МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2006

УДК 539.3

© 2006 г. **П.А. БЕЛОВ, А.Г. ГОРШКОВ, С.А. ЛУРЬЕ**

ВАРИАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ НЕГОЛОНОМНЫХ 4D-СРЕД

Для описания моделей неголономных сред использован вариационный подход, основанный на формулировке кинематических связей в исследуемой среде и построении соответствующих вариационных форм с помощью множителей Лагранжа ("кинематический" вариационный принцип).

Для формулировки модели применяется формальное обобщение континуальной модели механики деформируемого твердого тела, при котором вводится в рассмотрение четырехмерное (4D) пространство событий с четырехмерным вектором обобщенных перемещений среды. Время включается в обобщенную четырехмерную систему координат и рассматривается как одна из независимых координат. В качестве кинематических связей предлагается использовать обобщенные соотношения Коши, определяющие обобщенные 4D-деформации по обобщенным 4D-перемещениям. Установлен достаточно общий вид определяющих соотношений для неголономных сред, которые определяются с помощью условий неинтегрируемости возможной работы внутренних силовых факторов. Записано вариационное уравнение для неголономных линейных сред и сформулирована соответствующая краевая (начально-краевая) задача. Рассмотрен частный случай сформулированной модели. В рамках частной модели получено обобщенное уравнение теплопроводности, дана также трактовка гипотез Фурье и Дюамеля–Неймана.

1. Введение. Известно, что вариационные подходы оказываются весьма эффективными при построении моделей сплошных сред [1–5]. Попытки обобщить модели неголономных сред на 4D-пространство событий с использованием вариационных подходов были даны в работах [4, 5]. При этом для описания необратимых процессов в средах с обобщенными свойствами использовался известный вариационный подход, развитый Л.И. Седовым и его учениками [1–5 и др.]. Формально, в вариационном подходе Л.И. Седова списки аргументов (определяющие параметры) в функционалах, соответствующих обратимым процессам, и в линейной вариационной форме, определяющей необратимые процессы, ничем не связаны. Они выбираются, исходя из некоторых физических соображений. Особенность развиваемого в данной работе подхода заключается в том, что списки аргументов в соответствующих функционалах жестко фиксированы выбором кинематических связей.

Отметим, что в данной статье развивается формальное обобщение вариационного метода построения модели среды на случай четырехмерных неголономных сред. При такой постановке время выступает не как параметр, а в качестве равноправной координаты наряду с пространственными координатами. Приведем следующие предварительные соображения. Рассмотрим уравнения движения для плоской динамической задачи термоупругости.

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\rho\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(\mu+\lambda_T)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)-\left(\dfrac{2\mu}{3}+\lambda_T\right)\alpha\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \mu\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\rho\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(\mu+\lambda_T)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)-\left(\dfrac{2\mu}{3}+\lambda_T\right)\alpha\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Осуществим формальную замену переменных, приняв

$$z = it\sqrt{\frac{G}{\rho}},\quad \left(\frac{2\mu}{3}+\lambda_T\right)\alpha T = -(G+\Lambda)\frac{\partial R}{\partial z}-(\lambda-\lambda_T)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+G\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\lambda)\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)+(G+\Lambda)\dfrac{\partial R}{\partial z}\right] = 0 \\ \mu\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+G\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\lambda)\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)+(G+\Lambda)\dfrac{\partial R}{\partial z}\right] = 0 \end{cases}$$

Уравнения движения приобретают вид первых двух уравнений равновесия статической трехмерной задачи теории упругости для среды, трансверсально-изотропной в направлении оси OZ, где новая ось OZ является полностью равноправной осью, хотя, по существу, является нормированной временной осью. Таким образом, время формально становится равноправной координатой по отношению к координатам x и y. При этом происходит и формальное расширение пространства решений. Иными словами, требуется определить расширенное пространство решений в обобщенных перемещениях (U, V, R) и построить дополнительное уравнение "равновесия" в расширенном пространстве. По всей видимости, это уравнение должно иметь отношение к уравнению теплопроводности или баланса мощностей.

Приведенный пример требует отказа от ставшего уже традиционным представления об изотропности сред в пространстве Минковского. В данной работе оно заменяется представлением о трансверсальной изотропности сред в направлении времени t. Отметим, что для необратимых процессов накопленная энтропия в каждой точке тела может служить локальной мерой времени процесса в этой точке. Если использовать такую шкалу времени и применить аналогию с задачами теории упругости, то случай обратимых процессов является здесь "плоской" задачей относительно времени процесса.

"Кинематический" вариационный принцип [7] позволяет формально получить полную корректную математическую модель среды в расширенном пространстве, т.е. сформулировать систему определяющих соотношений и дать формулировку краевой и начальной задач.

2. Кинематические соотношения моделируемой среды. Запишем систему кинематических соотношений и установим соответствующий список аргументов (систему искомых функций) в вариационной формулировке задачи. Для этого включим время процесса в обобщенную систему координат, использующуюся при описании среды. Введем 4D-пространство событий с 4D-вектором обобщенных смещений исследуемой среды. Система координат 4D-пространства определяется пространственными координатами x_1, x_2, x_3 и четвертой координатой x_4. Положим, что в качестве четвертой координаты выступает нормированное время ($x_4 = i\upsilon t$, υ – нормировочный коэффициент, t – время). Положим, что трехмерный вектор перемещений сплошной среды с компонентами $r_i(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит пространству решений механики деформируемых сред, понимаемых в обычном смысле. Это трехмерное пространство решений является гиперплоскостью в четырехмерном пространстве решений. Введем орт N_i, являющийся вектором нормали к такой гиперплоскости. Тогда можно определить и 4D-вектор обобщенных смещений R_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Первые три компоненты вектора обобщенных смещений являются традиционными компонентами трехмерного вектора перемещений исследуемой среды: $r_i = R_j(\delta_{ij} - N_iN_j)$. Четвертая компонента равна проекции 4D-вектора перемещения на ось координат x_4 и определяет некоторое обобщенное смещение: $R_iN_i = i\upsilon R$. Физический смысл обобщенного смещения R пока остается открытым.

Окончательно можно записать следующее представление для компонент 4D-вектора перемещений

$$R_j = r_j + i\upsilon RN_j, \quad r_k = R_j(\delta_{kj} - N_kN_j), \quad r_jN_j = 0 \tag{2.1}$$

Компоненты векторного поля 4D-перемещений R_i выбираются в качестве независимых определяющих параметров модели.

Наряду с векторным полем 4D-перемещений R_i необходимо ввести и тензорное поле 4D-деформаций, компоненты которого являются для рассматриваемой модели зависимыми определяющими параметрами модели. Симметричный тензор обобщенных деформаций ε_{ij} определим по вектору обобщенных 4D-перемещений R_i с помощью обобщенных на 4D-пространство соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \tag{2.2}$$

Представим тензор 4D-деформаций ε_{ij} в виде разложения на "3-тензор" пространственных деформаций, "3-вектор" временных сдвигов s_k (четвертый вектор-столбец $i = 1, 2, 3; j = 4, i \neq 4$ и четвертая вектор-строка $i = 4, j = 1, 2, 3; j \neq 4$), который будем трактовать как обобщенную скорость, и "скаляр" S (последний диагональный элемент в матрице 4D-деформаций $i = 4, j = 4$), который будем трактовать как плотность энтропии

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{nm}\Gamma_{injm} + \theta(\delta_{ij} - N_iN_j)/3 + 2s_kS_{ijk} + SN_iN_j$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}\Gamma_{injm} = \frac{1}{2}\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial r_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial r_k}{\partial x_k}\delta_{ij} = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}[1/2(\delta_{in} - N_iN_n)(\delta_{jm} - N_jN_m) +$$

$$+ 1/2(\delta_{im} - N_iN_m)(\delta_{jn} - N_jN_n) - 1/3(\delta_{nm} - N_nN_m)(\delta_{ij} - N_iN_j)] \tag{2.3}$$

$$\theta = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}(\delta_{nm} - N_nN_m) = \frac{\partial r_k}{\partial x_k}\ (i, j, k = 1, 2, 3), \quad s_k = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}S_{nmk}$$

$$s_k = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}S_{nmk} = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}\left[\frac{1}{2}N_n(\delta_{km} - N_kN_m) + \frac{1}{2}N_m(\delta_{kn} - N_kN_n)\right] = \frac{1}{2i\upsilon}\left(\frac{\partial r_k}{\partial t} - \upsilon^2\frac{\partial R}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2i\upsilon}\upsilon_k$$

$$\Gamma_{injm} = \left[\frac{1}{2}(\delta_{in} - N_iN_n)(\delta_{jm} - N_jN_m) + \frac{1}{2}(\delta_{im} - N_iN_m)(\delta_{jn} - N_jN_n) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}(\delta_{nm} - N_nN_m)(\delta_{ij} - N_iN_j)\right]$$

$$S_{nmk} = \left[\frac{1}{2}N_n(\delta_{km} - N_kN_m) + \frac{1}{2}N_m(\delta_{kn} - N_kN_n)\right], \quad S = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}N_iN_j$$

где S – энтропия, γ_{ij} – "3D-тензор девиатор", θ – амплитуда "шарового 3D-тензора", s_k (или υ_k) – обобщенная скорость.

Из (2.3) можно выделить 3D-тензор пространственных деформаций e_{ij} в трехмерном пространстве с системой координат x_1, x_2, x_3 в виде разложения на обычный тензор девиатор γ_{ij} и шаровой тензор в трехмерном материальном пространстве:

$$e_{ij} = \gamma_{nm}\Gamma_{injm} + \theta(\delta_{ij} - N_iN_j)/3 \tag{2.4}$$

Здесь γ_{ij} и $\theta(\delta_{ij} - N_iN_j)$ – обычные трехмерные компоненты тензора девиатора и шарового тензора деформаций в трехмерном пространстве. Отметим, что соотношения (2.4), определяющие тензор трехмерных пространственных деформаций e_{ij}, записаны в исходной четырехмерной системе координат.

Матрица обобщенных деформаций в пространстве событий с системой координат x_1, x_2, x_3 и x_4, имеет следующий вид (см. (2.3), (2.4)):

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & s_1 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & s_2 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}+\theta/3 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & s_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}+\theta/3 & \gamma_{23} & s_2 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}+\theta/3 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & S \end{pmatrix}$$

Отметим, что "трехмерные тензоры" γ_{ij} и $\theta(\delta_{ij} - N_iN_j)$, "3-вектор" s_k и "скаляр" S в соотношениях (2.3) и (2.4) являются соответственно тензорами, вектором и скаляром только для преобразований координат в гиперплоскости изотропии. При произвольных преобразованиях координат они ведут себя как соответствующие компоненты единого объекта – симметричного 4D-тензора второго ранга.

3. Вариационная модель обобщенной среды. Используется "кинематический" вариационный подход, в соответствии с которым сначала определяются кинематические связи в среде, устанавливается система независимых аргументов (искомых функций). Затем постулируется возможная работа внутренних сил, как возможная работа реактивных силовых факторов на свойственных среде кинематических связях. Возможная работа внутренних сил представляется в виде линейной формы вариаций своих аргументов. В общем случае эта форма не интегрируема. Однако ее можно разделить на интегрируемую и не интегрируемую части. Интегрируемая часть соответствует обратимым процессам и может быть представлена как вариация потенциальной энергии. Для линейных сред потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов. Неинтегрируемая часть соответствует необратимым процессам диссипации и по определению для них не существует потенциальной энергии.

Используя "кинематический" вариационный принцип, запишем:

$$\delta A - \delta\overline{U} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь $\delta\overline{U}$ – возможная работа сил реакции кинематических связей, δA – возможная работа внешних 4D-сил, которые будут определены далее.

Полагаем, что единственными кинематическими связями являются соотношения Коши (2.2), обобщенные на 4D-пространство событий. Запишем выражение возможной работы внутренних сил, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$\delta\overline{U} = \int_V \sigma_{ij}\delta\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)dV$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – силы реакции, обеспечивающие выполнение связей (2.2). Интеграл берется по 4D-объему V. Преобразуем выражение для возможной работы внутренних сил к виду линейной вариационной формы и установим систему ее свободных аргументов. Взяв в выражении $\delta\overline{U}$ последние два произведения по частям, найдем:

$$\delta\overline{U} = \int_V \left(\sigma_{ji}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta R_i\right)dV - \oint \sigma_{ij}n_j\delta R_i dF$$

Преобразуем эту линейную вариационную форму с учетом (2.1) и (2.3):

$$\delta\bar{U} = \int_V \left\{ \sigma_{ij}\Gamma_{injm}\delta\gamma_{nm} + \frac{1}{3}\sigma_{ij}(\delta_{ij} - N_iN_j)\delta\theta + \frac{1}{(i\upsilon)}\sigma_{ij}S_{ijk}\delta\upsilon_k + \sigma_{ij}N_iN_j\delta S + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta r_i + (i\upsilon)\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}N_i\delta R \right\} dV -$$

$$-\oint\{\sigma_{ij}n_j\delta R_k(\delta_{ki} - n_kn_i - N_kN_i) + \sigma_{ij}n_in_j\delta(R_kn_k) + (i\upsilon)\sigma_{ij}N_in_j\delta R\}dF$$

Записанное равенство определяет работу "обобщенных силовых факторов" на соответствующих вариациях "обобщенных перемещений". Оно дает определение действительных силовых факторов в 4D среде. Действительно, на вариациях компонентов "3D-тензора"-девиатора механических деформаций $\delta\gamma_{ij}$ совершают работу компоненты "3D-тензора"-девиатора классических напряжений τ_{ij} ($\tau_{nm} = \sigma_{ij}\Gamma_{injm}$); на вариации изменения объема $\delta\theta$ в трехмерном пространстве совершает работу давление p, ($p = \sigma_{ij}(\delta_{ij} - N_iN_j)/3$); на вариации "обобщенных 3D-скоростей" $\delta\upsilon_k$ совершает работу "обобщенный 3D-вектор импульсов" p_k ($p_k = \sigma_{ij}S_{ijk}/(i\upsilon)$); на вариации энтропии δS совершает работу изменение абсолютной температуры T ($T = \sigma_{ij}N_iN_j \equiv \sigma_{44}$); на вариации "3D-вектора" перемещений δr_k совершает работу "3D-вектор" диссипативных сил σ_i: $\sigma_i(\delta_{ik} - N_iN_k) \equiv \partial\sigma_{ij}/\partial x_j(\delta_{ik} - N_iN_k)$ (аналог реакции винклеровских пружинок); на вариации четвертой компоненты вектора перемещений δR совершает работу четвертая компонента 4D-вектора сил σ_i – "скаляр" $\sigma_iN_i \equiv \partial\sigma_{ij}/\partial x_jN_i$. На гиперповерхности F на вариации вектора обобщенных перемещений δR_i работа совершается вектором обобщенных напряжений, $f_i = \sigma_{ij}n_j$.

Внешняя работа δA совершается на вариации вектора обобщенных перемещений δR_i как распределенными в 4D-объеме обобщенными внешними воздействиями, определяемыми вектором P_i^V, так и обобщенными силами P_i^F, заданными на гиперповерхности F. Имеем:

$$\tau_{nm} = \sigma_{ij}\Gamma_{injm}, \quad p = \sigma_{ij}(\delta_{ij} - N_iN_j)/3, \quad \sigma_i = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$$

$$p_k = \sigma_{ij}S_{ijk}/(i\upsilon), \quad T = \sigma_{ij}N_iN_j, \quad f_i = \sigma_{ij}n_j$$

Возможная работа внутренних сил записывается в виде линейной вариационной формы:

$$\delta\bar{U} = \delta U_V + \delta U_F = \int_V [\tau_{ij}\delta\gamma_{ij} + p\delta\theta + p_k\delta\upsilon_k + T\delta S + \sigma_i\delta R_i]dV + \oint_F f_i\delta R_i dF \qquad (3.2)$$

В результате можно получить следующее выражение, определяющее вариационную формулировку задачи:

$$\delta A - (\delta U_V + \delta U_F) = \delta A - \left[\int_V \{\tau_{ij}\delta\gamma_{ij} + p\delta\theta + p_k\delta\upsilon_k + T\delta S + \sigma_i\delta R_i\}dV + \oint_F f_i\delta R_i dF\right] = 0 \qquad (3.3)$$

Вариационная линейная форма (3.2) в общем виде представима объемной и поверхностной плотностями, являющимися соответственно функциями 14 обобщенных переменных γ_{nm}, s_k, r_k, S, θ, R и 4 обобщенных поверхностных переменных $r_k(\delta_{ki} - n_kn_i)$, r_kn_k, R. Эта вариация может быть как интегрируемой, так и не интегрируемой.

Рассмотрим сначала случай, когда вариационная форма (3.2) интегрируема. Тогда существует функционал $U = \int\limits_V U_V\,dV + \oint\limits_F U_F\,dF$ такой, что:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \gamma_{ij}}, \quad p = \frac{\partial U_V}{\partial \theta}, \quad p_k = \frac{\partial U_V}{\partial \upsilon_k}, \quad T = \frac{\partial U_V}{\partial S}, \quad \sigma_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_i}, \quad f_i = \frac{\partial U_F}{\partial R_i} \tag{3.4}$$

Выражение $\partial U_F/\partial R_i$ в последнем равенстве может быть переписано в терминах пространственных компонент вектора перемещений r_k в касательной плоскости к поверхности тела и по нормали к ней и в терминах четвертой компоненты обобщенных смещений

$$\frac{\partial U_F}{\partial r_k(\delta_{ki} - n_k n_i)} = \sigma_{qj} n_j(\delta_{qi} - n_q n_i), \qquad \frac{\partial U_F}{\partial r_k n_k} = \sigma_{ij} n_i n_j, \qquad \frac{\partial U_F}{\partial R} = i\upsilon\sigma_{ij} N_i n_j$$

При заданных плотностях энергии U_V, U_F соотношениями (3.4) вводится система определяющих уравнений среды для консервативных составляющих силовых факторов. Соотношения (3.4) дают условия существования обратимых процессов и обобщаются на четырехмерные кинематические состояния формулами Грина. Соответственно, "кинематический" вариационный принцип в этом случае (для обратимых процессов) сводится к принципу Лагранжа:

$$\delta L = \delta(A - U) = 0, \quad U = \int\limits_V U_V(\gamma_{ij}, \theta, \upsilon_k, S, r_k, R)dV + \oint U_F(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i), r_k n_k, R)dF$$

Здесь $L = A - U$ – лагранжиан, а U – потенциальная энергия.

Более интересным является случай необратимых процессов. В этом случае вариационная форма неинтегрируема, и, следовательно, множители при вариациях определяющих параметров в линейной форме $\delta\overline{U}$ не выражаются через производные от некоторого потенциала. Они являются только некоторыми непрерывными функциями определяющих параметров. Поэтому в общем случае можно записать:

$$\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \delta\int\limits_V U_V(\gamma_{nm}, s_k, r_k, s, \theta, R)dV + \delta\oint\limits_F U_F(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i), r_k n_k, R)dF + \\ &+ \int\limits_V\left[A_{ij}(s_k, r_k, s, \theta, R)\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + A_i(s_k, r_k, s, \theta, R)\right]dV + \oint\limits_F B_i(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i), r_k n_k, R)\delta R_i dF\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $A_{ij} = A_{ji}$ – диссипативные напряжения, A_i – диссипативные "объемные силы" и B_i – поверхностные диссипативные силы.

Разделяя интегрируемую и неинтегрируемую части в линейной форме $\delta\overline{U}$, равенство (3.5) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int\limits_V\left[\frac{\partial U_V}{\partial(\partial R_i/\partial x_j)}\delta\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial U_V}{\partial R_i}\delta(R_i)\right]dV + \int\limits_F \frac{\partial U_F}{\partial(R_i)}\delta(R_i)dF + \\ &+ \int\limits_V\left[A_{ij}\delta\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right) + A_i\delta(R_i)\right]dV + \int\limits_F B_i\delta(R_i)dF\end{aligned}$$

Тогда вместо (3.4) можно записать следующие определяющие соотношения для обобщенных напряжений и обобщенных сил в рассматриваемом пространственновременном континууме V:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial(R_i/\partial x_j)} + A_{ij}, \quad \sigma_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_i} + A_i \tag{3.6}$$

Определяющие уравнения на гиперповерхности F можно записать в виде аналогичном (3.6):

$$f_i = \partial U_F/\partial R_i + B_i$$

Для необратимых процессов:

$$A_{ij} \neq 0, \quad A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0 \tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) являются условиями неинтегрируемости линейной формы $\delta\overline{U}$.

Вариационное уравнение, соответствующее "кинематическому" вариационному принципу (3.1), (3.5) для описания необратимых процессов, может быть тогда записано в виде, совпадающим с вариационным уравнением Л.И. Седова [6]:

$$\delta I + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{3.8}$$

где $I = A_V - U_V$ – разность работы внешних сил и потенциальной энергии деформации (обратимая часть процесса), полученная интегрированием объемной плотности по объему пространства событий V, занимаемого средой; $W = A_F - U_F$ – разность работы внешних сил и потенциальной энергии деформации, полученная путем интегрирования "гиперповерхностной" плотности по гиперповерхности F, ограничивающей объем пространства событий; δW^* – линейная форма относительно вариаций определяющих параметров, которая учитывает необратимые процессы. Она может содержать как интегралы по объему, так и по гиперповерхности пространства событий, занимаемого средой.

Развиваемый в данной работе "кинематический" вариационный принцип отличается от вариационного подхода Л.И. Седова тем, что списки аргументов в δI, δW, δW^* жестко фиксированы выбором кинематических связей (2.2). Поэтому, например, если $I = I(\gamma_{nm}, s_k, r_k, s, \theta, R)$, то W не может зависеть от нормальных производных 4D-вектора перемещений $n_j\partial R_i/\partial x_j$. Эта определенность в выборе аргументов функционалов является достоинством развиваемого в данной работе "кинематического" вариационного принципа (3.1), (3.5). Запишем вариационное равенство, записанное в виде уравнения Л.И. Седова, в развернутой форме:

$$\delta A - \delta\overline{U} = \delta I + \delta W - \delta W^* = \delta\int_V [P_i^V R_i - U_V(\gamma_{nm}, s_k, r_k, s, \theta; R)]dV +$$

$$+ \delta\oint_F [P_i^F R_i - U_F(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i), r_k n_k, R)]dF -$$

$$- \int_V \left[A_{ij}(\gamma_{nm}, s_k, r_k, s, \theta, R)\delta\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right) + A_i(\gamma_{nm}, s_k, r_k, s, \theta, R)\delta(R_i)\right]dV -$$

$$- \oint_F B_i(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i), r_k n_k, R)\delta(R_i)dF$$

Здесь $I = \int\limits_V [P_i^V R_i - U_V(\gamma_{nm}, s_k, r_k, s, \theta, R)]dV$ – объемный функционал для обратимых процессов, $W = \oint\limits_F [P_i^F R_i - U_F(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i); r_k n_k; R)]dF$ – гиперповерхностный функционал для обратимых процессов, δW^* – линейная вариационная форма, учитывающая необратимые процессы:

$$\delta W^* = \int\limits_V [A_{ij}(s_k, r_k, s, \theta, R)\delta(R_i/\partial x_i) + A_i(s_k, r_k, s, \theta, R)\delta(R_i)]dV + \oint\limits_F B_i[r_k(\delta_{ki} - n_k n_i), r_k n_k, R]\delta(R_i)dF \tag{3.9}$$

Напомним, что по определению, величина δW^* является неинтегрируемым выражением и может быть записана лишь как линейная форма относительно вариаций своих аргументов.

Используем в дальнейшем символьную форму записи при анализе общей структуры вариационной формы (3.5), которая позволяет несколько упростить исследуемые выражения. Для этого введем мульти-индексы для объемной и поверхностной частей линейной формы (3.5). Положим, что мульти-индексы a, b и c пробегают значения от 1 до 14 (по числу определяющих параметров γ_{nm}, s_k, r_k, s, θ, R в объемной части линейной формы (3.5)), а мульти-индексы d, f и g пробегают все значения от 1 до 4 (по числу определяющих параметров $r_k(\delta_{ki} - n_k n_i)$, $r_k n_k$, R в гиперповерхностной части линейной формы (3.5)). Тогда вариационная форма (3.5) и запишется в следующем виде:

$$\delta \bar{U} = \int\limits_V P_a(Q_b)\delta Q_a dV + \oint\limits_F p_d(q_f)\delta q_d dF \tag{3.10}$$

Условия неинтегрируемости формы (3.10) будут иметь вид:

$$\frac{\partial P_a}{\partial Q_b} - \frac{\partial P_b}{\partial Q_a} = 2\bar{C}_{ab}(Q_c), \quad \frac{\partial p_d}{\partial q_f} - \frac{\partial p_f}{\partial q_d} = 2\bar{D}_{df}(q_g), \quad \bar{C}_{ba} = -\bar{C}_{ab}, \quad \bar{D}_{fd} = -\bar{D}_{df} \tag{3.11}$$

Таким образом, для необратимых процессов параметры $\bar{C}_{ab}$ в определяющих соотношениях несимметричны по мультииндексам, в то время как для обратимых процессов аналогичные параметры $C_{ab}(Q_c)$ (тензор упругих модулей) являются, очевидно, симметричными при перестановке мультииндексов. Например, форма $\delta U_{\theta s} = \theta\delta S + S\delta\theta$ интегрируема, так как

$$\theta = \frac{\partial U_{\theta S}}{\partial S}, \quad S = \frac{\partial U_{\theta S}}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U_{\theta S}}{\partial S}\right) - \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U_{\theta S}}{\partial \theta}\right) = 0$$

Следовательно, $\theta\delta S + S\delta\theta = \delta(\theta S) = \delta U_{\theta S}$. С другой стороны, если имеется форма $\theta\delta S - S\delta\theta$, то для нее нельзя построить потенциал и, следовательно, такая форма является неинтегрируемой.

Равенства (3.11) можно переписать с учетом интегрируемых составляющих

$$\partial P_a/\partial Q_b = C_{ab}(Q_c) + \bar{C}_{ab}(Q_c), \quad \partial p_d/\partial q_f = D_{df}(q_g) + \bar{D}_{df}(q_g)$$

где $C_{ab} = C_{ba}$ и $D_{fd} = D_{df}$ – тензоры термомеханических свойств голономной части. Нетрудно видеть, что последние соотношения эквивалентны равенствам (3.11). Действительно, для обратимых процессов следует принять $\bar{C}_{ba} = 0$. Тогда равенства (3.11) переходят в условия интегрируемости линейной формы $\delta\bar{U}$. Учет величин $\bar{C}_{ba}$ и $\bar{D}_{fd}$ сразу дает уравнения неинтегрируемости линейной формы (3.10).

В соответствии с общей процедурой условия неинтегрируемости (3.11) должны использоваться как связи при формулировке линейной формы $\delta\bar{U}$ для необратимых процессов. Однако для физически линейных моделей соотношения (3.11) могут быть проинтегрированы в явной форме и использованы для формулировки линейной формы $\delta\bar{U}$ для неголономных сред непосредственно. Действительно, для физически линейных моделей тензоры термомеханических свойств C_{ab}, $\bar{C}_{ab}$ и D_{df}, $\bar{D}_{df}$ не зависят от определяющих параметров Q_c и q_g. Поэтому путем прямого интегрирования (3.11) можно получить:

$$P_a = (C_{ab} + \bar{C}_{ab})Q_b, \quad p_d = (D_{df} + \bar{D}_{df})q_f \tag{3.12}$$

Перепишем (3.10) с учетом (3.12):

$$\delta\bar{U} = \int P_a \delta Q_a dV + \oint p_d \delta q_d dF = \int (C_{ab} + \bar{C}_{ab}) Q_b \delta Q_a dV + \oint (D_{df} + \bar{D}_{df}) q_f \delta q_d dF =$$
$$= \delta \int \frac{1}{2} C_{ab} Q_a Q_b dV + \delta \oint \frac{1}{2} D_{df} q_d q_f dF + \int \left[\frac{1}{2} \bar{C}_{ab} (Q_b \delta Q_a - Q_a \delta Q_b) \right] dV +$$
$$+ \oint \left[\frac{1}{2} \bar{D}_{df} (q_f \delta q_d - q_d \delta q_f) \right] dF$$

Сравнивая последнее равенство с вариационным уравнением Л.И. Седова для физически линейных неголономных сред, в которых реализуются кинематические связи, выраженные соотношениями Коши (2.2), получим общий вид функционалов в основном вариационном равенстве (3.8):

$$\begin{aligned} I &= \int_V [P_i^V R_i - C_{ab} Q_a Q_b / 2] dV, \\ W &= \oint_F [P_i^F R_i - D_{df} q_d q_f / 2] dF \\ \delta W^* &= \int [\bar{C}_{ab} (Q_b \delta Q_a - Q_a \delta Q_b)/2] dV + \oint [\bar{D}_{df} (q_f \delta q_d - q_d \delta q_f)/2] dF \end{aligned} \tag{3.13}$$

Заметим, что общая форма записи работы линейных диссипативных сил (3.13) показывает, что для описания работы диссипации требуется как минимум два объекта одинаковой тензорной размерности. Так, например, для векторов v_k и r_k можно записать только один вариант работы диссипации: $v_k \delta r_k - r_k \delta v_k$; для скалярных величин S, θ, R имеют место три варианта работы диссипативных сил: $S\delta\theta - \theta\delta S$, $\theta\delta R - R\delta\theta$ и $S\delta R - R\delta S$. Для 3-тензора второго ранга γ_{nm} нет соответствующего "диссипативного партнера", поэтому нет и соответствующей работы диссипации. Именно поэтому в выражении для δW^* (3.9) в списках аргументов силовых факторов A_{ij} и A_i отсутствует тензорный объект γ_{nm}.

Таким образом, соотношения (3.11), (3.13) дают обобщенное вариационное описание линейных моделей сред с диссипацией и в целом определяют общий алгоритм построения диссипативных моделей сред. Далее рассматривается частная модель диссипативной среды.

4. "Динамическая термоупругость с диссипацией". Рассмотрим один из возможных вариантов моделей сред с диссипацией. Покажем, что эта частная модель сред дает обобщение классической термодинамики линейных необратимых процессов.

В дальнейшем, для упрощения анализа моделей неголономных сред введем некоторые предположения. Во-первых, положим, что плотность потенциальной энергии деформации для гиперповерхности F равна нулю. Считаем, что и для диссипативной части соответствующая гиперповерхностная плотность равна нулю. Этого можно добиться, положив все коэффициенты D_{df} и $\overline{D}_{df}$ (физические константы) в U_F и W_F^* равными нулю. Во-вторых, положим, что равны нулю коэффициенты при всех билинейных составляющих, включающих вектор 4D-перемещений R_i. Следовательно, для физически обратимых линейных процессов плотность энергии U_V является квадратичной формой следующих обобщенных переменных Q_a: γ_{nm}, υ_k, S, θ, записанной с учетом тензорной размерности последних.

Запишем плотность энергии U_V, вводя коэффициенты Ламе в качестве модулей упругости в квадратичной форме для U_V в тех слагаемых, которые определяют потенциальную энергию деформации трехмерного изотропного упругого тела: $2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij}$ и $(2\mu/3+\lambda)\theta^2$. Также будем считать, что коэффициентом при динамическом слагаемом $\upsilon_k\upsilon_k$, содержащем классические динамические составляющие $\dot{r}_k = \partial r_k/\partial t$ должна быть плотность среды $-\rho$. Отметим, слагаемое $-\rho\upsilon_k\upsilon_k$ определяет кинетическую энергию и входит в лагранжиан в трехмерной постановке со знаком, противоположным потенциальной энергии. Действительно, пользуясь формулой Грина (3.4), имеем для импульса консервативной системы $p_k = \partial U_V/\partial\upsilon_k = -\rho\upsilon_k$.

В результате, для линейно упругих моделей сред с кинематическими связями (2.2) имеют место следующие определяющие уравнения в 4-объеме:

$$U_V = \frac{1}{2}C_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} = \frac{1}{2}\left[2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \left(\frac{2\mu}{3}+\lambda\right)\theta^2 - 2\Lambda\theta S + ES^2 - \rho\upsilon_k\upsilon_k\right] \tag{4.1}$$

Тензорный вид потенциальной энергии (первое равенство (4.1)) совпадает с потенциальной энергией стационарной бестемпературной обратимой теории упругости. Плотностью потенциальной энергии (4.1) полностью определяется консервативная часть в определяющих соотношениях модели среды (3.6).

Для физически линейных необратимых процессов неинтегрируемая форма δW^* с учетом соотношений (3.7) определяет общий вид неголономных напряжений A_{ij} и сил A_i в 4D-пространстве. Для объемной плотности линейной формы δW^* после некоторых преобразований и группировки подобных слагаемых, получим с учетом (3.11):

$$\begin{aligned}\delta W^* &= \int[f(\upsilon_k\delta r_k - r_k\delta\upsilon_k) + \overline{E}_1(S\delta R - R\delta S) + \overline{\Lambda}_1(\theta\delta R - R\delta\theta) + \overline{\Lambda}(\theta\delta S - S\delta\theta)]dV = \\ &= \int[A_k\delta(R_k) + A_{nm}\delta(\partial R_n/\partial x_m)]dV\end{aligned} \tag{4.2}$$

Отметим, что в (4.2) множителями при δR_k являются диссипативные силы A_k, а множителями при $\delta(\partial R_n/\partial x_m)$ диссипативные напряжения A_{nm}:

$$\begin{aligned}A_k &= f\upsilon_k + (\overline{E}_1 S + \overline{\Lambda}_1\theta)N_k/(i\upsilon) = \overline{C}_{(k)(nm)}\partial R_n/\partial x_m \\ A_{nm} &= [-fr_k 2(i\upsilon)S_{nmk} + (-\overline{E}_1 R + \overline{\Lambda}\theta)N_n N_m - (\overline{\Lambda}S + \overline{\Lambda}_1 R)(\delta_{nm} - N_n N_m)] = \\ &= \overline{C}_{(nm)(k)}R_k + \overline{C}_{(nm)(pq)}\partial R_p/\partial x_q\end{aligned} \tag{4.3}$$

В полном соответствии со свойством физических постоянных неголономных систем (свойство антисимметрии по мультииндексам) имеем

$$\overline{C}_{(k)(nm)} = -\overline{C}_{(nm)(k)}, \quad \overline{C}_{(nm)(pq)} = -\overline{C}_{(pq)(nm)}$$

Окончательно с учетом (4.1) и (4.2) определяющие соотношения для напряжений и сил можно записать в следующем виде (3.6):

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} = \partial U_V/\partial\gamma_{ij} = 2\mu\gamma_{ij}, \quad p_k = \rho\upsilon_k - fr_k, \quad \sigma_k = f\upsilon_k + (\overline{E}_1\dot{R} + \overline{\Lambda}_1\theta)N_k/(i\upsilon) \\ &p = (2\mu/3 + \lambda)\theta - (\Lambda + \overline{\Lambda})\dot{R} - \overline{\Lambda}_1 R, \quad T = -(\Lambda - \overline{\Lambda})\theta + E\dot{R} - \overline{E}_1 R \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для полного математического анализа модели следует получить систему разрешающих уравнений и систему естественных краевых условий (начально-краевых условий). Следуя "кинематическому" вариационному принципу (3.1), (3.5):

$$\delta A - \delta\int_V U_V dV - \delta W^* = 0$$

получим в общем случае следующую систему основных уравнений и граничных условий:

$$\int_V\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_i + P_i^V\right)\delta(R_i)dV + \oint_F(P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta(R_i)dF = 0 \tag{4.5}$$

Здесь n_j – вектор нормали к гиперповерхности F, R_i – 4-вектор перемещений, P_i^V – 4D-вектор объемных сил, P_i^F – 4D-вектор гиперповерхностных сил. Отметим, что в первых трех уравнениях равновесия в вариационном равенстве (4.5), соответствующих трехмерным уравнениям движения сред, величины σ_i определяются из (4.4) диссипативными свойствами среды f, $\overline{E}_1$, $\overline{\Lambda}_1$ и равны нулю в случае теории упругости для консервативных сред.

Подынтегральное выражение в первом слагаемом равенства (4.5) дает связную систему динамических уравнений, включающую систему 3-х уравнений динамики сплошной среды при необратимом деформировании и обобщенное уравнение теплопроводности. Второй интеграл в уравнении (4.5) может быть записан через обобщенные перемещения с учетом определяющих уравнений. Вариационная постановка позволяет получить естественные граничные условия и начальные условия исследуемой проблемы. Действительно, представим гиперповерхностный интеграл в виде суммы интегралов: первый по поверхности гиперцилиндра ($t_1 \le t \le t_2$), расположенного вдоль оси времени, и второй по гиперплоскостям, соответствующим начальному ($t = t_1$) и конечному ($t = t_2$) времени. Такое разделение выделяет явно пространственную краевую задачу и краевую задачу по времени. При этом поверхность гиперцилиндра совпадает с поверхностью рассматриваемого трехмерного тела F_2 в реальном трехмерном пространстве координат во всем интервале времени $t_1 \le t \le t_2$:

$$\oiint\int(P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF_2 dt$$

а гиперплоскости второго интеграла являются интегралами по объему рассматриваемого трехмерного тела V_3 в трехмерном пространстве координат:

$$\iiint(P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dV_3\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

в начальный ($t = t_1$) и конечный ($t = t_2$) моменты времени.

Заметим, что в отношении времени t используемый подход дает краевую задачу, а не задачу Коши. В этом есть определенное преимущество, т.к. краевая задача является корректной, в отличие от задачи Коши.

5. Анализ модели "динамической термоупругости с диссипацией". Рассмотрим вариационную постановку для изучаемой модели

$$\delta A - \delta\bar{U} = \delta A - \left[\int_V \{\tau_{ij}\delta\gamma_{ij} + p\delta\theta - p_k\delta\upsilon_k + T\delta S + \sigma_i\delta R_i\}dV\right] = 0 \tag{5.1}$$

Дадим анализ частной модели среды ("динамической термоупругости" с диссипацией), с определяющими соотношениями (4.4) с точки зрения некоторых фундаментальных положений механики и термодинамики:

(*a*). Покажем, что вариационная постановка изучаемой модели не противоречит Первому Закону Термодинамики. Рассмотрим выражение возможной работы внутренних силовых факторов для записанного вариационного уравнения (5.1). Первые два слагаемых в выражении для плотности возможной работы представляют собой в точности возможную работу механических напряжений на деформациях среды, рассматриваемой в трехмерном представлении $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Третье слагаемое в (5.1) можно трактовать как работу $p_i\delta\upsilon_i$ обобщенного импульса для неконсервативной системы

$$p_i = -\frac{\partial U_V}{\partial \upsilon_i} + \frac{1}{2}A_{qj}[(\delta_{qi} - N_qN_i)N_j - (\delta_{ji} - N_jN_i)N_q] = \rho\left(\dot{r}_i - \upsilon^2\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) - f r_i$$

на вариации обобщенных скоростей $\upsilon_i = (\dot{r}_i - \upsilon^2\partial R/\partial x_i)$. Четвертое слагаемое может быть записано в виде $\sigma_{44}\delta\varepsilon_{44}$. Сравним первые два слагаемых и четвертое слагаемое с правой частью первого закона термодинамики $dU = \sigma_{ij}de_{ij} + TdS$ (U – плотность внутренней энергии системы, T – абсолютная температура, S – плотность энтропии [8]). Такое сравнение позволяет дать физическую интерпретацию компоненте тензора "деформаций" $\varepsilon_{44} = \partial R_n/\partial x_m N_n N_m$ и компоненте тензора "напряжений" σ_{44} ($\sigma_{44} = \sigma_{ij}N_iN_j$). Действительно, можно принять, что выражение $\sigma_{ij}N_iN_j\delta(\partial R_n/\partial x_m)N_nN_m = \sigma_{44}\delta\varepsilon_{44} = T\delta S$ представляет изменение внутренней энергии, связанное с обратимыми тепловыми процессами. Тогда σ_{44} имеет смысл абсолютной температуры, $\dot{R}$ – энтропии, а $R = \int_{t_0}^{t}\dot{R}\,dt$ – накопленной энтропии ($\dot{R} = \partial R/\partial t$).

Таким образом, предлагаемая модель содержит Первый Закон Термодинамики как частный случай.

(*в*). Учитывая уравнения равновесия в форме (4.5) легко установить справедливость обобщенной теоремы Клапейрона:

$$2U_V = 2U = \iiiint\left[\sigma_{ij}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \sigma_i R_i\right]dV = \iiiint P_i^V R_i dV + \oiiint P_i^F R_i dF = A$$

(*c*). Покажем, что вариационная постановка изучаемой модели не противоречит Второму Закону Термодинамики. Используя обобщенный закон Гука (4.1), (4.2), (4.4) и теорему Клапейрона получаем следующее неравенство:

$$\int_V [f(\upsilon_k\delta r_k - r_k\delta\upsilon_k) + \bar{E}_1(S\delta R - R\delta S) + \bar{\Lambda}_1(\theta\delta R - R\delta\theta) + \bar{\Lambda}(\theta\delta S - S\delta\theta)]dV =$$

$$= \delta(A - U) = \frac{1}{2}\delta A \ge 0$$

где δA – возможная работа внешних 4D-сил. Отсюда сразу следует $\delta W^* \geq 0$. Следовательно, в рамках предложенной модели необратимые процессы протекают с положительной диссипацией, и имеет место Второй Закон Термодинамики.

(*e*). Дадим трактовку четвертых компонент векторов внешних сил и перемещений. Рассмотрим работу внешних 4D-сил на 4D-перемещениях.

$$\begin{aligned} A &= \iiiint P_i^V R_i dV + \oiiint P_i^F R_i dF = \\ &= \iiiint P_i^V(\delta_{ik} - N_i N_j) R_j(\delta_{jk} - N_j N_k) dV + \oiiint P_i^F(\delta_{ik} - N_i N_j) R_j(\delta_{jk} - N_j N_k) dF + \\ &+ \iiiint [(i\upsilon) P_i^V N_i)(R_j N_j/(i\upsilon)] dV + \oiiint [(i\upsilon) P_i^F N_i)(R_j N_j/(i\upsilon)] dF = \\ &= [\iiiint P_k^{V_3} r_k dV + \oiiint P_k^{F_3} r_k dF] + [\iiiint w^V R dV + \oiiint w^F R dF] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь введены следующие обозначения для проекций: $P_k^{V_3} = P_i^V(\delta_{ik} - N_i N_j)$ – пространственная проекция внешних объемных 4D-сил P_i^V; $w^V = P_i^V N_i/(i\upsilon)$ – временная проекция внешних объемных 4D-сил P_i^V (объемная плотность мощностей), $P_k^{F_3} = P_i^F(\delta_{ik} - N_i N_j)$ – пространственная проекция внешних гиперповерхностных 4D-сил P_i^F, $w^F = P_i^F N_i/(i\upsilon)$ – временная проекция внешних гиперповерхностных 4D-сил P_i^F (гиперповерхностная плотность мощностей).

Рассмотрим адиабатический процесс. В этом случае изменение энтропии $\partial S/\partial t = 0$, следовательно, $S = S(x, y, z)$. Интегрируя в произвольной точке энтропию по физическому равномерному времени t, получим явную связь локального времени процесса R и физического равномерного времени t: $R = S(x, y, z)(t - t_0)$. Этот частный случай дает возможность трактовать $R = R(x, y, z, t)$ как собственное время процесса в точке. Отметим, что это собственное время процесса хоть и течет равномерно (пропорционально физическому равномерному времени $(t - t_0)$), но темп собственного времени меняется от точки к точке, что отражает множитель $S(x, y, z)$.

Для необратимых процессов энтропия S – произвольная функция координат и времени. Поэтому для таких процессов собственное время не только различно от точки к точке, но и течет уже неравномерно:

$$\begin{aligned} S &= S(x, y, z, 0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial S(x, y, z, 0)}{\partial t}(t - t_0) + \ldots, \\ R &= S(x, y, z, 0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}\frac{\partial S(x, y, z, 0)}{\partial t}(t - t_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов P_i^V и R_i. С учетом введенных определений четвертых компонент произведения $w^V S(x, y, z)$, $w^F S(x, y, z)$ трактуются как мощности внешних источников тепла, а произведения $w^V S(x, y, z)(t - t_0)$, $w^F S(x, y, z)(t - t_0)$ как выделенная ими за период физического времени $(t - t_0)$ тепловая энергия. Заметим, что в произвольной точке среды постоянные с точки зрения внешнего наблюдателя мощности будут разными, зависящими от координат точки, в которой идет процесс, за счет множителя $S(x, y, z)$.

В общем случае, когда собственное время процесса R является произвольной функцией физического времени (диссипативные процессы), произведения $w^V R$, $w^F R$ в подынтегральных выражениях (23) трактуются как плотности тепловых энергий.

(f). Покажем, что модель динамической термоупругости позволяет дать формальное обоснование гипотезе Фурье. Разобьем гиперповерхность на гиперцилиндр ($t_1 \le t \le t_2$) и две гиперплоскости ("временных донышка"): $t = t_1$, $t = t_2$. Тогда

$$\oiiint dF = \iiint dF_2 dt + \oiint\!\!\int dV_3 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}$$

Введем обозначения пространственной и временной проекции гиперповерхностных 4D-сил P_i^F отдельно на гиперцилиндре и гиперплоскостях $t = t_1$, $t = t_2$:

$$\oiiint P_i^F R_i dF = \oiiint P_k^{F_3} r_k dF + \oiiint w^F R dF =$$

$$= [\oiint\!\!\int P_k^{F_2} r_k dF_2 dt + \iiint P_k^{F_1} r_k dV_3 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}] + [\oiint\!\!\int w^{F_2} R dF_2 dt + \iiint w^F R dV_3 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}]$$

$$P_k^{F_3} = \begin{cases} P_k^{F_2} \text{ на гиперцилиндре } (t_1 \le t \le t_2) \\ P_k^{F_1} \text{ на гиперплоскости } (t = t_1,\ t = t_2) \end{cases};$$

$$w^F = \begin{cases} w^{F_2} \text{ на гиперцилиндре } (t_1 \le t \le t_2) \\ w^{F_1} \text{ на гиперплоскости } (t = t_1,\ t = t_2) \end{cases}$$

Тогда вариационное уравнение "динамической термоупругости" можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\iiiint \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \dot{p}_i - f v_i + P_i^{V_3} \right] \delta r_i + \left[-v^2 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} + \dot{T} - (\bar{E}_1 \dot{R} + \bar{\Lambda}_1 \theta) + w^V \right] \delta R \right\} dV_3 dt + \\ &+ \oiint \{[P_i^{F_2} - \sigma_{ij} n_j] \delta r_i + [w^{F_2} + v^2 p_k n_k] \delta R\} dF_2 dt + \\ &+ \iiint \{[P_i^{F_1} - p_k] \delta r_k + [w^{F_1} - T] \delta R\} dV_3 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Запишем четвертое уравнение равновесия (уравнение баланса мощностей), полученное при вариации R. Имеем из (5.3):

$$\dot{T} = v^2 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} + (w_{\text{int}} - w), \quad w_{\text{int}} = (\bar{E}_1 \dot{R} + \bar{\Lambda}_1 \theta) \qquad (5.4)$$

где w_{int} – мощность диссипации. Проинтегрируем уравнение (5.4) по 3D-объему. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint T dV_3 = \oiint (v^2 p_k) n_k dF + \Delta w, \quad \Delta w = \iiint (w_{\text{int}} - w) dV_3 \qquad (5.5)$$

Здесь Δw – результирующая мощность диссипации и внешних источников тепла.

Теперь можно ввести определение теплового потока q_k. В соответствии с классическими представлениями о том, что изменение средней температуры тела со временем равно тепловому потоку через поверхность этого тела надо принять, что имеет место следующая связь между обобщенным импульсом и тепловым потоком:

$$q_k = v^2 p_k \qquad (5.6)$$

Тогда интегральное уравнение баланса мощностей (5.5) принимает классический вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint T dV_3 = \oiint q_k n_k dF + \Delta w$$

Сформулируем гипотезу Фурье:

$$q_k = \frac{k}{c}\frac{\partial T}{\partial x_k} \tag{5.7}$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности, а c – коэффициент теплоемкости.

Из гипотезы Фурье (5.7) и уравнения баланса мощностей (5.4) следует классическое уравнение теплопроводности [9]:

$$\frac{k}{c}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} - \dot{T} + (w_{\text{int}} - w) = 0 \tag{5.8}$$

Пусть теперь имеет место более общее предположение, чем гипотеза Фурье (5.7):

$$q_k = \frac{k}{c}\frac{\partial T}{\partial x_k} + a\dot{r}_k \tag{5.9}$$

Из (5.9) и уравнения баланса мощностей (5.4) следует обобщение уравнения теплопроводности [9]:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} - c\dot{T} + ac\dot{\theta} + c(w_{\text{int}} - w) = 0 \tag{5.10}$$

При изохорическом процессе, $\theta = 0$, уравнение (5.10) совпадает по виду с (5.8). Следовательно, теплоемкость в уравнении (5.10) является теплоемкостью при постоянном объеме c_V:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} - c_V\dot{T} + c_V(w_{\text{int}} - w) = 0$$

Допустим, что давление связано с изменением объема и температурой уравнением Дюамеля–Неймана:

$$p = (2\mu/3 + \lambda_T)(\theta - \alpha T) \tag{5.11}$$

Тогда при изобарическом процессе $p = 0$, изменение объема можно выразить через температуру с помощью (5.11). В результате уравнение (5.10) приобретет вид уравнения теплопроводности (5.8), но только с другим коэффициентом при производной от температуры (с другим коэффициентом теплоемкости, c_P):

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} - c_P\dot{T} + c_V(w_{\text{int}} - w) = 0$$

Следовательно можно идентифицировать константу a в обобщенной гипотезе Фурье (5.9):

$$a = (c_P - c_V)/(\alpha c_V)$$

Окончательно, обобщенное уравнение теплопроводности приобретет вид [9]:

$$\frac{k}{c_V}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} - \dot{T} + \frac{(c_P - c_V)}{\alpha c_V}\dot{\theta} + w_{\text{int}} - w = 0 \tag{5.12}$$

Таким образом, показано, что полученное в рамках динамической термоупругости уравнение баланса мощностей содержит как частные случаи известные варианты уравнения теплопроводности.

Выясним, наконец, какой вариант уравнения теплопроводности дает динамическая термоупругость, если не привлекать гипотезы Фурье и Дюамеля–Неймана в качестве дополнительных. В рамках постановки "динамической термоупругости" рассмотрим уравнения закона Гука (4.4):

$$\begin{aligned} p_k &= -\rho(\dot{r}_k - \upsilon^2 \partial R/\partial x_k) - f r_k, \quad p = (2\mu/3+\lambda)\theta - (\Lambda+\bar{\Lambda})\dot{R} - \bar{\Lambda}_1 R \\ T &= -(\Lambda-\bar{\Lambda})\theta + E\dot{R} - \bar{E}_1 R, \quad w_{\text{int}} = (\bar{E}_1\dot{R} + \bar{\Lambda}_1\theta) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Из них строго вытекают соотношения, обобщающие и гипотезу Фурье, и гипотезу Дюамеля–Неймана. Действительно, выражая R через T из уравнения закона Гука для температуры, найдем $R = [T + (\Lambda - \bar{\Lambda})\theta - ES]/\bar{E}_1$. Подставляя R в уравнение закона Гука (5.13) для обобщенного импульса p_k, получим выражение для теплового потока через температуру:

$$\begin{aligned} q_k &= \upsilon^2 p_k = -\rho\upsilon^2\left(\dot{r}_k - \upsilon^2\frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - \upsilon^2 f r_k = \\ &= \rho\upsilon^2\frac{\upsilon^2}{\bar{E}_1}\frac{\partial T}{\partial x_k} - \rho\upsilon^2\dot{r}_k + \rho\upsilon^2\frac{\upsilon^2}{\bar{E}_1}(\Lambda-\bar{\Lambda})\frac{\partial\theta}{\partial x_k} - \rho\upsilon^2\frac{\upsilon^2}{\bar{E}_1}E\frac{\partial S}{\partial x_k} - \upsilon^2 f r_k \end{aligned}$$

Дадим краткий анализ последнего уравнения. Первое слагаемое в нем соответствует гипотезе Фурье и приводит к классическому уравнению теплопроводности. Сумма первых двух слагаемых соответствует обобщенной гипотезе Фурье (5.9), и соответственно приводит к уравнению (5.12).

(g). Покажем, что уравнения закона Гука динамической термоупругости относительно давления и температуры содержат уравнение Дюамеля–Неймана как частный случай. Запишем определяющие уравнения динамической термоупругости относительно давления и температуры

$$p = (2\mu/3+\lambda)\theta - (\Lambda+\bar{\Lambda})\dot{R} - \bar{\Lambda}_1 R, \quad T = -(\Lambda-\bar{\Lambda})\theta + E\dot{R} - \bar{E}_1 R \tag{5.14}$$

Пусть эта система является линейно зависимой относительно R и $\dot{R}$. Тогда определитель системы уравнений (5.14) равен нулю

$$(\Lambda+\bar{\Lambda})\bar{E}_1 - E\bar{\Lambda}_1 = 0 \quad \text{или} \quad \Lambda+\bar{\Lambda} = E(\bar{\Lambda}_1/\bar{E}_1) \tag{5.15}$$

Из этих уравнений можно исключить линейный оператор от R и получить связь между давлением, температурой и изменением объема

$$p = \left[\frac{2\mu}{3} + \lambda + \frac{\bar{\Lambda}_1}{\bar{E}_1}(\Lambda-\bar{\Lambda})\right]\theta + \frac{\bar{\Lambda}_1}{\bar{E}_1}T \tag{5.16}$$

Введем обозначения

$$(\Lambda-\bar{\Lambda}) = \frac{(\lambda_T-\lambda)}{(2\mu/3+\lambda_T)\alpha}, \quad \bar{\Lambda}_1 = (2\mu/3+\lambda_T)\alpha(\bar{E}_1)$$

Тогда уравнение (5.16) приобретает вид уравнения Дюамеля–Неймана:

$$p = (2\mu/3+\lambda_T)(\theta - \alpha T)$$

Таким образом, гипотеза Дюамеля–Неймана эквивалентна предположению (5.15) в динамической термоупругости и является строгим частным случаем (5.14).

В общем случае аналог уравнения Дюамеля–Неймана устанавливает связь между давлением, температурой и изменением объема и имеет вид дифференциального уравнения релаксации-ползучести. Действительно, из уравнений (5.14) можно определить величины R и $\dot{R}$ (если определить не равен нулю). Дифференцируя R и исключая $\dot{R}$, получим уравнение, описывающее комбинированную модель ползучести и релаксации для канонической пары θ и p. Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\alpha_1 p + \alpha_2 \dot{p} = \beta_1 \theta + \beta_2 \dot{\theta} + \xi_1 T + \xi_2 \dot{T}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2, ξ_1, ξ_2 – некоторые физические постоянные модели, которые легко можно выразить через исходные физические постоянные модели.

Заключение. Получено обобщение кинематического вариационного принципа на неголономные среды.

Установлена трансверсальная изотропность в направлении времени физических свойств пространства Минковского.

Установлен общий вид физически нелинейных определяющих соотношений для неголономных внутренних напряжений и сил, которые являются условиями неинтегрируемости возможной работы внутренних силовых факторов A_{ij}, A_i, B_i.

Для физически линейных неголономных сред получены определяющие соотношения общего вида. Показано, что консервативная часть определяющих соотношений строится с помощью симметричных по мультииндексам тензоров термомеханических свойств среды, тогда как неголономная часть определяющих соотношений строится с помощью антисимметричных по мультииндексам тензоров термомеханических свойств.

Записано вариационное уравнение для неголономных линейных сред. Получено общее представление для составляющих в вариационном уравнении, соответствующих консервативному и неконсервативному процессам. Сформулирована модель связанной динамической термоупрогости с учетом диссипации. Дана постановка соответствующей краевой задачи.

Энтропия, обобщенная скорость и деформации объединены в единый тензорный объект – симметричный 4D-тензор второго ранга. Аналогично, температура, тепловой поток и механические напряжения также объединены в единый тензорный объект – симметричный 4D-тензор второго ранга.

Введено понятие собственного времени процесса, связанного с энтропией. Энтропия является производной по физическому времени от собственного времени процесса.

Установлено, что в отличие от классического импульса, обобщенный импульс зависит от собственного времени процесса (его градиента). Обобщенный импульс модифицирует классический импульс за счет учета градиента накопленной энтропии. Это можно трактовать как релятивистский эффект в средах с характерной скоростью распространения сигнала υ (нормировочный коэффициент в координате x_4).

Установлена связь между обобщенным импульсом и тепловым потоком.

Дано теоретическое обоснование гипотезы Фурье как следствия определяющих соотношений для 4D-среды, т.е. установлено соотношение между тепловым потоком, температурой и другими термодинамическими параметрами, обобщающее гипотезу Фурье.

Дано также теоретическое обоснование гипотезы Дюамеля–Неймана, получено дифференциальное уравнение, связывающее давление, температуру и изменение объема (уравнение релаксации и ползучести), которое обобщает гипотезу Дюамеля–Неймана.

Как частный случай, из определяющих соотношений получена комбинированная модель ползучести и релаксации для канонической пары θ и p.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00051 и НШ-4228.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Об основных принципах механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1961. 26 с.
2. *Седов Л.И.* Об основных концепциях механики сплошной среды // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. С. 227–235.
3. *Седов Л.И., Эглит М.Э.* Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 1. С. 54–59.
4. *Бердичевский В.Л.* Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1081–1086.
5. *Бердичевский В.Л.* Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 510–530.
6. *Седов Л.И.* О тензоре энергии-импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 3. С. 519–522.
7. *Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г.* Об одной модели когезионных взаимодействий в сплошных средах // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион, Естеств. науки (к 80-ию академика И.И. Воровича). 2000. № 3. С. 110–118.
8. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М., 1969. 335 с.
9. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.07.2006