

УДК 539.3:539.375

© 2006 г. Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, Е.И. ШИФРИН

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСКРИВЛЕНИЯ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача теории упругости о прямолинейной трещине, направленной вдоль одной из осей симметрии ортотропной плоскости. Предполагается, что на бесконечности приложены нормальные к трещине, растягивающие усилия. Трещина моделируется тонким эллиптическим вырезом. Прочностные свойства ортотропной плоскости предполагаются изотропными. Показано, что хотя приложенные растягивающие усилия нормальны к трещине, тем не менее, для некоторой области изменения упругих постоянных материала трещина начнет искривляться или ветвиться сразу с момента своего старта.

1. Введение: Несмотря на то, что реальная трещина представляет собой тонкую полость, в подавляющем большинстве публикаций трещина моделируется идеальным разрезом. Это объясняется несколькими причинами: во-первых, с математической точки зрения, задача об идеальном разрезе является более простой, чем задача о полости, а во-вторых, при моделировании трещины идеальным разрезом снимается неопределенность, связанная с неизвестной и зачастую сложной формой полости. Вместе с тем переход к предельной задаче для упругого тела с идеальным разрезом для ряда характеристик решения является некорректным, в том смысле, что определение соответствующих характеристик решения в задаче о полости с дальнейшим переходом к пределу, когда полость стремится к разрезу, приводит к результатам, отличным от получаемых в предельной задаче.

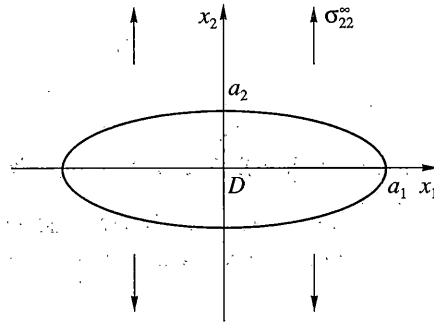
На указанный факт было обращено внимание в [1], где рассматривалась следующая задача. В изотропной, линейно упругой плоскости имеется эллиптическая полость, занимающая область $D \{(x_1, x_2): x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 < 1\}$. На бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_{22}^\infty = \text{const} > 0$, $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$ (см. фигуру). Исследовались напряжения $\sigma_{11}(x_1, 0)$, $a_1 \leq x_1 < +\infty$. Обозначим $\sigma_{11}^* = \max_{a_1 \leq x_1 < +\infty} \sigma_{11}(x_1, 0)$, $\sigma_{22}^{\max} = \sigma_{22}(a_1, 0)$.

На основании численных расчетов был сделан вывод

$$\lim_{a_2 \rightarrow 0} \frac{\sigma_{11}^*}{\sigma_{22}^{\max}} = \frac{1}{5} \quad (1.1)$$

Этот результат использовался для объяснения механизма остановки трещин, параллельных оси x_1 , в условиях, когда имеются ослабленные плоскости среди плоскостей, перпендикулярных оси x_1 .

Формула (1.1) была аналитически подтверждена в [2]. Помимо этого было показано, что максимальное значение напряжений $\sigma_{11}(x_1, x_2)$ достигается не на оси x_1 , а на контуре



∂D эллиптической полости. Обозначим $\sigma_{11}^{\max} = \max_{(x_1, x_2) \in \partial D} \sigma_{11}(x_1, x_2)$. Согласно результатам [2]:

$$\lim_{a_2 \rightarrow 0} \frac{\sigma_{11}^{\max}}{\sigma_{22}^{\max}} = \frac{1}{4}. \quad (1.2)$$

Кроме этого в [2] изучались максимальные значения напряжений сдвига $\sigma_{12}(x_1, x_2)$ как для задачи об эллиптической полости в изотропной, так и в ортотропной плоскости. Полученные результаты применялись для объяснения закономерностей развития трещин в однонаправленных композитах с пониженным сопротивлением сдвигу вдоль волокон.

В противоположность работам [1, 2] где предполагалась прочностная неоднородность и анизотропия, в данной статье исследуется влияние только упругой анизотропии на закономерности развития трещины, в связи с чем прочностные свойства материала предполагаются изотропными и однородными.

2. Постановка задачи. Пусть в ортотропной плоскости имеется описанная выше эллиптическая полость D (фигура). На бесконечности приложены однородные растягивающие усилия $\sigma_{22}^{\infty} > 0$, $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$. Контур эллиптической полости предполагается свободным от усилий. Математически, записанные условия выражаются следующим образом. Напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (2.1)$$

Деформации удовлетворяют уравнению совместности

$$e_{11,22} + e_{22,11} - 2e_{12,12} = 0 \quad (2.2)$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука для ортотропной плоскости [3, 4]:

$$e_{11} = \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22}), \quad e_{12} = \frac{1}{2G_{12}}\sigma_{12}, \quad e_{22} = \frac{1}{E_2}(\sigma_{22} - \nu_{21}\sigma_{11}) \quad (2.3)$$

Здесь упругие постоянные удовлетворяют равенству

$$\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2 \quad (2.4)$$

Условия на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{22}(x) = \sigma_{22}^{\infty}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{12}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{11}(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2). \quad (2.5)$$

Условия на контуре эллиптической полости (контур свободен от нагрузок)

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(x')n_1(x') + \sigma_{12}(x')n_2(x') &= 0 \\ \sigma_{12}(x')n_1(x') + \sigma_{22}(x')n_2(x') &= 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

Здесь $x' = (x'_1, x'_2) \in \partial D$, $n(x') = (n_1(x'), n_2(x'))$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D в точке x' .

Заметим, что из механических соображений, в том числе из положительности упругого потенциала $W = \sigma_{11}e_{11} + 2\sigma_{12}e_{12} + \sigma_{22}e_{22}$ следует, что упругие постоянные должны удовлетворять следующим неравенствам

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad G_{12} > 0, \quad \nu_{12} > 0, \quad \nu_{21} > 0, \quad k < \frac{1}{\nu_{21}^2}, \quad k = \frac{E_1}{E_2} \quad (2.7)$$

3. Общий подход к решению плоской задачи. Коротко изложим известный [3, 5] подход к решению плоской задачи анизотропной теории упругости и приведем основные представления и формулы в удобной для последующего анализа форме. Пусть $F(x_1, x_2)$ – функция напряжений

$$\sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12} \quad (3.1)$$

Напряжения, удовлетворяющие (3.1), автоматически удовлетворяют уравнениям равновесия (2.1). Подставив (3.1) и (2.3) в уравнение совместности деформаций, с учетом (2.4) получим

$$\frac{1}{E_1}F_{,2222} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_2}\right)F_{,1122} + \frac{1}{E_2}F_{,1111} = 0 \quad (3.2)$$

Решение (3.2) ищем в виде

$$F(x_1, x_2) = f(x_1 + sx_2) = f(z), \quad z = x_1 + sx_2 \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.2), получим

$$\left[\frac{1}{E_1}s^4 + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_2}\right)s^2 + \frac{1}{E_2}\right]f^{(4)}(z) = 0 \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что функция напряжений $F(x_1, x_2)$, заданная в виде (3.3), удовлетворяет уравнению совместности (3.2) в случае, когда выполнено равенство

$$\frac{1}{E_1}s^4 + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_2}\right)s^2 + \frac{1}{E_2} = 0 \quad (3.5)$$

В [3] показано, что из положительности упругого потенциала следует, что уравнение (3.5) не имеет вещественных корней. Поскольку коэффициенты уравнения (3.5) вещественны, для каждого комплексного корня, комплексно сопряженное к нему число также является корнем уравнения (3.5). Следовательно, предположив, что уравнение (3.5) не имеет кратных корней, все его корни можно записать в виде

$$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad s_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad s_4 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad (3.6)$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$.

Окончательно функция напряжений, отвечающая решению плоской задачи, ищется в виде

$$F(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + s_1 x_2) + \overline{\varphi(x_1 + s_1 x_2)} + \psi(x_1 + s_2 x_2) + \overline{\psi(x_1 + s_2 x_2)} \quad (3.7)$$

Здесь и ниже черта сверху означает комплексное сопряжение.

Обозначим

$$x_1 + s_1 x_2 = z_1, \quad x_1 + s_2 x_2 = z_2 \quad (3.8)$$

С учетом (3.8) равенство (3.7) записывается в виде

$$F(x_1, x_2) = \varphi(z_1) + \overline{\varphi(z_1)} + \psi(z_2) + \overline{\psi(z_2)} \quad (3.9)$$

Из (3.1), (3.7) и (3.9) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= s_1^2 \varphi''(z_1) + \overline{s_1^2 \varphi''(z_1)} + s_2^2 \psi''(z_2) + \overline{s_2^2 \psi''(z_2)} \\ \sigma_{22} &= \varphi''(z_1) + \overline{\varphi''(z_1)} + \psi''(z_2) + \overline{\psi''(z_2)} \\ \sigma_{12} &= -[s_1 \varphi''(z_1) + \overline{s_1 \varphi''(z_1)} + s_2 \psi''(z_2) + \overline{s_2 \psi''(z_2)}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Обозначим

$$\varphi'(z_1) = \varphi_0(z_1), \quad \psi'(z_2) = \psi_0(z_2) \quad (3.11)$$

С учетом (3.11) равенства (3.10) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\operatorname{Re}[s_1^2 \varphi_0'(z_1) + s_2^2 \psi_0'(z_2)] \\ \sigma_{22} &= 2\operatorname{Re}[\varphi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)] \\ \sigma_{12} &= -2\operatorname{Re}[s_1 \varphi_0'(z_1) + s_2 \psi_0'(z_2)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь Re означает вещественную часть числа.

Следовательно, для решения конкретной задачи остается найти такие функции $\varphi_0(z_1)$ и $\psi_0(z_2)$, для которых удовлетворяются граничные условия.

4. Анализ решения задачи об эллиптической полости. Решение задачи (2.1)–(2.6) известно (см. например, [6]). В [6] решение представлено в виде суммы поля напряжений (3.12) и однородного поля:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\operatorname{Re}[s_1^2 \varphi_0'(z_1) + s_2^2 \psi_0'(z_2)] \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^\infty + 2\operatorname{Re}[\varphi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)] \\ \sigma_{12} &= -2\operatorname{Re}[s_1 \varphi_0'(z_1) + s_2 \psi_0'(z_2)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\varphi_0(z_1) = \frac{a_1 \sigma_{22}^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} \frac{a_1 - i s_1 a_2}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a_1^2 + s_1^2 a_2^2)}} \quad (4.2)$$

$$\psi_0(z_2) = -\frac{a_1 \sigma_{22}^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)} \frac{a_1 - i s_2 a_2}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a_1^2 + s_2^2 a_2^2)}}$$

Из (4.2) следует

$$\begin{aligned}\Phi'_0(z_1) &= \frac{-a_1 \sigma_{22}^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)(a_1 + i s_1 a_2)} \left[\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a_1^2 + s_1^2 a_2^2)}} - 1 \right] \\ \Psi'_0(z_2) &= \frac{a_1 \sigma_{22}^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)(a_1 + i s_2 a_2)} \left[\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a_1^2 + s_2^2 a_2^2)}} - 1 \right]\end{aligned}\quad (4.3)$$

Рассмотрим функции $\Phi'_0(z_1)$ и $\Psi'_0(z_2)$ на контуре эллиптической полости, где

$$x_1 = a_1 \cos \theta, \quad x_2 = a_2 \sin \theta \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что на контуре

$$\begin{aligned}\sqrt{z_1^2 - (a_1^2 + s_1^2 a_2^2)} &= \sqrt{(a_1 \cos \theta + s_1 a_2 \sin \theta)^2 - (a_1^2 + s_1^2 a_2^2)} = \\ &= \sqrt{-(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)^2} = i(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)\end{aligned}\quad (4.5)$$

Аналогично

$$\sqrt{z_2^2 - (a_1^2 + s_2^2 a_2^2)} = i(a_1 \sin \theta - s_2 a_2 \cos \theta) \quad (4.6)$$

Подставив (4.5), (4.6) в (4.3), имеем

$$\begin{aligned}\Phi'_0(z_1) &= \frac{a_1 \sigma_{22}^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)} (\sin \theta + i \cos \theta) \\ \Psi'_0(z_2) &= \frac{-a_1 \sigma_{22}^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)(a_1 \cos \theta - s_2 a_2 \cos \theta)} (\sin \theta + i \cos \theta)\end{aligned}\quad (4.7)$$

Подставив теперь (4.7) в (4.1), получим выражения для напряжений на контуре эллиптической полости

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{22}^\infty a_1^2 \sin \theta \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2 (\sin \theta + i \cos \theta)}{(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)(a_1 \sin \theta - s_2 a_2 \cos \theta)} \right] \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^\infty \left\{ 1 + a_1 \operatorname{Re} \left[\frac{(\sin \theta + i \cos \theta)(a_2(s_1 + s_2) \cos \theta - a_1 \sin \theta)}{(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)(a_1 \sin \theta - s_2 a_2 \cos \theta)} \right] \right\} \\ \sigma_{12} &= -\sigma_{22}^\infty a_1 a_2 \cos \theta \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2 (\sin \theta + i \cos \theta)}{(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)(a_1 \sin \theta - s_2 a_2 \cos \theta)} \right]\end{aligned}\quad (4.8)$$

Рассмотрим знаменатель в выражениях (4.8):

$$\begin{aligned}(a_1 \sin \theta - s_1 a_2 \cos \theta)(a_1 \sin \theta - s_2 a_2 \cos \theta) &= \\ &= a_1^2 \sin^2 \theta - (s_1 + s_2) a_1 a_2 \sin \theta \cos \theta + s_1 s_2 a_2^2 \cos^2 \theta\end{aligned}\quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) следует, что напряжения σ_{ij} выражаются только через комбинации корней s_1 и s_2 : $s_1 + s_2$ и $s_1 s_2$. Выразим эти комбинации через упругие постоянные материала. Из уравнения (3.5) имеем

$$s_1^2 s_2^2 = E_1/E_2 = k \quad (4.10)$$

$$s_1^2 + s_2^2 = -(\eta - 2\nu_{21}k), \quad \eta = E_1/G_{12} \quad (4.11)$$

Рассмотрим более подробно возможные выражения для корней уравнения (3.5). Из (3.5) и (3.6) следует, что если $\alpha + i\beta$ корень уравнения (3.5) и $\alpha \neq 0$, то все четыре корня уравнения (3.5) имеют вид:

$$s_1 = \alpha + i\beta, \quad s_2 = -\alpha + i\beta, \quad s_3 = \alpha - i\beta, \quad s_4 = -\alpha - i\beta, \quad \beta > 0 \quad (4.12)$$

В случае, когда один из корней (3.5) является чисто мнимым числом, все остальные корни также будут чисто мнимыми, в результате этого их можно записать в виде

$$s_1 = i\beta_1, \quad s_2 = i\beta_2, \quad s_3 = -i\beta_1, \quad s_4 = -i\beta_2, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0 \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) видно, что в обоих случаях величина $s_1 s_2$ является вещественным отрицательным числом. Отсюда и из (4.10) следует

$$s_1 s_2 = -\sqrt{k} \quad (4.14)$$

Из (4.11) и (4.14) имеем

$$s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_2 = (s_1 + s_2)^2 = -(\eta - 2\nu_{21}k + 2\sqrt{k}) \quad (4.15)$$

Из неравенств (2.7) следует, что число, стоящее в скобках в правой части (4.15), является положительным. Из (4.12) и (4.13) следует, что во всех случаях $s_1 + s_2$ чисто мнимое число с положительной мнимой частью. Отсюда и из (4.15) имеем

$$s_1 + s_2 = ip, \quad p = \sqrt{\eta - 2\nu_{21}k + 2\sqrt{k}} > 0 \quad (4.16)$$

Введем обозначение

$$a_2/a_1 = \gamma \quad (4.17)$$

Из (4.8), (4.9), (4.14), (4.16) и (4.17) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sqrt{k} \sigma_{22}^\infty \sin \theta \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \theta + i \cos \theta}{\sin^2 \theta - \sqrt{k} \gamma^2 \cos^2 \theta - ip \gamma \sin \theta \cos \theta} \right] \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^\infty \left\{ 1 + \operatorname{Re} \left[\frac{(\sin \theta + i \cos \theta)(ip \gamma \cos \theta - \sin \theta)}{\sin^2 \theta - \sqrt{k} \gamma^2 \cos^2 \theta - ip \gamma \sin \theta \cos \theta} \right] \right\} \\ \sigma_{12} &= \sqrt{k} \sigma_{22}^\infty \gamma \cos \theta \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \theta + i \cos \theta}{\sin^2 \theta - \sqrt{k} \gamma^2 \cos^2 \theta - ip \gamma \sin \theta \cos \theta} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Сперва упростим выражения (4.18):

$$\sigma_{11} = -\sqrt{k} \sigma_{22}^\infty \operatorname{tg} \theta \operatorname{Re} \left[\frac{\operatorname{tg} \theta + i}{\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k} \gamma^2 - ip \gamma \operatorname{tg} \theta} \right]$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^{\infty} \left\{ 1 + \operatorname{Re} \left[\frac{(\operatorname{tg} \theta + i)(ip\gamma - \operatorname{tg} \theta)}{\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k}\gamma^2 - ip\gamma \operatorname{tg} \theta} \right] \right\} \quad (4.19)$$

$$\sigma_{12} = \sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty}\gamma \operatorname{Re} \left[\frac{\operatorname{tg} \theta + i}{\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k}\gamma^2 - ip\gamma \operatorname{tg} \theta} \right]$$

Равенства (4.19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \theta \frac{\operatorname{tg}^2 \theta - \gamma(p + \sqrt{k}\gamma)}{(\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ \sigma_{22} &= \sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty} \gamma^2 \frac{\gamma(p + \sqrt{k}\gamma) - \operatorname{tg}^2 \theta}{(\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ \sigma_{12} &= \sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty} \gamma \frac{\operatorname{tg} \theta [\operatorname{tg}^2 \theta - \gamma(p + \sqrt{k}\gamma)]}{(\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Из условий симметрии задачи следует, что достаточно рассмотреть выражения для напряжений на четверти контура эллиптической полости, то есть при $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Точка $\theta = 0$ соответствует вершине большой полуоси эллипса ($a_1, 0$), а точка $\theta = \pi/2$ – вершине малой полуоси ($0, a_2$). Анализ выражения (4.20) для σ_{22} показывает, что напряжения σ_{22} принимают максимальное значение $\sigma_{22}^{\max}$ в вершине большой полуоси эллипса (при $\theta = 0$), причем

$$\sigma_{22}^{\max} = \sigma_{22}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{\sqrt{k}\gamma} \right) \quad (4.21)$$

Рассмотрим напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, действующие на площадках, нормальных к контуру эллиптической полости. Из граничных условий (2.6) следует

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (4.22)$$

Из (4.20) и (4.22) имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty}(\operatorname{tg}^2 \theta + \gamma^2) \frac{\gamma(p + \sqrt{k}\gamma) - \operatorname{tg}^2 \theta}{(\operatorname{tg}^2 \theta - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \quad (4.23)$$

Сделаем в (4.23) замену переменной

$$\operatorname{tg}^2 \theta = x \quad (4.24)$$

Подставив (4.24) в (4.23), получим

$$\sigma_{\theta\theta} = \sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty}(x + \gamma^2) \frac{\gamma(p + \sqrt{k}\gamma) - x}{(x - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2 x} \quad (4.25)$$

При $0 \leq \theta \leq \pi/2$ переменная x изменяется в пределах $0 \leq x < +\infty$. Таким образом, максимум напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ может достигаться либо в точке $x = 0$, либо при $x = +\infty$, либо в такой точке x , в которой производная $\sigma_{\theta\theta}$ обращается в ноль.

$$\sigma_{\theta\theta}|_{x=0} = \sigma_{22}^{\max}, \quad \sigma_{\theta\theta}|_{x=+\infty} = -\sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty} \quad (4.26)$$

Для исследования производной функции $\sigma_{\theta\theta}$ рассмотрим функцию

$$\chi(x) = \frac{(x + \gamma^2)[\gamma(p + \sqrt{k}\gamma) - x]}{(x - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2x} \quad (4.27)$$

Из (4.27) имеем

$$\begin{aligned} \chi'(x) = & [(x - \sqrt{k}\gamma^2)^2 + p^2\gamma^2x]^{-2} \{-\gamma[p + \gamma(p^2 - \sqrt{k} - 1)]x^2 - \\ & - 2\gamma^3[p + \gamma\sqrt{k}(\sqrt{k} + 1)]x + \gamma^5[p(k + 2\sqrt{k} - p^2) + \gamma\sqrt{k}(k + \sqrt{k} - p^2)]\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Из (4.28) следует, что экстремальное значение $\chi(x)$ может достигаться в точке x , удовлетворяющей уравнению

$$\begin{aligned} [p + \gamma(p^2 - \sqrt{k} - 1)]x^2 + 2\gamma^2[p + \gamma\sqrt{k}(\sqrt{k} + 1)]x - \\ - \gamma^4[p(k + 2\sqrt{k} - p^2) + \gamma\sqrt{k}(k + \sqrt{k} - p^2)] = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Поскольку нас интересуют трещиноподобные полости, для которых величина γ мала, рассмотрим главный член асимптотического разложения решения (4.29) при $\gamma \rightarrow 0$. Из (4.29) имеем

$$x \approx z(p, k)\gamma^2, \quad z(p, k) = -1 \pm \sqrt{(1 + \sqrt{k})^2 - p^2} \quad (4.30)$$

Так как величина x меняется в диапазоне $0 \leq x < +\infty$, для $z(p, k)$ остается лишь одно значение

$$z(p, k) = -1 + \sqrt{(1 + \sqrt{k})^2 - p^2} \quad (4.31)$$

Из (4.30) и (4.31) следует, что экстремальное значение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ может достигаться внутри интервала $0 < x < +\infty$ только если выполняется неравенство $(1 + \sqrt{k})^2 - p^2 > 1$, или иначе

$$k + 2\sqrt{k} > p^2 \quad (4.32)$$

Воспользовавшись (4.16), неравенство (4.32) можно переписать в виде

$$\eta < (1 + 2\nu_{21})k \quad (4.33)$$

Обозначим значение напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в критической точке x через $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}$. Из (4.25) и (4.30) имеем

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}} \approx \sqrt{k}\sigma_{22}^{\infty} \frac{[p + \sqrt{k}\gamma - z(p, k)\gamma](1 + z(p, k))}{\gamma[(z(p, k) - \sqrt{k})^2 + p^2z(p, k)]} \quad (4.34)$$

Сохраняя в (4.34) главный член асимптотического разложения при $\gamma \rightarrow 0$, имеем

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}} \approx \frac{\sigma_{22}^{\infty} p \sqrt{k}(1 + z(p, k))}{\gamma[(z(p, k) - \sqrt{k})^2 + p^2z(p, k)]} \quad (4.35)$$

Из (4.21) и (4.35) получим

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}}{\sigma_{22}^{\text{max}}} = \frac{k(1 + z(p, k))}{[z(p, k) - \sqrt{k}]^2 + p^2 z(p, k)} \quad (4.36)$$

С помощью (4.31) равенство (4.36) можно переписать в виде

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}}{\sigma_{22}^{\text{max}}} = \frac{k}{2\sqrt{(\sqrt{k} + 1)^2 - p^2} + p^2 - 2(\sqrt{k} + 1)} \quad (4.37)$$

Подставив выражение (4.16) для p в (4.37), получим

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}}{\sigma_{22}^{\text{max}}} = \frac{k}{2\sqrt{1 + (1 + 2\nu_{21})k - \eta} + \eta - 2(1 + \nu_{21}k)} \quad (4.38)$$

В силу условий (2.7) и (4.33) числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части равенства (4.38), положительны. Покажем, что отсюда следует неравенство

$$\frac{k}{2\sqrt{1 + (1 + 2\nu_{21})k - \eta} + \eta - 2(1 + \nu_{21}k)} > 1 \quad (4.39)$$

Действительно, неравенство (4.39) эквивалентно неравенству

$$k > 2\sqrt{1 + (1 + 2\nu_{21})k - \eta} + \eta - 2(1 + \nu_{21}k) \quad (4.40)$$

Перенеся правую часть неравенства (4.40) влево, придем к очевидному неравенству

$$(1 - \sqrt{1 + (1 + 2\nu_{21})k - \eta})^2 > 0 \quad (4.41)$$

Здесь строгое неравенство следует из того, что в силу неравенства (4.33) подкоренное выражение строго больше единицы. Таким образом неравенство (4.39) доказано.

Неравенство (4.39) показывает, что в случае выполнения неравенства (4.33) $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}$ действительно является экстремальным, причем максимальным значением растягивающих напряжений вдоль контура трещиноподобной эллиптической полости. Следовательно, для материалов, чьи упругие постоянные удовлетворяют неравенству (4.33), максимальное растягивающее напряжение достигается не в вершине большой полуоси трещиноподобной эллиптической полости, а в отличных от нее точках контура. Найдем точку (x_1^0, x_2^0) , в которой достигается значение $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}$. Из (4.4), (4.24) и (4.30) имеем

$$x_1^0 \approx a_1 \left(1 - \frac{z(p, k)\gamma^2}{2} \right), \quad x_2^0 \approx a_2 \sqrt{z(p, k)}\gamma \quad (4.42)$$

Нами рассматривалась четверть эллиптического контура. В силу симметрии задачи напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ достигают значения $\sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}}$ помимо точки (4.42) еще в трех точках: $(x_1^0, -x_2^0)$, $(-x_1^0, x_2^0)$ и $(-x_1^0, -x_2^0)$.

Из (4.42) следует, что точки, в которых достигается максимум растягивающих напряжений, отстоят от вершины большой полуоси эллипса на расстояние порядка радиуса кривизны эллиптического контура в вершине большой полуоси.

Поскольку в задаче об эллиптической полости не возникает бесконечных напряжений, одним из естественных критериев разрушения является достижение растягивающим напряжением критического значения σ_c . Из полученных результатов следует, что для ортотропных материалов, чьи упругие постоянные удовлетворяют неравенствам (2.7) и (4.33), прямолинейный трещиноподобный дефект, направленный вдоль оси симметрии x_1 , отклонится от начального направления и возможно начнет ветвиться даже при одноосном нормальном растяжении.

При заданном критерии разрушения можно найти направление отклонения трещиноподобного дефекта от начальной прямой. В частности, процесс разрушения, начинающийся в точке (x_1^0, x_2^0) , пойдет по нормали к эллиптическому контуру в этой точке.

Обозначим единичный вектор нормали в точке (x_1^0, x_2^0) , направленный внутрь материала, через $\mathbf{n}^0 = (n_1^0, n_2^0)$. Из (4.4) и (4.30) имеем

$$n_1^0 = \frac{1}{\sqrt{1+z(p,k)}}, \quad n_2^0 = \frac{\sqrt{z(p,k)}}{\sqrt{1+z(p,k)}} \quad (4.43)$$

Замечание 1. Неравенство (4.33), являющееся по существу критерием того, для каких материалов прямолинейная трещина будет расти вдоль своего направления, а для каких отклоняться от него, включает три безразмерных величины, определяемых упругими постоянными. Оказывается, что это неравенство может быть записано с помощью только двух безразмерных величин, которые к тому же определяются из более простых экспериментов¹. Обозначим модуль Юнга материала в направлении, образующем угол φ с направлением оси x_1 , через E_φ . Согласно [3]:

$$\frac{1}{E_{\pi/4}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{E_1} + \frac{(1-2\nu_{21})}{E_2} + \frac{1}{G_{12}} \right] \quad (4.44)$$

Обозначим

$$E_1/E_{\pi/4} = \zeta \quad (4.45)$$

Из (4.44) и (4.45) имеем

$$\zeta = 1/4 [1 + (1-2\nu_{21})k + \eta] \quad (4.46)$$

С помощью (4.46) неравенство (4.33) можно переписать в виде

$$\zeta < (1+2k)/4 \quad (4.47)$$

Замечание 2. Если моделировать трещину идеальным разрезом, то, согласно результатам [7], также можно обнаружить, что прямолинейная трещина нормального разрыва, расположенная на оси симметрии ортотропного материала, при некоторых значениях упругих постоянных будет в процессе роста отклоняться от своего направления. Сравним наши результаты с результатами [7]. Пусть трещина находится на оси x_1 , являющейся осью симметрии ортотропного материала. Введем полярную систему координат, связанную с кончиком трещины. Поместим начало координат в кончик трещины, а угол φ будем отсчитывать от оси x_1 , направленной вдоль продолжения трещины. Рассмотрим окружные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ вблизи кончика трещины. Введем обозначение для безразмерного напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$.

¹ Указано К.Б. Устиновым.

$$S(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\pi r}}{K_I} \sigma_{\varphi\varphi} \quad (4.48)$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений.

В [7] приведено выражение для функции $S(\varphi)$:

$$2S(\varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[\frac{(s_2^{-1} + s_2) + (s_2^{-1} - s_2) \cos 2\varphi + 2 \sin 2\varphi}{(\cos \varphi + s_2 \sin \varphi)^{1/2}} - \frac{(s_1^{-1} + s_1) + (s_1^{-1} - s_1) \cos 2\varphi + 2 \sin 2\varphi}{(\cos \varphi + s_1 \sin \varphi)^{1/2}} \right] \right\} \quad (4.49)$$

Выполненные в [7] численные расчеты по формуле (4.49) показали, что для некоторых значений упругих постоянных функция $S(\varphi)$ достигает максимального значения при $\varphi \neq 0$, то есть не на продолжении трещины. Аналитически выясним условия, при которых это происходит. Сперва перепишем равенство (4.49) в более удобной форме

$$S(\varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 (\cos \varphi + s_2 \sin \varphi)^{3/2} - s_2 (\cos \varphi + s_1 \sin \varphi)^{3/2}] \right\} \quad (4.50)$$

Нетрудно видеть, что

$$S'(\varphi) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 (\cos \varphi + s_2 \sin \varphi)^{1/2} (-\sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - s_2 (\cos \varphi + s_1 \sin \varphi)^{1/2} (-\sin \varphi + s_1 \cos \varphi)] \right\} \quad (4.51)$$

Из (4.51) следует, что $S'(0) = 0$. Вычислим $S''(0)$. Имеем

$$S''(\varphi) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{s_1}{2} (\cos \varphi + s_2 \sin \varphi)^{-1/2} (-\sin \varphi + s_2 \cos \varphi)^2 - s_1 (\cos \varphi + s_2 \sin \varphi)^{3/2} - \frac{s_2}{2} (\cos \varphi + s_1 \sin \varphi)^{-1/2} (-\sin \varphi + s_1 \cos \varphi)^2 + s_2 (\cos \varphi + s_1 \sin \varphi)^{3/2} \right] \right\} \quad (4.52)$$

Из (4.52) следует, что

$$S''(0) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left(-\frac{s_1 s_2}{2} - 1 \right) \quad (4.53)$$

Из (4.14) и (4.53) получим

$$S''(0) = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{k}}{2} - 1 \right) \quad (4.54)$$

Если $S''(0) < 0$, то точка $\varphi = 0$ является точкой максимума. Если $S''(0) > 0$, то точка $\varphi = 0$ является точкой минимума и таким образом максимум напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ достигает

ся не на продолжении трещины. Как следует из (4.54) неравенство $S''(0) > 0$ выполняется при условии

$$k > 4 \quad (4.55)$$

В противоположность полученному нами условию (4.33), условие (4.55) не зависит ни от модуля сдвига, ни от коэффициентов Пуассона. Поскольку зависимость критерия поворота трещины (4.55) только от отношения модулей Юнга в направлениях осей симметрии ортотропного материала представляется не слишком правдоподобной, это дает основание предположить, что модель трещины в виде идеального разреза не подходит для описания условий поворота трещины в анизотропном материале.

5. Заключение. В статье исследуется начало роста прямолинейной трещины, направленной вдоль одной из осей симметрии ортотропной плоскости. Прочностные свойства материала полагаются однородными и изотропными. Трещина моделируется тонким эллиптическим отверстием и предполагается, что на бесконечности приложены растягивающие усилия, нормальные к большой оси эллипса. Показано, что существует класс материалов, определяемых неравенством (4.33), или эквивалентным ему неравенством (4.47), для которых максимальные растягивающие напряжения достигаются не в вершине большой полуоси эллипса, а в точках контура, отстоящих от нее на расстоянии порядка радиуса кривизны контура в данной вершине. Из этого результата следует, что даже в условиях одноосного нормального растяжения прямолинейная трещина начнет отклоняться от своего направления или ветвиться непосредственно с момента своего старта.

Заметим, что существование выделенного класса материалов не противоречит фундаментальным представлениям о материале, поскольку неравенство (4.33) не противоречит следующим из этих представлений неравенствам (2.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cook J., Gordon J.E. A mechanism for the control of crack propagation in all – brittle systems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 282. № 1391. P. 508–520.
2. Полилов А.Н. Торможение трещины поверхностью раздела // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 68–72.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
5. Stroh A.N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // Philos. Mag. 1958. V. 3. № 30. P. 625–646.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
7. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения / Ред. А.Ю. Ишлинский. М.: Мир, 1975. С. 83–203.

Москва

Поступила в редакцию
10.08.2006