуда следуют соотношения симметрии:

$$A_{IJPQ} = A_{PQIJ}, \quad B_{IJPQ}^{(I)} = B_{PQIJ}^{(II)}, \quad D_{IJPQ} = D_{PQIJ}$$

2. Приведем пример вычисления всех жесткостей для модельной пластины, ячейка периодичности которой изображена на фигуре. Для удобства вычислений была выбрана прямоугольная ячейка, хотя данная пластина имеет также ячейку периодичности в форме правильного шестиугольника. Для такой симметрии определяющие соотношения для растяжения-изгиба приобретают вид

$$\begin{aligned} T_{11} &= E_{1111}e_{11} + E_{1122}e_{22} + B_{1111}^{(I)}\kappa_{11} + B_{1122}^{(I)}\kappa_{22} \\ T_{22} &= E_{2211}e_{11} + E_{2222}e_{22} + B_{2211}^{(I)}\kappa_{11} + B_{2222}^{(I)}\kappa_{22} \\ M_{11} &= B_{1111}^{(II)}e_{11} + B_{1122}^{(II)}e_{22} + D_{1111}\kappa_{11} + D_{1122}\kappa_{22} \\ M_{22} &= B_{2211}^{(II)}e_{11} + B_{2222}^{(II)}e_{22} + D_{2211}\kappa_{11} + D_{2222}\kappa_{22} \end{aligned} \tag{2.1}$$

В таблице приведены вычисленные безразмерные жесткости, входящие в (2.1), для следующих безразмерных параметров пластины: $E = 1$, $\nu = 0.3$, сторона шестиугольника равна 1, толщина пластины была выбрана равной 0.2, а толщина листа 0.04. Цилиндрическая жесткость листа $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ при этом равна $5.86 \cdot 10^{-6}$. Видно, что соотношения симметрии жесткостей выполняются. Также видно, что точность вычислений порядка нескольких процентов. Жесткости, входящие в (2.1), зависят от выбора

Таблица

1.18E-02	3.04E-03	1.16E-04	-9.01E-05
3.00E-03	1.22E-02	-9.36E-05	1.31E-04
1.09E-04	-9.22E-05	2.22E-05	-4.84E-06
-9.28E-05	1.21E-04	-4.77E-06	2.33E-05

отсчетной плоскости. Изгибные жесткости при чистом изгибе, найденные из (2.1), равны $\tilde{D}_{1111} = 1.97 \cdot 10^{-5}$, $\tilde{D}_{2222} = 2.06 \cdot 10^{-5}$. Они не зависят от выбора отсчетной плоскости. Вычисления проведены по программе для РС на ФОРТРАНЕ, написанной автором.

3. Как уже отмечалось, представляет интерес рассмотрение следующих приближений асимптотического разложения. Первые три члена уравнения равновесия сил имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = & (P_{iQ_1PQ_0}^0 + P_{ijPQ_0Q_1,j}^1) v_{P,Q_0Q_1} + \varepsilon (Q_{iQ_1PQ_0}^0 + Q_{ijPQ_0Q_1,j}^1) w_{P,Q_0Q_1} + \\ & + \varepsilon (P_{iQ_2Q_1PQ_0}^1 + P_{ijPQ_0Q_1Q_2,j}^2) v_{P,Q_0Q_1Q_2} + \varepsilon^2 (Q_{iQ_2Q_1PQ_0}^1 + Q_{ijPQ_0Q_1Q_2,j}^2) w_{P,Q_0Q_1Q_2} + \\ & + \varepsilon^2 (P_{iQ_3Q_1PQ_0Q_2}^2 + P_{ijPQ_0Q_1Q_2Q_3,j}^3) v_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3} + \\ & + \varepsilon^3 (Q_{iQ_3Q_1PQ_0Q_2}^2 + Q_{ijPQ_0Q_1Q_2Q_3,j}^3) w_{P,Q_0Q_1Q_2Q_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку правая часть в уравнениях (3.1) не зависит от быстрых координат, то так же должны вести и коэффициенты. Поэтому локальные задачи строятся так, чтобы выражения в скобках в (3.1) равнялись тензорам-константам, которые по аналогии с (1.9) будем обозначать $a_{ijPQ_0\dots Q_m}^{\xi(m)}$, $b_{ijPQ_0\dots Q_m}^{\xi(I)(m)}$, $d_{ijPQ_0\dots Q_m}^{\xi(m)}$. В первом приближении получим локальные задачи

$$\begin{aligned} P_{ijPQ_0Q_1,j}^1 + P_{iQ_1PQ_0}^0 &= a_{iQ_1PQ_0}^{\xi(0)}, \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad P_{ijPQ_0Q_1}^1 n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \\ Q_{ijPQ_0Q_1,j}^1 + Q_{iQ_1PQ_0}^0 &= b_{iQ_1PQ_0}^{\xi(I)(0)}, \quad \xi \in V_{\xi}^{\text{cell}}, \quad Q_{ijPQ_0Q_1}^1 n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle P_{iQ_1PQ_0}^0 \rangle &= a_{iQ_1PQ_0}^{\xi(0)}, \quad \langle Q_{iQ_1PQ_0}^0 \rangle = b_{iQ_1PQ_0}^{\xi(I)(0)} \\ \langle P_{3Q_1PQ_0}^0 \rangle &= 0, \quad \langle Q_{3Q_1PQ_0}^0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где среднее берется по ячейке периодичности. Для доказательства (3.3) используем равенство

$$V_{\xi}^{\text{cell}} \langle P_{ijPQ_0Q_1,j}^1 \rangle = \int_{\Sigma_{\text{lateral}}^{\xi}} P_{ijPQ_0Q_1}^1 n_j d\Sigma + \int_{\Sigma_2^{\xi}} P_{ijPQ_0Q_1}^1 n_j d\Sigma = 0$$

которое выполняется, поскольку каждый из интегралов в нем равен нулю. Первый равен нулю, поскольку на боковых границах $\xi_{\alpha} = \pm l_{\alpha}/2$ функции $P_{\alpha j P Q_0 Q_1}^1$ равны вследствие периодичности, а $n_{\alpha} = \pm 1$. Второй интеграл равен нулю в силу граничного условия (3.2) на Σ_2^{cell} . Аналогично, $\langle Q_{ijPQ_0Q_1,j}^1 \rangle = 0$. Осредняя дифференциальные уравнения (3.2), получим $\langle P_{iQ_1PQ_0}^0 \rangle = a_{iQ_1PQ_0}^{\xi(0)}$, $\langle Q_{iQ_1PQ_0}^0 \rangle = b_{iQ_1PQ_0}^{\xi(I)(0)}$, откуда следуют первые равенства (3.3). Теперь дополнительно докажем, что $\langle P_{3Q_1PQ_0}^0 \rangle = 0$. Для этого используем известное преобразование

$$\int_{V_{\xi}^{\text{cell}}} P_{3Q_1PQ_0}^0 dV = \int_{V_{\xi}^{\text{cell}}} (P_{Q_1kPQ_0}^0 \xi_3)_{,k} dV = \int_{\Sigma_{\text{lateral}}^{\xi}} P_{Q_1kPQ_0}^0 n_k \xi_3 d\Sigma + \int_{\Sigma_2^{\xi}} P_{Q_1kPQ_0}^0 n_k \xi_3 d\Sigma$$

Каждый из интегралов в правой части последнего равенства равен нулю. Второй интеграл в последнем равенстве равен нулю в силу граничного условия (3.2). В первом интеграле величины $P_{Q_1\alpha P Q_0}^0 \xi_3$ равны при $\xi_\alpha = \pm l_\alpha/2$ в силу периодичности, а $n_\alpha = \pm 1$. Поэтому интеграл равен нулю. Аналогично показывается, что $\langle Q_{3Q_1 P Q_0}^0 \rangle = 0$. Таким образом, правые части задач уравновешены по третьему направлению, что доказывает корректность этих локальных задач.

Перейдем теперь ко второму приближению. Это приближение интересно тем, что позволяет удовлетворить граничному условию на верхней поверхности пластины. В этом приближении получим локальные задачи

$$\begin{aligned} P_{ijPQ_0Q_1Q_2}^2 + P_{iQ_2Q_1PQ_0}^1 &= a_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)}, \quad \xi \in V_\xi^{\text{cell}} \\ Q_{ijPQ_0Q_1Q_2}^2 + Q_{iQ_2Q_1PQ_0}^1 &= b_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(I)(1)}, \quad \xi \in V_\xi^{\text{cell}} \\ P_{ijPQ_0Q_1Q_2}^2 n_j &= -B_{Q_2PQ_0Q_1}^{(II)(\xi)} \delta_{i3} n_3, \quad P_{ijPQ_0Q_1Q_2}^2 n_j = D_{Q_2PQ_0Q_1}^{\xi} \delta_{i3} n_3, \quad \xi \in \Sigma_2^{\text{cell}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично первому приближению можно показать, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle P_{iQ_2PQ_0Q_1}^1 \rangle &= a_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)}, \quad \langle Q_{iQ_2PQ_0Q_1}^1 \rangle = b_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(I)(1)} \\ \langle P_{3Q_2PQ_0Q_1}^1 \rangle &= 0, \quad \langle Q_{3Q_2PQ_0Q_1}^1 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство первых двух равенств (3.5) не отличается от доказательства равенств (3.3). Доказательство вторых равенств (3.5) дано ниже. Прежде всего, заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{3Q_2PQ_0Q_1}^1 dV &= \int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{Q_23PQ_0Q_1}^1 dV = \int_{V_\xi^{\text{cell}}} (P_{Q_2kPQ_0Q_1}^1 \xi_3)_{,k} dV - \int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{Q_2kPQ_0Q_1}^1 \xi_3 dV = \\ &= \int_{\Sigma_\xi^{\text{cell}}} P_{Q_2kPQ_0Q_1}^1 n_k \xi_3 d\Sigma + \int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{Q_2Q_1PQ_0}^0 \xi_3 dV - a_{Q_2Q_1PQ_0}^{\xi(0)} \int_{V_\xi^{\text{cell}}} \xi_3 dV \end{aligned}$$

В этих преобразованиях последний интеграл первой строчки заменен в силу (3.2). Первый интеграл во второй строчке равен нулю в силу условий периодичности и граничных условий (3.2) на верхней и нижней поверхностях ячейки периодичности. Последний интеграл во второй строчке равен нулю, если выбрать отчетную плоскость так, что она проходила через геометрический центр ячейки периодичности: $\int_{V_\xi^{\text{cell}}} \xi_3 dV = 0$. В итоге получим равенство

$$\int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{3Q_2PQ_0Q_1}^1 dV = \int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{Q_2Q_1PQ_0}^0 \xi_3 dV \quad (3.6)$$

Используем его для доказательства уравновешенности правой части задачи (3.4) по третьему направлению при $a_{3Q_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)} = 0$. Уравновешенность означает

$$-\int_{V_\xi^{\text{cell}}} P_{3Q_2PQ_0Q_1}^1 dV = \int_{\Sigma_\xi^{\text{cell}}} P_{3jPQ_0Q_1Q_2}^2 n_j d\Sigma = -B_{PQ_0Q_1Q_2}^{(II)\xi} \int_{\Sigma_\xi^{\text{cell}}} n_3 d\Sigma = -B_{PQ_0Q_1Q_2}^{(II)\xi} \Sigma_\xi^{\text{cell}}$$

Из последнего равенства и (3.6) следует

$$B_{PQ_0Q_1Q_2}^{(\text{II})\xi} = \frac{1}{\sum_{\xi}^{\text{cell}} v_{\xi}^{\text{cell}}} \int P_{Q_2Q_1PQ_0}^0 \xi_3 dV$$

Используя определения (1.11), получаем

$$B_{PQ_0Q_1Q_2}^{(\text{II})} = \frac{\varepsilon^2}{\sum_{\xi}^{\text{cell}} v_{\xi}^{\text{cell}}} \int P_{Q_2Q_1PQ_0}^0 \xi_3 dV$$

что совпадает с определением (1.9). Этим доказывается, что уравновешенность правой части задачи (3.4) для $P_{ijPQ_0Q_1Q_2}^2$ имеет место. Следовательно, выполняется третье равенство (3.5). Аналогично осуществляется анализ корректности задачи (3.4) для нахождения $Q_{ijPQ_0Q_1Q_2}^2$.

Теперь можно показать, что неоднородное граничное условие на верхней поверхности пластины выполняется. Действительно, из (1.3), (1.4) и (3.4) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{3j} n_j (\sum_{\text{top}}) &= \varepsilon^2 P_{3jPQ_0Q_1Q_2}^2 n_j v_{P, Q_0Q_1Q_2} + \varepsilon^3 Q_{3jPQ_0Q_1Q_2}^2 n_j w_{,PQ_0Q_1Q_2} = \\ &= (-B_{PQ_0Q_1Q_2}^{(\text{II})} v_{P, Q_0Q_1Q_2} + D_{PQ_0Q_1Q_2} w_{,PQ_0Q_1Q_2}) n_3 = \varepsilon^3 p(x) n_3 \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется вследствие соотношения (1.10) с точностью до $O(\varepsilon^4)$, поскольку

$$-B_{PQ_0Q_1Q_2}^{(\text{II})} v_{P, Q_0Q_1Q_2} + D_{PQ_0Q_1Q_2} w_{,PQ_0Q_1Q_2} = \varepsilon^3 p(x) + O(\varepsilon^4)$$

(уравнения (1.10) есть только нулевое приближение для функций v, w).

Остается получить осредненные уравнения для трех рассмотренных приближений. Для нулевого приближения – это уравнения (1.10), записанные в терминах усилий и моментов. Из (3.1), (3.2), (3.4) следуют уравнения равновесия сил в отсчетной плоскости

$$\begin{aligned} a_{iQ_1PQ_0}^{\xi(0)} v_{P, Q_0Q_1} + \varepsilon b_{iQ_1PQ_0}^{\xi(1)(0)} w_{,PQ_0Q_1} + \varepsilon a_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)} v_{P, Q_0Q_1Q_2} + \varepsilon^2 b_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)(1)} w_{,PQ_0Q_1Q_2} + \\ + \varepsilon^2 a_{iQ_3PQ_0Q_1Q_2}^{\xi(2)} v_{P, Q_0Q_1Q_2Q_3} + \varepsilon^3 b_{iQ_3PQ_0Q_1Q_2}^{\xi(1)(2)} w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3} = 0 \end{aligned}$$

Их можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon A_{iQ_1PQ_0}^{\xi(0)} v_{P, Q_0Q_1} - \varepsilon^2 B_{iQ_1PQ_0}^{\xi(1)(0)} w_{,PQ_0Q_1} + \varepsilon^2 A_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)} v_{P, Q_0Q_1Q_2} - \\ - \varepsilon^3 B_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)(1)} w_{,PQ_0Q_1Q_2} + \\ + \varepsilon^3 A_{iQ_3PQ_0Q_1Q_2}^{\xi(2)} v_{P, Q_0Q_1Q_2Q_3} - \varepsilon^4 B_{iQ_3PQ_0Q_1Q_2}^{\xi(1)(2)} w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

введя коэффициенты $A^{\xi(m)}, B^{\xi(\alpha)m}$ по аналогии с $A^{\xi(0)}, B^{\xi(\alpha)(0)}$. Необходимо еще получить третье уравнение, которое следует из (1.6), (1.7) и (1.3):

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 B_{iQ_1PQ_0}^{\xi(\text{II})(0)} v_{P, Q_0Q_1} + \varepsilon^3 D_{iQ_1PQ_0}^{\xi(0)} w_{,PQ_0Q_1} - \varepsilon^3 B_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(\text{II})(1)} v_{P, Q_0Q_1Q_2} + \\ + \varepsilon^4 A_{iQ_2PQ_0Q_1}^{\xi(1)} w_{,PQ_0Q_1Q_2} - \\ - \varepsilon^4 B_{iQ_3PQ_0Q_1Q_2}^{\xi(\text{II})(2)} v_{P, Q_0Q_1Q_2Q_3} + \varepsilon^5 A_{iQ_3PQ_0Q_1Q_2}^{\xi(2)} w_{,PQ_0Q_1Q_2Q_3} = \varepsilon^3 p(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для решения (3.7), (3.8) может быть применен стандартный прием [1]. Представляя перемещения и прогиб в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{v}^2 + \dots$, $w = w^0 + \varepsilon w^1 + \varepsilon^2 w^2 + \dots$, из (3.7), (3.8) получим рекуррентную последовательность задач для $m = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon A_{IQ_1 P Q_0}^{\xi(0)} v_{P, Q_0 Q_1}^m - \varepsilon^2 B_{IQ_1 P Q_0}^{\xi(I)(0)} w_{P, Q_0 Q_1}^m = \\ & = - \sum_{n=1}^m (\varepsilon A_{IQ_2 P Q_0 \dots Q_n}^{\xi(n)} v_{P, Q_0 Q_1 \dots Q_n}^{m-n} - \varepsilon^2 B_{IQ_2 P Q_0 \dots Q_n}^{\xi(I)(n)} w_{P, Q_0 Q_1 \dots Q_n}^{m-n}) \\ & - \varepsilon^2 B_{IQ_1 P Q_0}^{\xi(II)(0)} v_{P, Q_0 Q_1}^m + \varepsilon^3 D_{IQ_1 P Q_0}^{\xi(0)} w_{P, Q_0 Q_1}^m = \\ & = - \sum_{n=1}^m (\varepsilon^2 B_{IQ_2 P Q_0 \dots Q_n}^{\xi(II)(n)} v_{P, Q_0 Q_1 \dots Q_n}^{m-n} + \varepsilon^3 D_{IQ_2 P Q_0 \dots Q_n}^{\xi(n)} w_{P, Q_0 Q_1 \dots Q_n}^{m-n}) \end{aligned}$$

Функции \mathbf{v}^0 , w^0 находятся из (1.10). Таким образом, построенные приближения в задаче о поперечном изгибе периодической в плане пластины позволяют находить не только основные растягивающие и изгибающие напряжения, но и касательные и поперечное напряжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-08-65489).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победра Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. *Kohn R.V., Vogelius M.* A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. 1984. V. 20. № 4. P. 333–350.
4. *Панасенко Г. П., Резцов М.В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. 1986. Т. 294. № 5. С. 1061–1065.
5. *Levinski T., Telega J.J.* Plates, Laminates and shells. Asymptotic Analysis and Homogenization. Singapore; London: World Scientific, 2000. 739 p.
6. *Муравлева Л.В., Шешенин С.В.* Об осреднении тонкостенных тел // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 129–138.
7. *Шешенин С.В.* Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2006. № 1. С. 47–51.
8. *Jones R.M.* Mechanics of Composite Materials. Philadelphia; L.: Taylor and Francis, 1998. 519 p.
9. *Vasiliev V.V., Morozov E.V.* Mechanics and Analysis of Composite Materials. Oxford: Elsevier, 2001. 412 p.

Москва

Поступила в редакцию
10.08.2006