

© 2006 г. Д.Л. БЫКОВ, Д.Н. КОШВАЛОВ

**ЭНДОХРОННАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Рассматривается обобщение нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов [1] на случай конечных деформаций. При этом сохраняются главные достоинства предложенной ранее модели [1], а именно, единый аппарат для описания влияния основных физико-механических факторов (температуры, влажности, химического старения, уровня деформаций и напряжений, знака среднего напряжения, знака скорости деформирования и нагружения и т.д.), а также возможности структурно-энергетического анализа напряженно-деформированного состояния [2–4].

Модель описывается системой соотношений инкрементального типа. Последовательность вывода этих соотношений включает три этапа. На первом этапе делается допущение о “вмороженности” главных направлений тензора истинных напряжений в материал частицы, и формулируются три скалярных соотношения связи наследственного типа между главными истинными напряжениями и логарифмическими деформациями. Форма этих соотношений аналогична форме соотношений эндохронной теории [1]. На втором этапе выводятся скалярные соотношения инкрементального типа, основанные на допущении о постоянстве скоростей логарифмических деформаций и скоростей изменения приведенных времен на интервале $[t, t + \Delta t]$. На третьем этапе инкрементальные соотношения формулируются в тензорном виде и обобщаются на случай произвольной истории деформирования материальной частицы.

Рассматривается алгоритм численного решения пространственных начально-краевых задач для предложенной системы инкрементальных определяющих соотношений. Алгоритм основан на конечно-элементной дискретизации слабой формы уравнений равновесия, отнесенной к конфигурации тела в начале текущего временного шага. Учет зависимости материальных функций старения и функций скоростей приведенных времен от параметров состояния (инвариантов деформаций, напряжений, удельной рассеянной энергии и т.д.) проводится в рамках явной схемы.

С использованием разработанного алгоритма решена задача о стесненном сжатии резинового амортизатора. Идентификация материальных констант модели производилась по результатам опытов на одноосную релаксацию сжимающих напряжений. Отмечено, что при малых величинах радиуса скругления кромки обкладки, через которую передается сжимающее усилие на резиновый диск, имеет место резкое замедление сходимости метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений относительно приращений узловых перемещений. Предложена экстраполяционная (по величине радиуса скругления) процедура расчета. Сравнение с результатами эксперимента по стесненному сжатию амортизатора показывает удовлетворительное соответствие между результатами расчета и эксперимента.

1. Введение. Накопленный к настоящему времени обширный экспериментальный материал по механическому поведению наполненных полимерных материалов свиде-

тельствует о том, что механическое сопротивление материалов этого типа существенно зависит от совместного действия многих факторов, имеющих различную физическую природу (время, скорость и уровень нагружения, степень монотонности нагружения, температура, влажность, степень полимеризации, поврежденность и т.д.). Для описания механического поведения материалов указанного типа предложен ряд моделей [1, 5–8]. Эндохронная модель [1] позволяет в рамках единого аппарата учитывать влияние наиболее значимых для практических приложений физико-механических факторов, влияющих на сопротивление материалов указанного типа. В общем виде эта модель содержит 6 скалярных материальных функций: два ядра релаксации, являющиеся функциями времени, две функции старения и две функции временного сдвига. Функции старения описывают изменение реакции материала на кратковременные воздействия, а функции временного сдвига – влияние предыстории различных факторов. Аргументами функций старения и функций временного сдвига могут быть как внешние параметры состояния, не зависящие от процесса нагружения (температура, влажность, степень полимеризации), так и параметры состояния, зависящие от процесса нагружения (скорость и уровень нагружения, степень монотонности нагружения, поврежденность и т.д.). Иерархическая структура операторов связи между деформациями и напряжениями позволяет сформулировать подходы к последовательной идентификации материальных функций по результатам опытов с образцами материала [9]. Модель позволяет проводить физически обоснованную классификацию составляющих удельной работы внутренних сил (рассеянная энергия, мгновенно-обратимая энергия, замедленно-обратимая энергия) с последующим структурно-энергетическим анализом напряженно-деформированного состояния [2–4]. Ранее модель была сформулирована и использовалась для расчетов [10] в рамках допущения о малости деформаций. Ниже дается обобщение модели на случай конечных деформаций.

2. Определяющие соотношения. Методически построение системы определяющих соотношений включает три этапа. На первом этапе делается допущение о “вмороженности” главных осей тензора истинных напряжений в материал частицы, и формулируются зависимости между главными истинными напряжениями и логарифмическими деформациями. По своей форме эти зависимости аналогичны соотношениям эндохронной модели [1]. На втором этапе выводятся скалярные соотношения инкрементального типа, основанные на допущении о постоянстве скоростей логарифмических деформаций и скоростей изменения приведенных времен на интервале $[t, t + \Delta t]$. На третьем этапе инкрементальные соотношения формулируются в тензорном виде и обобщаются на случай произвольной истории деформирования материальной частицы.

Предположим сначала, что главные оси тензора истинных напряжений неподвижны относительно материала частицы. Тогда деформированное состояние частицы может характеризоваться тремя логарифмическими деформациями

$$\varepsilon_{\alpha}(t) = \ln \lambda_{\alpha}(t) \quad (2.1)$$

где $\lambda_{\alpha}(t)$ – растяжение материального волокна, направленного вдоль главной оси тензора истинных напряжений с номером α ($\alpha = 1, 2, 3$).

Представим связь между главными истинными напряжениями $\sigma_{\alpha}(t)$ и логарифмическими деформациями $\varepsilon_{\alpha}(t)$ в виде, аналогичном соотношениям эндохронной модели [1]

$$\sigma(t) = \varphi_1(t) \int_0^t K[t_1(t) - t_1(\tau)] d\theta(\tau) \quad (2.2)$$

$$S_{\alpha}(t) = 2\varphi_2(t) \int_0^t G[t_2(t) - t_2(\tau)] d\theta_{\alpha}(t)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{\alpha}(t), \quad \Theta_{\alpha}(t) = \varepsilon_{\alpha}(t) - \frac{1}{3}\theta(t) \\ \sigma(t) &= \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha}(t), \quad S_{\alpha}(t) = \sigma_{\alpha}(t) - \sigma(t) \\ K(t) &= \sum_{n=1}^N K_n e^{-t/\tau_n} + K_{N+1}, \quad G(t) = \sum_{n=1}^N G_n e^{-t/\tau_n} + G_{N+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\theta(t)$ – логарифмическая объемная деформация; $\Theta_{\alpha}(t)$ – компоненты девиатора логарифмических деформаций ($\alpha = 1, 2, 3$), $\sigma(t)$ – среднее истинное напряжение; $S_{\alpha}(t)$ – главные компоненты девиатора истинных напряжений; $K(t), G(t)$ – ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно; $K_1, \dots, K_{N+1}, G_1, \dots, G_{N+1}, \tau_1, \dots, \tau_N$ – набор неотрицательных параметров ядер; $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – функции старения; $t_1(t), t_2(t)$ – приведенные времена.

В дальнейшем относительно функций старения $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ и приведенных времен $t_1(t), t_2(t)$ принимаются следующие допущения: функции старения являются непрерывными положительными функциями времени; приведенные времена являются непрерывными монотонно возрастающими функциями времени, принимающими в начальный момент нулевые значения, т.е. $t_1(0) = t_2(0) = 0$.

Соотношения (2.2), (2.3) могут быть представлены в следующем виде:

$$\sigma_{\alpha}(t) = \varphi_1(t) \sum_{n=1}^{N+1} K_n \theta^{(n)}(t) + 2\varphi_2(t) \sum_{n=1}^{N+1} G_n \Theta_{\alpha}^{(n)}(t) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \theta^{(n)}(t) &= \int_0^t \exp[-(t_1(t) - t_1(\tau))/\tau_n] d\theta(\tau) \\ \Theta_{\alpha}^{(n)}(t) &= \int_0^t \exp[-(t_2(t) - t_2(\tau))/\tau_n] d\Theta_{\alpha}(\tau) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\alpha = 1, 2, 3; \quad n = 1, \dots, N+1; \quad \tau_{N+1} = \infty$$

Каждому из уравнений (2.2) может быть поставлена в соответствие структурная модель в виде системы параллельно соединенных одномерных стареющих вязкоупругих элементов типа “пружина-демпфер” с синхронным изменением коэффициентов жесткости упругих элементов, описываемым функцией $\varphi_k(t)$, и синхронным изменением коэффициентов вязкости демфирующих элементов, описываемым функцией $\varphi_k(t)[dt_k(t)/dt]^{-1}$ ($k = 1$ для модели, соответствующей первому уравнению (2.2), и $k = 2$ для моделей, соответствующих остальным уравнениям этой системы). В рамках этих структурных моделей функции $\theta^{(n)}(t), \Theta_{\alpha}^{(n)}(t)$ могут интерпретироваться, как деформации n -го упругого элемента соответствующей модели.

С учетом принятого допущения о неподвижности главных осей тензора истинных напряжений относительно материала частицы выражение для удельной (на единицу объе-

ма деформированной частицы) мощности внутренних сил $W(t)$ может быть представлено в виде

$$W(t) = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha}(t) \frac{d\varepsilon_{\alpha}(t)}{dt} = W_e(t) + W_*(t) + W_{\varphi}(t) \quad (2.6)$$

$$W_e(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\varphi_1(t)}{2} \sum_{n=1}^{N+1} K_n [\theta^{(n)}(t)]^2 + \frac{3}{2} \varphi_2(t) \sum_{n=1}^{N+1} G_n [\varepsilon_u^{(n)}(t)]^2 \right\}$$

$$W_*(t) = \varphi_1(t) \frac{dt_1(t)}{dt} \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{\tau_n} [\theta^{(n)}(t)]^2 + 3\varphi_2(t) \frac{dt_2(t)}{dt} \sum_{n=1}^N \frac{G_n}{\tau_n} [\varepsilon_u^{(n)}(t)]^2 \quad (2.7)$$

$$W_{\varphi}(t) = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \sum_{n=1}^{N+1} K_n [\theta^{(n)}(t)]^2 - \frac{3}{2} \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \sum_{n=1}^{N+1} G_n [\varepsilon_u^{(n)}(t)]^2$$

$$[\varepsilon_u^{(n)}(t)]^2 = \frac{2}{3} \sum_{\alpha=1}^3 [\vartheta_{\alpha}^{(n)}(t)]^2$$

При выводе выражений (2.6), (2.7) были использованы соотношения (2.4), (2.5), а также соотношения

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\theta^{(n)}(t)}{dt} + \frac{dt_1(t)\theta^{(n)}(t)}{dt \tau_n} \quad (2.8)$$

$$\frac{d\vartheta_{\alpha}(t)}{dt} = \frac{d\vartheta_{\alpha}^{(n)}(t)}{dt} + \frac{dt_2(t)\vartheta_{\alpha}^{(n)}(t)}{dt \tau_n}$$

которые могут быть получены непосредственным дифференцированием соотношений (2.5).

Для вывода инкрементальных соотношений на основе соотношений наследственного типа (2.4), (2.5) примем допущение о постоянстве скоростей логарифмических деформаций и скоростей изменения приведенных времен $t_1(\tau)$, $t_2(\tau)$ на интервале $[t, t + \Delta t]$:

$$\varepsilon_{\alpha}(\tau) = \varepsilon_{\alpha}(t) + \frac{\Delta\varepsilon_{\alpha}}{\Delta t}(\tau - t), \quad t_k(\tau) = t_k(t) + \frac{\Delta t_k}{\Delta t}(\tau - t) \quad (2.9)$$

$$\Delta\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}(t + \Delta t) - \varepsilon_{\alpha}(t), \quad \Delta t_k = t_k(t + \Delta t) - t_k(t) \quad (\alpha = 1, 2, 3; k = 1, 2)$$

При этом допущении функции $\theta^{(n)}(\tau)$ и $\vartheta_{\alpha}^{(n)}(\tau)$ на интервале $[t, t + \Delta t]$ будут иметь следующий вид:

$$\theta^{(n)}(\tau) = \theta^{(n)}(t) \exp\left[-\frac{\Delta t_1(\tau - t)}{\Delta t \tau_n}\right] + \frac{\Delta\theta}{\Delta t}(\tau - t) F_1\left(\frac{\Delta t_1(\tau - t)}{\Delta t \tau_n}\right) \quad (2.10)$$

$$\vartheta_{\alpha}^{(n)}(\tau) = \vartheta_{\alpha}^{(n)}(t) \exp\left[-\frac{\Delta t_2(\tau - t)}{\Delta t \tau_n}\right] + \frac{\Delta\vartheta_{\alpha}}{\Delta t}(\tau - t) F_1\left(\frac{\Delta t_2(\tau - t)}{\Delta t \tau_n}\right)$$

$$F_1(x) = (1 - e^{-x})/x, \quad \Delta\theta = \Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3, \quad \Delta\vartheta_{\alpha} = \Delta\varepsilon_{\alpha} - \Delta\theta/3 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

С учетом (2.10) определяющие уравнения (2.4) могут быть представлены в следующем инкрементальном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}(t + \Delta t) &= \varphi_1(t + \Delta t)\sigma^*(t, \Delta t_1) + \varphi_2(t + \Delta t)S_{\alpha}^*(t, \Delta t_2) + \\ &+ [\varphi_1(t + \Delta t)K^*(\Delta t_1) - 2/3\varphi_2(t + \Delta t)G^*(\Delta t_2)]\Delta\theta + 2\varphi_2(t + \Delta t)G^*(\Delta t_2)\Delta\varepsilon_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma^*(t, \Delta t_1) &= \sum_{n=1}^{N+1} K_n \theta^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right), \quad S_{\alpha}^*(t, \Delta t_2) = 2 \sum_{n=1}^{N+1} G_n \vartheta_{\alpha}^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) \\ K^*(\Delta t_1) &= \sum_{n=1}^{N+1} K_n F_1\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right), \quad G^*(\Delta t_2) = \sum_{n=1}^{N+1} G_n F_1\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

В рамках принятых допущений выражение для приращения удельной рассеянной энергии ΔA_* (на единицу объема недеформированной частицы) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta A_* &= \int_t^{t+\Delta t} W_*(\tau) \exp(\theta(\tau)) d\tau = \\ &= \psi_1(t + \delta_1 \Delta t) \Delta t_1 \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{\tau_n} [\bar{\theta}^{(n)}]^2 + 3\psi_2(t + \delta_2 \Delta t) \Delta t_2 \sum_{n=1}^N \frac{G_n}{\tau_n} [\bar{\varepsilon}_u^{(n)}]^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\psi_1(\tau) = \varphi_1(\tau) \exp(\theta(\tau)), \quad \psi_2(\tau) = \varphi_2(\tau) \exp(\theta(\tau))$$

$$[\bar{\theta}^{(n)}]^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [\theta^{(n)}(\tau)]^2 d\tau = [\theta^{(n)}(t)]^2 F_1\left(\frac{2\Delta t_1}{\tau_n}\right) + \theta^{(n)}(t)(\Delta\theta) F_1\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right) + (\Delta\theta)^2 F_2\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right)$$

$$\begin{aligned} [\bar{\varepsilon}_u^{(n)}]^2 &= \frac{2}{3\Delta t} \sum_{\alpha=1}^3 \int_t^{t+\Delta t} [\vartheta_{\alpha}^{(n)}(\tau)]^2 d\tau = \\ &= \frac{2}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \left[F_1\left(\frac{2\Delta t_2}{\tau_n}\right) [\vartheta_{\alpha}^{(n)}(t)]^2 + F_1^2\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) \vartheta_{\alpha}^{(n)}(t) \Delta \vartheta_{\alpha} + F_2\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) (\Delta \vartheta_{\alpha})^2 \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$F_2(x) = (F_1(2x) - 2F_1(x) + 1)/x^2$$

Величины δ_1, δ_2 лежат в диапазоне от 0 до 1 (использовалась теорема о среднем).

Для перехода к тензорному представлению инкрементальных соотношений (2.12), (2.14) обозначим через $\mathbf{e}_{\alpha}(\tau)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) ортонормированный базис из главных направлений тензора истинных напряжений в момент времени τ и введем следующие тензоры:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\tau) &= \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha}(\tau) \mathbf{e}_{\alpha}(\tau) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(\tau), \quad \boldsymbol{\vartheta}^{(n)}(\tau) = \sum_{\alpha=1}^3 \vartheta_{\alpha}^{(n)}(\tau) \mathbf{e}_{\alpha}(\tau) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(\tau) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t(t + \Delta t) &= \sum_{\alpha=1}^3 \Delta \varepsilon_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}(t + \Delta t) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(t + \Delta t) = \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^3 \ln\left(\frac{\lambda_{\alpha}(t+\Delta t)}{\lambda_{\alpha}(t)}\right) \mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t)$$

где \otimes – символ операции тензорного произведения двух векторов. Тензор $\boldsymbol{\sigma}(\tau)$ является тензором истинных напряжений, а тензор $\boldsymbol{\epsilon}_i(t+\Delta t)$ – левым тензором логарифмических деформаций по отношению к конфигурации в момент времени t . Обозначим через $\mathbf{R}_i(t+\Delta t)$ ортогональный тензор поворота, переводящий базис $\mathbf{e}_{\alpha}(t)$ в базис $\mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t)$. Тогда

$$\mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t) = \mathbf{R}_i(t+\Delta t)\mathbf{e}_{\alpha}(t) \tag{2.17}$$

$$\mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t) = \mathbf{R}_i(t+\Delta t)[\mathbf{e}_{\alpha}(t) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(t)]\mathbf{R}_i^T(t+\Delta t)$$

С учетом введенных тензорных обозначений (2.16) и соотношений связи (2.17) между элементами тензорных базисов $\mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(t+\Delta t)$ и $\mathbf{e}_{\alpha}(t) \otimes \mathbf{e}_{\alpha}(t)$ инкрементальные соотношения (2.12) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t) = & \varphi_1(t+\Delta t)\boldsymbol{\sigma}^*(t, \Delta t_1)\mathbf{I} + \varphi_2(t+\Delta t)\mathbf{R}_i(t+\Delta t)\mathbf{S}^*(t, \Delta t_2)\mathbf{R}_i^T(t+\Delta t) + \\ & + (\varphi_1(t+\Delta t)K^*(\Delta t_1) - 2/3\varphi_2(t+\Delta t)G^*(\Delta t_2))\theta_i(t+\Delta t)\mathbf{I} + \\ & + 2\varphi_2(t+\Delta t)G^*(\Delta t_2)\boldsymbol{\epsilon}_i(t+\Delta t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

где \mathbf{I} – единичный тензор, $\theta_i(t+\Delta t) = \Delta\theta$ – след тензора $\boldsymbol{\epsilon}_i(t+\Delta t)$,

$$\mathbf{S}^*(t, \Delta t_2) = 2 \sum_{n=1}^{N+1} G_n \exp\left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) \boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t) \tag{2.19}$$

В инкрементальном соотношении (2.18) величины $\theta^{(n)}(t)$, $\boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t)$ играют роль параметров состояния. После решения краевой задачи на текущем временном шаге эти параметры должны вычисляться для момента времени $t+\Delta t$ с использованием соотношений, вытекающих из скалярных соотношений (2.10) и определений (2.16) тензоров $\boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t+\Delta t)$ и $\boldsymbol{\epsilon}_i(t+\Delta t)$

$$\begin{aligned} \theta^{(n)}(t+\Delta t) = & \theta^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right) + \theta_i(t+\Delta t)F_1\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right) \\ \boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t+\Delta t) = & \exp\left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right)\mathbf{R}_i(t+\Delta t)\boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t)\mathbf{R}_i^T(t+\Delta t) + F_1\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right)\boldsymbol{\Xi}_i(t+\Delta t) \\ \boldsymbol{\Xi}_i(t+\Delta t) = & \boldsymbol{\epsilon}_i(t+\Delta t) - \theta_i(t+\Delta t)\mathbf{I}/3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Тензорные аналоги выражений (2.15) для величин $[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_u^{(n)}]^2$, входящих в выражение (2.14) для приращения удельной рассеянной энергии $\Delta\Lambda_*$, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} [\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_u^{(n)}]^2 = & \frac{2}{3}F_1\left(\frac{2\Delta t_2}{\tau_n}\right)\text{tr}[\boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t)]^2 + \frac{2}{3}F_2\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right)\text{tr}[\boldsymbol{\Xi}_i(t+\Delta t)]^2 + \\ & + \frac{2}{3}F_1^2\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right)\text{tr}[\mathbf{R}_i(t+\Delta t)\boldsymbol{\Xi}^{(n)}(t)\mathbf{R}_i^T(t+\Delta t)\boldsymbol{\Xi}_i(t+\Delta t)] \end{aligned} \tag{2.21}$$

где tr – след тензора.

Полученные для частного случая деформирования, когда главные оси тензора истинных напряжений “вморожены” в материал частицы, инкрементальные определяющие соотношения (2.18) в сочетании с соотношениями (2.20) для скалярных $\theta^{(n)}(t)$ и тензорных $\mathfrak{E}^{(n)}(t)$ параметров состояния допускают естественное обобщение на общий случай деформирования. При этом тензор $\mathfrak{e}_i(t + \Delta t)$ следует трактовать, как логарифм левого тензора растяжения по отношению к конфигурации в момент времени t , а тензор $\mathbf{R}_i(t + \Delta t)$ – как тензор жесткого поворота частицы при ее переходе от конфигурации в момент времени t к конфигурации в момент времени $t + \Delta t$.

3. Алгоритм численного решения квазистатической краевой задачи с использованием инкрементальных соотношений эндохронной модели. Для решения краевой задачи в момент времени $t + \Delta t$ используется слабая форма уравнений равновесия для этого момента времени

$$\int_{V(t + \Delta t)} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t + \Delta t)\mathbf{d}(\mathbf{x})]dV - \int_{V(t + \Delta t)} \rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}, t + \Delta t)\mathbf{v}(\mathbf{x})dV - \int_{S(t + \Delta t)} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t + \Delta t)\mathbf{n}(\mathbf{x})]\mathbf{v}(\mathbf{x})dS = 0 \quad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ – поле тензора истинных напряжений в момент времени $t + \Delta t$; $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ – поле вектора массовых сил; $\rho(\mathbf{x})$ – поле плотности в момент времени $t + \Delta t$; $V(t + \Delta t)$ – объем, занимаемый телом в момент времени $t + \Delta t$; $S(t + \Delta t)$ – поверхность тела в момент времени $t + \Delta t$; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $S(t + \Delta t)$; $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ – поле вектора виртуальной скорости; $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ – поле тензора скоростей деформаций, соответствующее полю $\mathbf{v}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \lfloor \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))^T \rfloor / 2 \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) должно удовлетворяться для любого кусочно-гладкого поля виртуальной скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего однородным граничным условиям на тех участках границы тела, где заданы граничные условия в перемещениях.

После замены $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X})$, соответствующей переходу от конфигурации в момент t к конфигурации в момент $t + \Delta t$, уравнение (3.1) примет вид [11]:

$$\int_{V(t)} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t + \Delta t)\mathbf{d}^0(\mathbf{X})]J_i(\mathbf{X})dV^0 - \int_{V(t)} \rho^0(\mathbf{X})\mathbf{b}^0(\mathbf{X})\mathbf{v}^0(\mathbf{X})dV^0 - \int_{S(t)} [\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t + \Delta t)\mathbf{F}_i^{-T}(\mathbf{X})\mathbf{n}^0(\mathbf{X})]\mathbf{v}^0(\mathbf{X})J_i(\mathbf{X})dS^0 = 0 \quad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X}), t + \Delta t)$ – тензор напряжений в момент времени $t + \Delta t$ в частице, которая в момент времени t занимала пространственное положение \mathbf{X} , $\mathbf{F}_i(\mathbf{X}) = \nabla \boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X})$ – тензор градиента деформации (по отношению к конфигурации в момент t); $\rho^0(\mathbf{X})$ – поле плотности в момент времени t ; $\mathbf{n}^0(\mathbf{X})$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $S(t)$:

$$J_i(\mathbf{X}) = \det \mathbf{F}_i(\mathbf{X}), \quad \mathbf{b}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X}), t + \Delta t), \quad \mathbf{v}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X}))$$

$$\mathbf{d}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{d}(\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X})) = \lfloor (\nabla \mathbf{v}^0(\mathbf{X}))\mathbf{F}_i^{-1}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_i^{-T}(\mathbf{X})(\nabla \mathbf{v}^0(\mathbf{X})) \rfloor / 2$$

“Приведенное” к конфигурации в момент t поле $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t + \Delta t)$ тензора истинных напряжений в момент $t + \Delta t$, естественно, зависит от градиента деформации $\mathbf{F}_i(\mathbf{X})$. Эта зависи-

мость описывается инкрементальными соотношениями (2.18). Следует отметить, что эндохронная модель [1] базируется на допущении о том, что мгновенные значения функций старения $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ и скоростей изменения приведенных времен $dt_1(\tau)/d\tau$, $dt_2(\tau)/d\tau$ зависят от мгновенных значений некоторых параметров состояния, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) &= F_k(p_l^{(e)}(\tau), p_m^{(i)}(\tau)) \quad (k = 1, 2) \\ dt_k(\tau)/d\tau &= \Phi_k(p_l^{(e)}(\tau), p_m^{(i)}(\tau)) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $p_l^{(e)}(\tau)$ – набор “внешних” параметров состояния, не зависящих от процесса нагружения (температура, влажность, степень полимеризации), $p_m^{(i)}(\tau)$ – набор деформационных, силовых и/или энергетических параметров, зависящих от процесса нагружения. Из этого следует, что входящие в инкрементальные соотношения (2.18) величины $\varphi_k(t + \Delta t)$ и Δt_k ($k = 1, 2$), вообще говоря, зависят от решения задачи в конце временного шага. В разработанном алгоритме используется аналог явной схемы, т.е. величины $\varphi_k(t + \Delta t)$ и Δt_k заменяются в соотношениях (2.18) их оценками, полученными на основе имеющейся к моменту времени t предыстории параметров состояния.

При численном решении уравнения (3.3) методом конечных элементов [12] используются аппроксимации функций $\chi_i(\mathbf{X})$ и $v^0(\mathbf{X})$, линейно зависящие от наборов соответствующих узловых переменных

$$x_i(\mathbf{X}) = X_i + \sum_N N_N(\mathbf{X}) u_{3N-3+i}, \quad v_i^0(\mathbf{X}) = \sum_N N_N(\mathbf{X}) v_{3N-3+i} \quad (3.5)$$

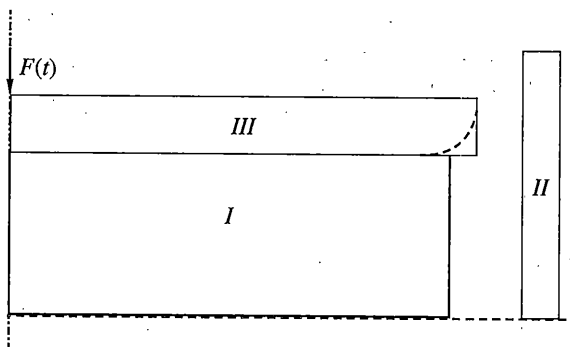
где $N_N(\mathbf{X})$ – набор финитных интерполирующих функций, определяемый сеткой конечных элементов и типом этих элементов, u_M – набор узловых перемещений, v_M – набор узловых виртуальных скоростей.

После подстановки аппроксимации (3.5) в уравнение (3.3) последнее сводится к линейной комбинации узловых виртуальных скоростей v_M , коэффициентами которой являются нелинейные функции узловых перемещений u_M . Полученная система нелинейных уравнений относительно узловых перемещений u_M решается методом Ньютона.

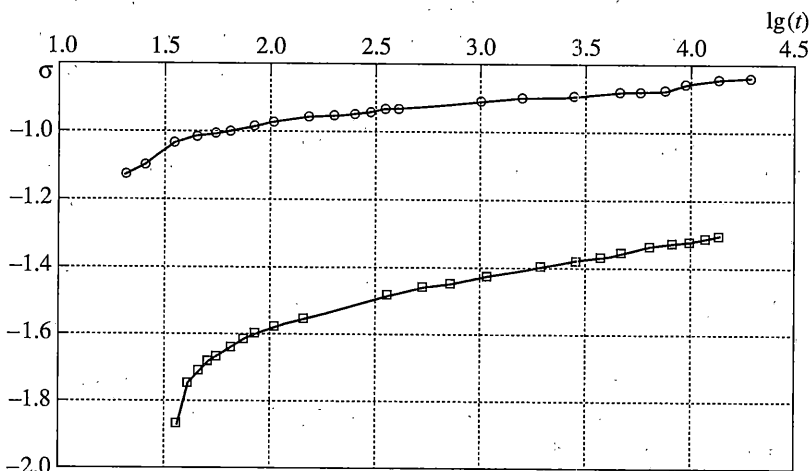
4. Контактная задача о стесненном сжатии резинового диска. Диск (I), заключенный в жесткую обойму (II), подвергается осевому сжатию путем приложения осевой силы $F(t)$ к жестким обкладкам III (фиг. 1). В силу симметрии расчетная схема включает половину диска (по высоте) и одну обкладку. В недеформированном состоянии имеется зазор между боковой поверхностью диска и обоймой. В процессе сжатия этот зазор может выбираться. Допускается проскальзывание между торцами диска и обкладками, а также между боковой поверхностью деформированного диска и обоймой. Величина коэффициента трения C_f в зонах контакта “резина-металл” принималась равной 0.3.

Расчетная схема имеет следующие геометрические параметры: полутолщина диска 6.1 мм; радиус диска 14.4 мм; радиус обкладки 15 мм; внутренний радиус обоймы 17.1 мм. В качестве нагрузки задается осевое перемещение обкладки $u_0(t)$: на этапе активного нагружения $u_0(t) = U_0 t/t_0$ ($U_0 = -2.3$ мм, $t_0 = 60$ с, $t \leq t_0$); на этапе релаксации $u_0(t) = U_0$ ($t > t_0$). Использовался простейший “деформационный” вариант эндохронной модели:

$$\begin{aligned} K(t) &= K_0, \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = dt_1(t)/dt = 1 \\ dt_2(t)/dt &= 1 + [\max(0, \varepsilon_u(t) - \varepsilon_0)/\varepsilon_s]^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $\epsilon_u(t)$ – интенсивность деформаций, вычисляемых с использованием инкрементально-соотношения

$$\epsilon(t + \Delta t) = \mathbf{R}_r(t + \Delta t)\epsilon(t)\mathbf{R}_r^T(t + \Delta t) + \epsilon_r(t + \Delta t) \quad (4.2)$$

Если главные оси деформации неподвижны относительно материала частицы, то деформации (4.2) в точности совпадают с логарифмическими.

Идентификация параметров модели проводилась по результатам двух опытов на релаксацию напряжений при одноосном сжатии. Величина деформации в первом опыте составляла -18.5% , а во втором опыте -30.5% . Указанным величинам инженерной деформации соответствуют логарифмические деформации -20.46% и -36.38% . На фиг. 2 показаны результаты этих опытов в виде зависимостей истинного напряжения (в МПа) от логарифма времени (в секундах). Величина параметра ϵ_0 принималась равной абсолютной величине логарифмической деформации в первом опыте на релаксацию ($\epsilon_0 = 20.46\%$). Результаты этого опыта использовались для идентификации параметров ядра релаксации G_n . Выбор именно этого опыта объясняется тем, что в нем реализуется величина деформации, близкая к средней (по времени активного нагружения) деформа-

ции сжатия диска между обкладками (максимальная величина сжимающей осевой деформации диска составляет $\epsilon_{\max} \approx -37.7\%$). Ядро релаксации, полученное с использованием априорной информации об уровне деформированного состояния, можно трактовать, как “секущее ядро”. Этот подход к уменьшению степени нелинейности оператора аналогичен использованию “секущего” модуля в методе упругих решений [13].

При идентификации параметров G_n использовалось свойство слабой сжимаемости материала (величина объемного модуля K_0 принималась равной 10000 МПа). Из соотношений (2.2) следует, что в случае $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = dt_1(t)/dt = dt_2(t)/dt = 1$ при одноосном нагружении несжимаемого материала связь между истинным напряжением и соответствующей логарифмической деформацией описывается линейным соотношением наследственного типа, а соответствующее ядро $E(t)$ связано с ядром сдвиговой релаксации $G(t)$ соотношением $E(t) = 3G(t)$. Это обстоятельство позволяет использовать для идентификации параметров G_n один из стандартных методов, разработанных для линейной вязкоупругости. При этом результаты опыта на одноосную релаксацию следует представить в виде зависимости истинного напряжения от времени, а в качестве меры одноосной деформации взять логарифмическую меру.

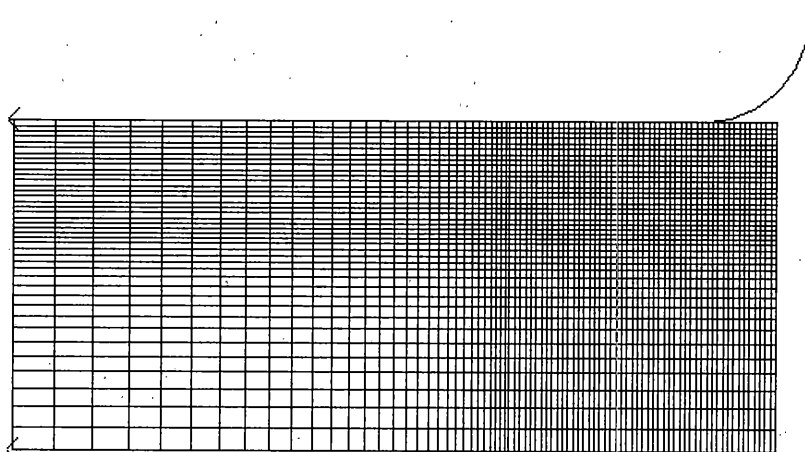
Набор времен релаксации τ_n задавался априорно (одна экспонента на порядок времени), а параметры G_n определялись из условия минимума среднеквадратичного отклонения между результатами расчета и эксперимента. Расчет одноосного нагружения проводился с учетом длительности переходного режима (21 с). Ниже представлен полученный набор параметров G_n вместе со значениями времен релаксации τ_n :

n	1	2	3	4	5	6
$\tau_n, \text{с}$	10	100	1000	10000	100000	∞
$G_n, \text{МПа}$	0.4227	0.1443	0.0641	0.0804	0.2603	1.1423

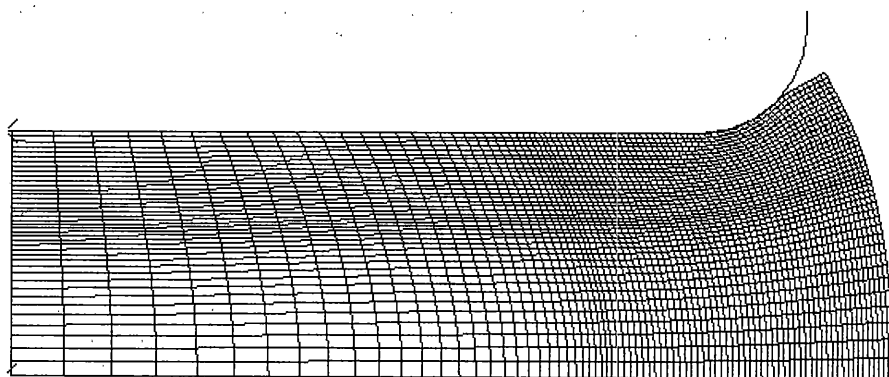
При указанных значениях параметров τ_n, G_n величина максимального отклонения между теоретическим прогнозом напряжений и результатами первого опыта на одноосную релаксацию не превышает 1%. Величина параметра ϵ_s определялась из условия минимума среднеквадратичного отклонения между теоретическим прогнозом напряжений и результатами второго опыта на одноосную релаксацию. Оптимальное значение параметра ϵ_s составляет 3.75%. При этом среднее значение отклонения между результатами расчета и результатами второго опыта на одноосную релаксацию составляет 2.5%.

Расчеты стесненного сжатия диска проводились с использованием схемы автоматического выбора величины временного шага Δt . В рамках этой схемы величина Δt регулировалась скоростью сходимости метода Ньютона на предшествующем временном шаге. Полный временной интервал $[0, 60000 \text{ с}]$ разбивался на 6 диапазонов ($[0, 30], [30, 50], [50, 60], [60, 600], [600, 6000], [6000, 60000]$), в каждом диапазоне задавались величины начального, минимального и максимального временных шагов. Минимальная величина шага составляла приблизительно 0.0001 длительности диапазона. Чтобы избежать проблем, связанных с особой точкой на поверхности контакта, производилось скругление края обкладки (пунктир на фиг. 1). В ходе расчетов обнаружилась сильная зависимость скорости сходимости метода Ньютона от величины радиуса скругления r . При малых значениях r во временном диапазоне решения обнаруживался “критический” момент t_{cr} , для которого имела место расходимость метода Ньютона даже при минимальной величине временного шага Δt . Ниже представлена зависимость t_{cr} от величины r :

$r, \text{мм}$	0.6	1.0	1.5	2.0
$t_{cr}, \text{с}$	49.5	53.7	56.5	60.0



Фиг. 3

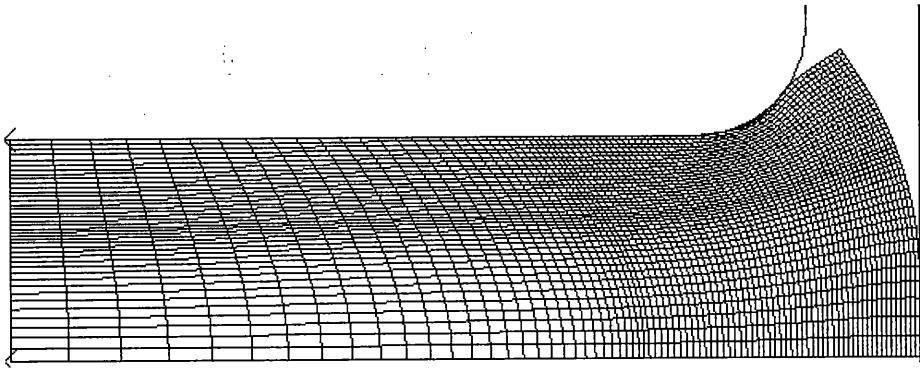


Фиг. 4

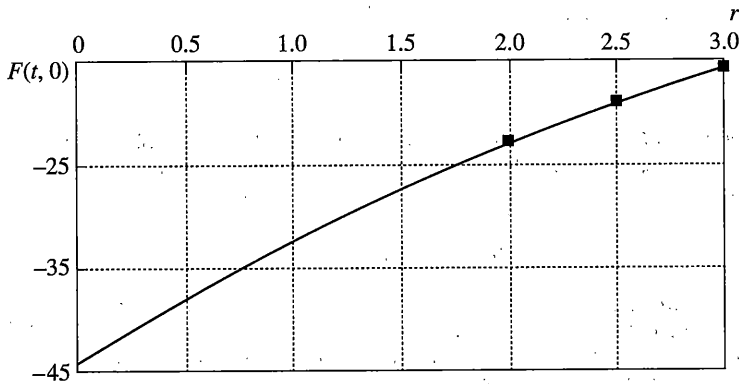
Кроме указанных выше значений радиуса скругления r рассматривались также варианты $r = 2.5$ мм и $r = 3.0$ мм. Для этих вариантов “критических” моментов не было обнаружено, т.е. решение задачи было получено на полном временном интервале $[0, 60000$ с]. На фиг. 3 показана исходная сетка конечных элементов (вариант $r = 2$ мм), а на фиг. 4, 5 – деформированная сетка для моментов $t = 40.9$ с и $t = 51.6$ с.

Результаты расчета сравнивались с результатами эксперимента, в котором производилось измерение временной зависимости сжимающей силы $F(t)$. Учитывая существенную зависимость расчетной сжимающей силы от радиуса скругления r кромки обкладки, производилась ее экстраполяция при $r \rightarrow 0$. Поправочный коэффициент вычислялся путем квадратичной экстраполяции расчетных значений сжимающей силы, полученных при $r = 2.0, 2.5, 3.0$ мм в конце участка активного нагружения ($t = t_0$). На фиг. 6 показана экстраполяционная кривая (размерность силы $F(t_0)$ МПа \cdot см²).

На фиг. 7 показаны расчетные зависимости $F(t)$, а также экспериментальные точки. Кривые 1, 2 относятся к случаю контакта без трения ($C_f = 0$), кривые 3, 4 – к случаю $C_f = 0.3$. Кривые 1, 3 получены для эндохронной модели (4.1), а кривые 2, 4 – для модели



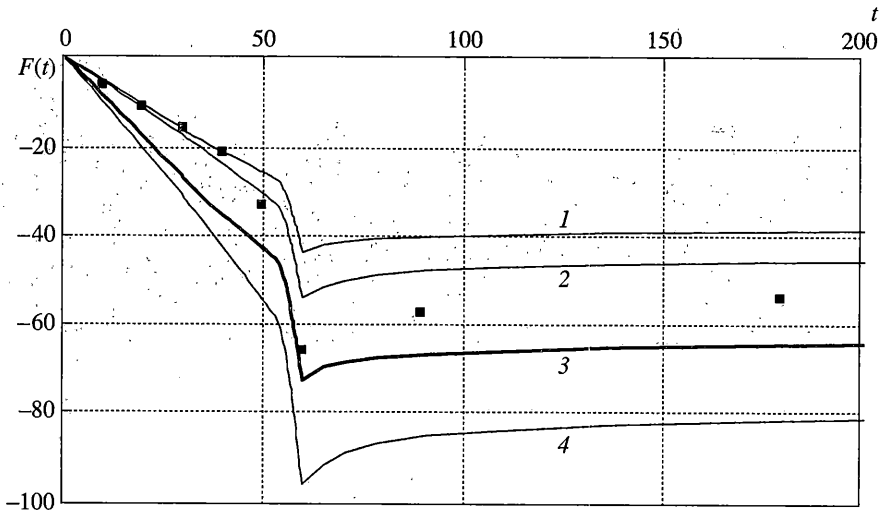
Фиг. 5



Фиг. 6

$dt_2(t)/dt \equiv 1$. Все кривые имеют характерный излом при $t \approx 50$ с. В этот момент начинается контакт боковой поверхности диска с обоймой. Как видно из фиг. 7, использование простейшего варианта (4.1) эндохронной модели позволяет получить достаточно точную оценку максимальной величины сжимающей силы (кривая 3). В эксперименте измерялась также величина мениска материала в зазоре между обоймой и обкладкой. В конце участка активного нагружения эта величина составляла около 2.2 мм. Расчетное значение величины мениска в этот момент времени находилось в диапазоне от 1.9 мм до 2.3 мм (в зависимости от радиуса скругления r и коэффициента трения C_f).

5. Заключение. Предложенный подход к обобщению нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов на случай конечных деформаций позволяет сохранить главные достоинства этой теории. В частности, сохраняются возможности структурно-энергетического анализа напряженно-деформированного состояния. Разработанный алгоритм численного решения начально-краевых задач для предложенной эндохронной модели может найти практическое применение для прогнозирования длительной прочности конструкций из наполненных полимерных материалов при конечных деформациях.



Фиг. 7

Авторы благодарят Ю.П. Зезина за проведение экспериментов и обсуждение результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-08037, 05-01-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 63–76.
2. Быков Д.Л. Использование структурных составляющих удельной работы внутренних сил для описания сопротивления вязкоупругих материалов // Изв. АН. МТТ. 2003. № 3. С. 99–111.
3. Апетьян В.Э., Быков Д.Л. Структурно-энергетический анализ одноосного напряженно-деформированного состояния при сжатии и разгрузке вязкоэластичного материала // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 63–76.
4. Быков Д.Л. Метод структурно-энергетического анализа напряженно-деформированного состояния вязкоупругих материалов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2006. № 1. С. 59–62.
5. Ильющин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. Lockett F.J. Nonlinear Viscoelastic Solids. L.; N.Y.: Acad. Press, 1972. 195 p.
7. Tanner R.I. From A to (BK)Z in constitutive relations // J. Rheology. 1988. V. 32. № 7. P. 673–702.
8. Yang L.M., Shim V.P.W., Lim C.T. A visco-hyperelastic approach to modelling the constitutive behaviour of rubber // Intern. J. Impact Engineering. 2000. V. 24. P. 545–560.
9. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 189–205.
10. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Расчетная оценка влияния поврежденности твердых топлив на прочность изготавливаемых из них зарядов ракетных двигателей // Ракетостроение и космонавтика. 1999. № 16. С. 82–91.
11. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
13. Быков Д.Л., Шачнев В.А. Об одном обобщении метода упругих решений // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 290–298.