

## **СВЯЗАННЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ И ПОВРЕЖДЕННОСТИ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

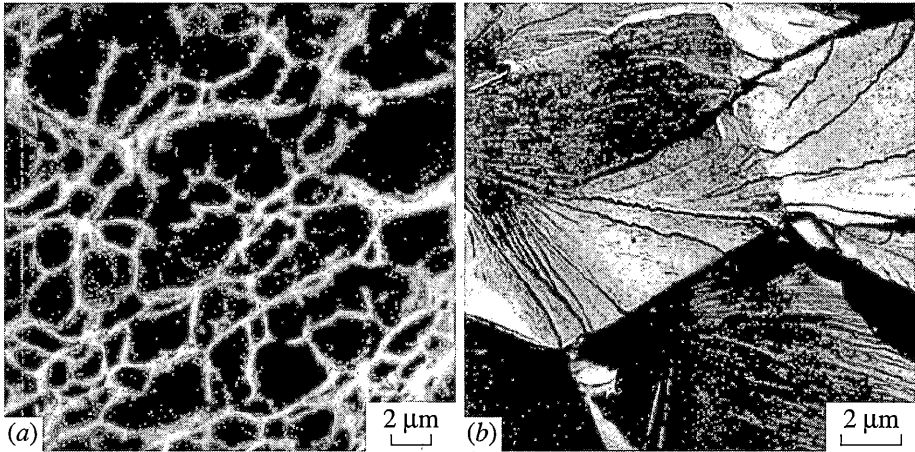
Приводится обзор современного состояния по связанным моделям упругопластичности и поврежденности. Обсуждаются разные подходы (физический и термодинамический) к построению моделей поврежденности. Рассмотрена связь поврежденности, разупрочнения и реологической неустойчивости неупругих материалов. Приведено исследование масштабного эффекта. Дана корректная постановка задачи и способы регуляризации некорректных моделей. Рассмотрены упругопластические модели, не зависящие от скорости деформаций, и упруговязкопластические, зависящие от нее. Упор сделан на теоретически построенные модели, учитывающие зарождение и рост пор в упругопластическом и упруговязкопластическом материалах.

Предложен новый эффективный численный метод интегрирования связанных определяющих уравнений пластичности с поврежденностью, основанный на расщеплении упругопластических уравнений. Дана его реализация при моделировании квазистатических и динамических задач поврежденности. Приведено сравнение с наиболее совершенным из существующих методов интегрирования рассматриваемых задач, использующихся в современных пакетах прикладных программ МКЭ.

**1. Обзор основных работ по поврежденности.** Исторически первые попытки описать континуальное разрушение материала основывались на критериях или теориях прочности, которые рассматривали разрушение не как процесс, развивающийся в течение нагружения, а как напряженно-деформированное состояние материала – разрушенное или неразрушенное. Этот подход во многом противоречил и экспериментальным наблюдениям и общим положениям механики сплошных сред. Следующим этапом в развитии теории континуального разрушения было введение понятия о длительной прочности [8, 10, 77] – условие, при котором наступает разрушение, зависит от продолжительности действия нагружения.

В шестидесятые годы прошлого века в работах советской школы механиков [14, 36, 10] оформился новый подход, в котором разрушение, также как деформация, стало рассматриваться как процесс, связанный с нагружением. Такая точка зрения очень быстро завоевала признание и в течение короткого времени сложилось новое направление в механике сплошных сред – механика повреждающихся сред или механика континуального разрушения [11, 4, 32, 37, 6, 24, 25, 34; 13, 75, 53, 79, 63, 66, 70] и многие другие.

В первых работах по теории поврежденности на основе представления о разрушении как о процессе развития в материале микродефектов в виде микротрещин и микропор поврежденность ассоциировалась с образованием пустот (пористостью), приводящей к уменьшению площади, по которой действует напряжение и, следовательно, к уменьшению упругих модулей материала, изменение которых легко поддается измерению в эксперименте [16, 37, 63, 64] и др.



Фиг. 1

Но уже в начале развития теории повреждаемости стало ясно, что описание поврежденности скалярной величиной, такой как пористость, недостаточно и поврежденность следует описывать тензорной величиной [10]. В работах [4, 25, 66, 65] были предложены конкретные тензорные меры поврежденности. Например, Вакуленко А.А., Качанов Л.М. [4] предложили тензор поврежденности

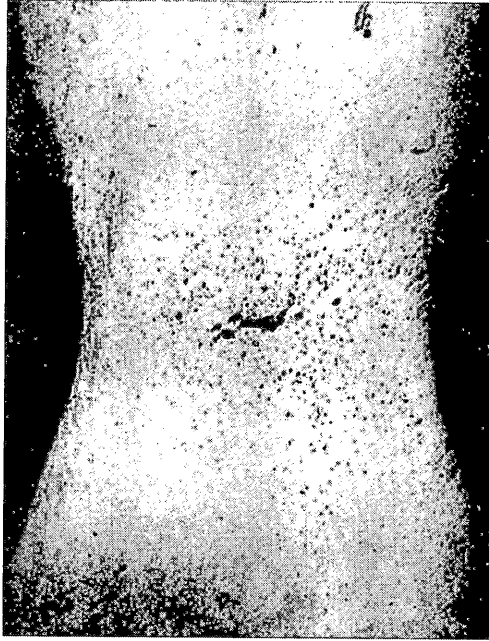
$$\hat{\omega} = \frac{1}{2V} \sum_i \int_{S_i} (u_i \otimes n_i + n_i \otimes u_i) dS_i$$

где  $V$  – элементарный объем, содержащий микротрещины, берега которых характеризуются смещением  $u_i$ ;  $dS_i$  – элемент поверхности с нормалью  $n_i$ . Откуда видно, что макромера поврежденности получается из микрорассмотрения дефектов усреднением по представительному объему  $V$ . Более формальное введение макроповрежденности было дано [66] как обобщение скалярного представления поврежденности, предложенного в [16]:

$$D = \sum_{i=1}^3 D_i (n_i \otimes n_i)$$

Здесь  $D_i$  – главные значения, равные относительноному уменьшению главных площадок с нормалью  $n_i$ . Возможны и другие тензорные меры поврежденности, связанные не только с пористостью, но и с деформацией поврежденности материала или ее скоростью [29].

Для построения модели повреждающегося материала необходимо определить: 1) модель неповрежденного материала или матрицы; 2) модель и механизм зарождения и эволюции дефектов. Поэтому так же как и в теории деформации сплошных материалов здесь нужно различать два основных класса сред: 1) упругие среды и их квазихрупкое разрушение; 2) неупругие среды с вязким типом разрушения. Соответственно различаются и типы дефектов: при хрупком разрушении – микротрещины, при вязком – дислокации (при умеренных вязкопластических деформациях) и микропоры (при больших пластических деформациях). Характерные картины разрушения для вязких и хрупких материалов приведены на фиг. 1 (а) – вязкое разрушение, (б) – хрупкое разрушение.



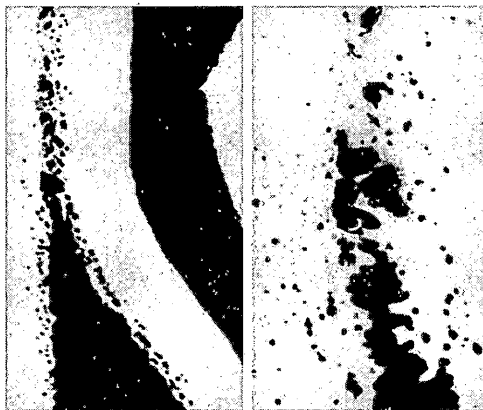
Фиг. 2

Основные типы экспериментов по исследованию разрушения – это сдвиг (растяжение) при постоянной скорости деформации в квазистатике и соударение пластин (стержней) в динамике. При сдвиге происходит сильный локальный разогрев и термическое разупрочнение, которое часто сопровождается фазовым превращением в полосе сдвига, т.е. локальное явление (микродефекты сливаются в одну полосу адиабатического сдвига), в которой можно видеть и образование пор. Полосы локализации могут наблюдаться не только в пластических, но и в хрупких материалах, что возможно вследствие сильного локального разогрева и разупрочнения [69].

Основное отличие между высокотемпературным и низкотемпературным разрушением квазихрупких поликристаллических материалов заключается в разном механизме разрушения. В первом случае благодаря высокой термоактивации дефектов и их большой подвижности они успевают обеспечить полное межкристаллитное разрушение вследствие порообразования, а во втором не успевают смягчить концентрацию напряжений, вызванное появлением трещины, и предотвратить ее катастрофическое распространение, благодаря чему и происходит хрупкое разрушение практически за счет распространения изолированных макротрещин [40].

На фиг. 2 показано образование пор в образце при растяжении [71].

Другой тип экспериментов – это разрушение отколом при соударении пластин в результате взаимодействия волн растяжения, отраженных от свободной поверхности. Опыты [52, 53, 75, 13] и др. многократно подтверждали этот факт. Для пластических материалов здесь наблюдается вязкий откол с образованием сферических пор за счет всестороннего растяжения. Для разрушения требуется достаточная скорость соударения и продолжительность растягивающего импульса, чтобы механизм зарождения, роста и слияния привел бы к образованию трещины. На фиг. 3 изображено образование макротрещины (слева) вследствие слияния микропор (справа) в упругопластическом материале в экспериментах по соударению пластин [52, 53].



Фиг. 3

При разрушении хрупких материалов описание опирается на гипотезу о трансформации энергии упругой деформации в поверхностную энергию, образующейся изолированной трещины [57, 2], а при континуальном разрушении в поверхностную энергию микротрещин [32, 21]. При этом постулируется уравнение локального баланса вида

$$\rho(u + u_f) = \sigma : (\nabla \otimes v) - \rho \delta_f$$

где  $u_f$  – поверхностная энергия, зависящая от тензора поврежденности  $D$ ;  $\delta_f$  – диссипация континуального разрушения [19, 7]. При этом за меру баланса энергии принимается, так же как в теории упруговязкопластического течения, динамическая перегрузка трансформирующейся упругой энергии по отношению к ее стационарному равновесному значению [23, 35]. В такой модели разгрузка происходит, когда внутренняя энергия высвобождается быстрее, чем растет внутренняя энергия.

В современной механике конституального разрушения рассматривается не только разрушение хрупких материалов при малых деформациях, но и разрушение пластических и упруговязкопластических материалов при больших деформациях.

Влияние микродефектов на несущую способность упругого стержня при растяжении проявляется в уменьшении эффективного модуля Юнга  $\sigma = \tilde{E} \varepsilon$ , где  $\tilde{E} = E(1 - D)$  – эффективный модуль, уменьшающийся с ростом поврежденности  $D$ , при этом в квазиупругом теле появляются остаточные деформации. Это сближает модель упругого тела с поврежденностью и упругопластического тела.

Понятия пластической деформации и деформации поврежденности близки и макро-модели поврежденности подобно теории пластичности стали развиваться в дальнейшем на основе теории сплошных сред с внутренними переменными. Почва для их создания была подготовлена заранее благодаря развитию теории вязкопластичности.

Гипотезы, на которых строятся континуальные теории поврежденности, близки по своей сущности к гипотезам, принимаемым в теории упруговязкопластичности. Это существование предельных поверхностей, наличие неупругого потенциала [19]; остаточных деформаций и поверхностей разрушения [29]; ассоциированный закон деформирования и др.

Поврежденность может быть изначальной, может возникать только вследствие нагружения (зарождение пор) и иметь пороговое условие поврежденности, аналогичное условию пластичности, которое можно принять за поверхность разрушения и в соответствии с ассоциированным законом за потенциал деформации поврежденности.

Наиболее существенным физическим различием между пластической деформацией и повреждаемостью является масштаб их носителей – дефектов. Если в теории пластичности это дислокации, масштаб которых  $10^{-10}$ – $10^{-12}$  см, то масштаб микротрещин и пор – носителей повреждаемости –  $10^{-2}$ – $10^{-4}$  см. Кардинально отличаются и физические микромеханизмы их развития.

Физическим механизмом нелинейной деформации является зарождение и развитие в материале дефектов кристаллической решетки (дислокаций, вакансий, свободных атомов) под действием термомеханической нагрузки. Механизмы развития дефектов, как и их природа, многообразны и исследуются в физике твердого тела. В настоящее время хорошо изучены на микроуровне природа дислокаций и их связь с пластической деформацией.

Следует подчеркнуть еще один существенный момент: до появления теории поврежденности критерий разрушения, как правило, не был связан с определяющими уравнениями материала и предлагался независимо. С развитием моделей поврежденности, описывающих ее, этот разрыв сократился. Деформация и континуальное разрушение рассматриваются как независимые, но взаимосвязанные процессы. В ряде работ в качестве критерия разрушения предлагается считать потерю реологической устойчивости поврежденного материала [74, 7]. При этом за критерий разрушения принимается критерий потери устойчивости решения повреждающейся среды по Адамару, так как выполнение последнего приводит к локализации неупругих деформаций и образованию полос сильного разрыва.

Теория поврежденности упругопластических тел при динамическом нагружении была развита в работах [52, 53]; и позже в работе [6], где в качестве меры поврежденности принималась пористость материала – плотность пор, зарождающихся и растущих в процессе пластической деформации материала. В большом числе отечественных и зарубежных работ были предложены различные феноменологические уравнения их эволюции (см. [21, 64]).

При построении моделей повреждающихся сред возможны два основных подхода.

Физический подход к построению моделей повреждающихся материалов, когда в основу модели закладывается определенный микромеханизм образования и развития неупругой деформации и континуального разрушения материалов. Поврежденность моделируется зарождением и ростом определенных микродефектов: дислокаций, микротрещин, микропор и т.д. вплоть до образования микротрещин. Такой подход подразумевает на определенном этапе усреднение или гомогенизацию свойств материалов в микрообъеме (размеры микродефектов составляют  $10^{-12}$ – $10^{-10}$  см) и определение его эффективных свойств, рассматриваемых уже в рамках сплошной среды (характерный мезомасштаб носителей поврежденности –  $10^{-4}$ – $10^{-2}$  см).

Альтернативным ему является термодинамический (или феноменологический) подход к построению континуального разрушения или поврежденности материала. Здесь поврежденный материал изначально предполагается сплошным, обладающим определенной внутренней структурой, которая характеризуется некоторым набором внутренних переменных (в частности поврежденностью, пластической необратимой деформацией и т.п.), связанных с напряженно-деформируемым состоянием материала. Для определения внутренних переменных постулируются кинетические уравнения, согласованные с основными принципами термодинамики и теории определяющих соотношений. Система определяющих уравнений совместно с законами сохранения образуют замкнутую систему уравнений термомеханики, которая описывает поведение материала вплоть до разрушения. Этот подход широко используется в работах многих авторов, см. [1, 21, 64, 72, 73] и др.

В промежуточных подходах вводятся объекты различной природы, из которых состоит материал промежуточного мезомасштаба (зерна, поликристаллы, макротрещи-

ны, молекулярные цепи, многофазные смеси и т.д.). Постулируется определенный механизм образования обратимых и необратимых деформаций материала. Разделы механики, развивающие такие подходы построения определяющих уравнений, объединяются под названием “мезомеханика”, “молекулярная механика”, “механика трещин” и т.д. К этому направлению можно отнести работы [58, 68, 79, 55, 49] и др.

В работе Гарсона [58] было предложено условие пластичности для среды с периодическим расположением сферических пор, полученное из теоретического решения задачи о единичной поре в идеальной упругопластической среде. На его основе Твергаардом [78] и Нидельманом [51] была предложена мезомеханическая модель (GTN-модель) поврежденности эффективного упругопластического материала, независящего от скорости деформации, со скалярной мерой поврежденности – пористостью. Модель учитывает зарождение и рост пор в процессе пластической деформации. Она хорошо согласуется с экспериментальными результатами при медленном квазистатическом нагружении, правильно описывает пластическую сжимаемость материала и эффект дилатансии. В качестве критерия разрушения принимается критическая величина пористости.

GTN-модель получила достаточно широкое распространение и использовалась при решении конкретных задач. Однако, как показали дальнейшие исследования, она не лишена определенных недостатков, главным из которых является независимость повреждаемости от скорости деформации. GTN-модель не учитывает влияние остаточных напряжений на разупрочнение-упрочнение материала. В ней используется скалярная мера повреждаемости, которая не в состоянии описать анизотропный характер разрушения. Перечисленные недостатки приводят к тому, что уравнения GTN-модели не содержат ни масштабного, ни временного параметров и поэтому не в состоянии учесть масштабные эффекты при разрушении. Эти уравнения, так же как и уравнения пластического течения, при нарушении условия устойчивости Дракера дают некорректное описание равновесия среды [3, 48]. При численном моделировании это проявляется в зависимости решения от дискретизации задачи.

В работах автора [27, 28, 29] на основе модифицированного условия пластичности Гарсона была предложена новая микромеханическая модель, которая устраняет недостатки GTN-модели. Эта модель построена на основе дислокационных представлений о развитии пластической деформации при термомеханическом нагружении поликристаллических материалов при умеренных пластических деформациях и на представлениях о зарождении и росте мезодефектов типа пор и микротрещин при больших деформациях. Постулирование определенной корреляции между микро- и макропараметрами позволяет осуществлять переход от микроуравнений к определяющим макроуравнениям механики сплошных сред и получить кинетические уравнения связанной модели упругопластичности с поврежденностью. В результате такого подхода поврежденность описывается тензорной величиной, шаровая часть которой – пористость, а девиаторная часть связана с релаксацией остаточных напряжений. Изменение упругих модулей происходит на стадии появления пористости. Материал матрицы учитывает кинетическое упрочнение и, следовательно, эффект Баушингера.

Перейдем к рассмотрению конкретных микромеханических моделей.

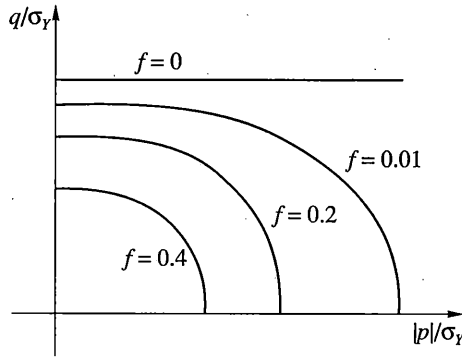
**2. Определяющие соотношения GTN-модели.** В упругой области материал подчиняется закону Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (2.1)$$

Скорости упругих и пластических деформаций аддитивны

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (2.2)$$

Рассматриваемая модель описывает поведения металлов с не слишком большой долей пор. Хотя материал матрицы, содержащий поры, предполагается пластически несжимаемым, поведение эффективного материала зависит от давления из-за наличия пор.



Фиг. 4

Условие пластичности пористого материала. Исходя из решения задачи о сферически симметричном деформировании сферической поры в идеальнопластическом материале, Гарсон предложил условие пластичности такого вида [58]:

$$\Phi = \left(\frac{q}{\sigma_Y}\right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch}\left(-\frac{3q_2 p}{2\sigma_Y}\right) - (1 + q_1^2 f^2) = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{s} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}, \quad q = \sqrt{3/2\mathbf{s} : \mathbf{s}}, \quad p = -1/3\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}, \quad f = V_{\text{пор}}/V$$

Здесь  $\mathbf{s}$  – девиатор тензора напряжений Коши;  $q$  – интенсивность касательных напряжений;  $p$  – гидростатическое давление;  $\sigma_Y(\bar{\epsilon}_m^{\text{pl}})$  – предел текучести сплошного материала (материала матрицы), зависящий от интенсивности пластических деформаций;  $f$  – пористость (объемная доля пор в материале).

Твергард [78] ввел в это условие константа  $q_1, q_2$  (как коэффициенты корректировки пористости и давления) для того, чтобы модель Гарсона давала согласие с численным расчетом модельной задачи (задача о растяжении материала с периодической пористой структурой в случае плоской деформации). Твергард получил  $q_1 = 1.5, q_2 = 1.0$ . Варьируя эти параметры, можно приблизить результаты численного расчета к экспериментальным данным.

Подчеркнем, что при  $f = 0$  (сплошной материал) условие пластичности Гарсона переходит в условие текучести Мизеса. На фиг. 4 показана поверхность текучести в  $p$ - $q$  плоскости для различной пористости материала.

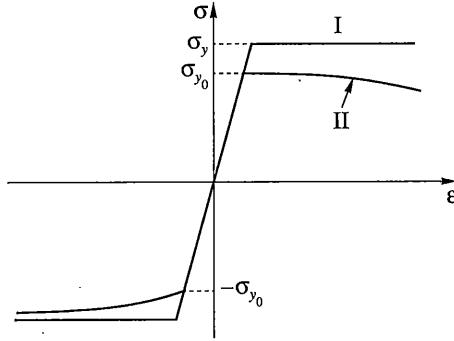
На фиг. 5 показана зависимость  $\sigma(\epsilon)$  для материала с начальной пористостью  $f_0$  при одноосном растяжении и сжатии (кривая II). Кривая I отвечает идеальной диаграмме Мизеса при  $f = 0$ . При сжатии материал упрочняется, так как поры уменьшаются, а при растяжении разупрочняется из-за роста и зарождения пор.

Закон ассоциированного течения. В качестве пластического потенциала принимается условие пластичности. Пластическая деформация представляется в виде

$$\dot{\epsilon}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{d\Phi}{d\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{s} \right) \quad (2.4)$$

где  $\dot{\lambda}$  – неотрицательный скалярный множитель.

Эволюция интенсивности пластической деформации и пористости. Упрочнение – разупрочнение материала матрицы описывается зависимостью  $\sigma_Y(\bar{\epsilon}_m^{\text{pl}})$ . Исходя из того,



Фиг. 5

что работа пластических деформаций выполняется только материалом матрицы, получим уравнение, описывающие эволюцию  $\bar{\epsilon}_m^{pl}$

$$(1 - f)\sigma_Y \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} = \sigma : \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}, \quad \bar{\epsilon}_m^{pl} = \sqrt{2/3 \bar{\epsilon}_m^{pl} : \bar{\epsilon}_m^{pl}} \quad (2.5)$$

$\bar{\epsilon}_m^{pl}$  – пластическая деформация материала матрицы.

Изменение пористости материала происходит вследствие роста существующих пор и зарождения новых

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucl} + \dot{f}_{gr}$$

Из уравнения неразрывности, считая материал матрицы пластически несжимаемым, получим уравнение для роста пор

$$\dot{f}_{gr} = (1 - f)\dot{\bar{\epsilon}}^{pl} : \mathbf{I} \quad (2.6)$$

Зарождение пор происходит вследствие относительного движения зерен и зависит от интенсивности пластических деформаций [51]:

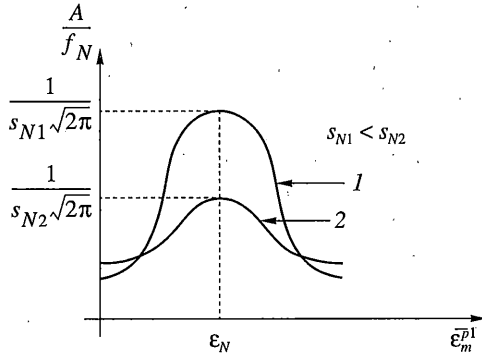
$$\dot{f}_{nucl} = A \dot{\bar{\epsilon}}_m^{pl} \quad (2.7)$$

$$A(\bar{\epsilon}_m^{pl}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\epsilon}_m^{pl} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right]$$

Интенсивность деформаций, при которой зарождаются поры, подчиняется нормальному распределению со средней величиной  $\epsilon_N$  с дисперсией  $s_N$ . Объемная доля зарождающихся пор равна  $f_N$ . Поры зарождаются только при растяжении (объемная пластическая деформация больше нуля). Функция распределения зарождения пор  $A$  для двух материалов показана на фиг. 6.

**3. Микромеханическая многомасштабная модель поврежденности упругопластического материала.** GTN-модель не лишена недостатков, о которых было сказано выше. Автором предложена микромеханическая модель [28, 29] упруговязкопластической среды, в процессе деформирования которой зарождаются и растут микродефекты, приводящие к интенсификации пластического течения в локализованных областях типа полос скольжения и постепенному разрушению материала. Рассмотрим уравнения этой модели.





Фиг. 6

3.1. Стадия пластического течения и упрочнения материала. Начальный этап пластического течения описывается на микроуровне движением дислокаций. Скорость вязкопластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  пропорциональна потоку движущихся дислокаций [56, 9]:

$$\dot{\gamma}^p = abN_m V \tag{3.1}$$

где  $a$  – вектор Бюргерса,  $b$  – коэффициент ориентации. Средняя скорость дислокаций  $V$  определяется термофлуктуационным движением и действующим активным напряжением  $s_{ij}^a = s_{ij} - s_{ij}^r$  [22, 56]:

$$V = V_0 \exp \frac{U_0 - (s - s^r)}{-k\theta}, \quad s \geq s^r \tag{3.2}$$

Здесь  $U_0$  – энергия активации,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\theta$  – абсолютная температура,  $s^r$  – остаточное напряжение.

Число подвижных дислокаций  $N_m$  растет пропорционально степени пластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  и падает с увеличением общего числа дислокаций  $N$  вследствие их записания на межзеренных границах [39]:

$$N_m = (N_0 + \alpha \dot{\gamma}^p)^n \exp(-N/N^*) \tag{3.3}$$

$N_0, N^*, \alpha$  – постоянные материала.

Чтобы описать процесс зарождения микродефектов и их развития, необходимо рассмотреть баланс потоков дислокаций в материале. В соответствии с формулами (3.1)–(3.3) полный поток дислокаций  $\dot{p}_{ij}$  на первой стадии пластической деформации распадается на два: поток подвижных дислокаций  $\dot{\gamma}_{ij}^p$ , идущий на образование собственно пластической деформации, и на поток дислокаций  $\dot{\omega}_{ij}$ , который скапливается около изолированных препятствий и на границах зерен.

Обозначая через  $\eta$  ту часть потока  $\dot{p}_{ij}$ , которая связана с подвижными дислокациями, а через  $1 - \eta$  поток, скапливающийся на границах зерен, можно записать

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \eta \dot{p}_{ij}, \quad (1 - \eta) \dot{p}_{ij} = \dot{\omega}_{ij}, \quad 0 < \eta < 1 \tag{3.4}$$

откуда получим  $\dot{\omega}_{ij} = (1 - \eta) \dot{\gamma}_{ij}^p / \eta$ .

*Стадия появления пор и поврежденности.* При достаточном скоплении дислокаций на межзеренных границах происходит частичная аннигиляция накопившихся дислокаций и движение зерен друг относительно друга, возникают дисклинации, образуются микропоры и микротрещины [39]. Эта вторая стадия деформации характеризуется постепенным разрушением материала, которое приводит к дополнительной деформации. Пластическая деформация сосредотачивается в областях наибольшего макроразрушения и приводит к развитию полос скольжения.

На второй стадии баланс потоков запишется так

$$(1 - \eta)\dot{p}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} + \dot{b}_{ij}$$

$b_{ij}$  – тензор потока аннигилирующихся дислокаций. Образование пор также часто связывают с образованием таких дефектов, как вакансии в узлах кристаллической решетки и с их перемещением к границам кристалла, где происходит их коагуляция и образование пор [39, 40]. Заметим, что на первой стадии пластической деформации шаровая часть тензора пластической деформации  $p_{ii} = 0$ , поэтому  $\omega_{ii} = 0$ , на второй стадии появляется объемная пластическая сжимаемость  $p_{ii} \neq 0$  и  $b_{ii} \neq 0$ .

Естественно предположить, что поток аннигилирующихся дислокаций  $\dot{b}_{ij}$  пропорционален накопившимся на препятствиях дислокациям  $\omega_{ij}$ :

$$\dot{b}_{ij} = \dot{\lambda} \omega_{ij} \tag{3.5}$$

$\dot{\lambda}$  – неизвестный скалярный множитель.

Процесс стока начинается только после того, как интенсивность тензора накопившихся на препятствиях дислокаций  $\Omega = (3/2\omega_{ij}\omega_{ij})^{1/2}$  достигает критического значения  $\Omega_0$ .

При этом интенсивность стока  $\dot{B}_{II}$  будет монотонной функцией избыточной интенсивности  $(\Omega_{II} - \Omega_0)$ :

$$\dot{B}_{II} = (3/2\dot{b}_{ij}\dot{b}_{ij})^{1/2} = \dot{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0)/\tau_p \tag{3.6}$$

$$\dot{Q}(z) = \begin{cases} Q(z), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

где  $Q(z)$  – безразмерная функция своего аргумента, а  $\tau_p$  – параметр размерности [с], связанный с масштабом пор. Условие (3.6) позволяет определить параметр  $\lambda$ :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0)}{\tau_p \Omega_{II}} \tag{3.7}$$

Окончательное уравнение для определения потока  $\omega_{ij}$  на основании (3.4)–(3.7) можно записать в виде

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} + \frac{\dot{Q}(\Omega_{II} - \Omega_0)}{\tau_p \Omega_{II}} \omega_{ij} = \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{d\gamma_{ij}^p}{dt} \tag{3.8}$$

Макрофизический смысл тензора  $\omega_{ij}$  соответствует тензору микронапряжений и следует из хорошо известного экспериментального факта, что величина микронапряжения пропорциональна плотности скопления дислокаций на границах зерен [39, 56].

Критическая плотность дислокации  $\Omega_0$ , при которой появляются микротрещины на межзеренных границах или других препятствиях и соответствующая ей критическая ин-

тензивность остаточных напряжений  $S_0^r$ , может быть определена на микроуровне на основе дислокационных моделей разрушения (см. [40] стр. 67–68).

Условие  $\Omega_{II} = \Omega_0$  в пространстве компонент тензора напряжений имеет смысл поверхности начала разрушения.

Тензор аннигиляции  $b_{ij}$  коррелирует с тензором повреждаемости среды  $D_{ij}$ . Девиаторная часть тензора  $b'_{ij}$  связана с девиатором повреждаемости  $D'_{ij}$ , которая приводит к релаксации остаточных напряжений (второе слагаемое в уравнении (3.8)). Шаровая часть  $b_{ii}$  коррелирует с объемной деформацией повреждаемости  $b_{ii} \rightarrow \dot{D}_{ii}$  и связана со скоростью роста пористости  $f$ , которая определяется уравнением неразрывности.

3.2. *Макромодель.* Переходя на стадии упрочнения от микропараметров к макропараметрам, запишем уравнения (3.1)–(3.3) для трехмерного напряженно-деформированного состояния в обобщенной форме в виде соотношения между вторыми инвариантами тензора скорости пластической деформации  $\dot{\gamma}^p$  и тензора активных напряжений  $S^a$ :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_p &= f(\gamma_p)\psi(S^a - S_0^a)/\tau_d, \quad S^a = (3/2s_{ij}^a s_{ij}^a)^{1/2}, \quad \dot{\gamma}^p = (2/3\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p)^{1/2} \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - 1/3\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad \gamma_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - 1/3\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $\tau_d$  – время релаксации активных напряжений, связанное с масштабом дислокаций.

Принимая гипотезы теории течения [15], получим из уравнений (3.1)–(3.3) на первой стадии деформирования при  $\Omega_{II} < \Omega_0$  упруговязкопластические уравнения для общего трехмерного деформируемого состояния

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2\beta} \dot{s}_{ij} + f(\gamma^p) \frac{\psi(S^a - S_0^a)}{\tau_d T} s_{ij}^a, \quad \sigma_{ii} = 3k\varepsilon_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (3.10)$$

Считая материал для простоты пластически несжимаемым  $\varepsilon_{kk}^p = 0$ , для шаровых частей тензора  $\sigma_{ii}$  получим упругий закон.

Принимая, что для девиаторов остаточных напряжений и накопившегося потока дислокаций выполняется соотношение

$$s_{ij}^r = 2\mu^* \omega'_{ij} \quad (3.11)$$

получим, что условию  $\Omega_{II} < \Omega_0$  для остаточных напряжений  $s_{ij}^r$  отвечает макроусловие  $S^r \leq S_0^r$ , здесь  $\mu^*$  – константа размерности [Н/м<sup>2</sup>]. Эволюционное уравнение (1.8) для  $s_{ij}^r$  на первой стадии пластического деформирования примет вид

$$\frac{1}{2\mu^*} \dot{s}_{ij}^r = \frac{1-\eta}{\eta} \dot{\gamma}_{ij}^p \quad (3.12)$$

Интегрируя по  $t$  при постоянном  $\mu^*$ , получим известный закон кинематического упрочнения

$$s_{ij}^r = 2\alpha \gamma_{ij}^p, \quad \alpha = \mu^*(1-\eta)/\eta \quad (3.13)$$

Модуль упрочнения  $\alpha$  определяется из экспериментальных данных по эффекту Баушингера.

Таким образом, для  $S^r < S_0^r$ , т.е. до начала образования микропор, материал матрицы описывается в соответствии с теорией дислокаций уравнениями (3.10)–(3.13) упруговязкопластической среды с кинематическим упрочнением. При  $S^r \geq S_0^r$  для тензора  $s_{ij}^r$  из (3.8) получаем релаксационное уравнение

$$s_{ij}^r + \frac{2\mu^* Q(S^r - S_0^r(f))}{S^r} s_{ij}^r = 2\alpha \dot{\gamma}_{ij}^p \quad (3.14)$$

Уравнения (3.12)–(3.14) можно записать в виде единого уравнения, если ввести функцию  $\hat{Q}(z)$  в соответствии с формулой (3.6). Это уравнение описывает релаксацию остаточных напряжений в материале после того, как начался процесс образования микропор, а следовательно разупрочнение материала. До этого в материале происходило упрочнение в соответствии с уравнением (3.13). Уравнение (3.14) показывает, что релаксация происходит до некоторого стационарного значения  $S_0^r(f)$ , отличного от нуля. В дальнейшем при  $t \gg \tau_p$  остаточные напряжения будут изменяться по закону пластического течения, ассоциированного с поверхностью текучести с пределом текучести, зависящим от пористости  $S^r = S_0^r(f)$ , которое следует из (3.14) при  $\tau_p \rightarrow 0$ .

$$ds_{ij}^r + H(s_{mn}^r d\varepsilon_{mn}^p) \frac{s_{nm}^r d\varepsilon_{mn}^p}{(S_0^r(f))^2} s_{ij}^r = 2\alpha d\gamma_{ij}^p \quad (3.15)$$

где  $H(z)$  – функция Хевисайда.

С появлением пор ситуация существенно меняется. Теперь материал состоит из матрицы и пустот, т.е. является двухфазным материалом. Зная свойства матрицы, которые описываются уравнениями (3.10), (3.13), можно найти эффективные характеристики пластического материала. С появлением пор изменяется условие пластичности материала, кроме того нужны уравнения, описывающие зарождение и эволюцию дефектов. Трудность решения этой задачи существенно зависит от формы пор. Теоретическое решение проблемы возможно на основе решения задачи о единичной поре в среде под действием сил, приложенных на бесконечности, и последующем суммировании этого решения для некоторого известного распределения пор по размерам и ориентации. Ясно, что решение в аналитической форме, если и возможно, то только для линейных сред, да и то в простейших случаях [55, 49]. Для нелинейных сред решение можно получить только численно и постараться аппроксимировать его простым аналитическим выражением, выделив наиболее существенные факторы, либо сделать это, основываясь на экспериментальных данных.

Полагая, что поры имеют сферическую форму, примем, что для идеально упругоупластического пористого материала справедливо условие Гарсона. Обобщим его на пористый материал, матрица которого описывается упруговязкопластическими уравнениями (1.9)–(1.10) с кинематическим упрочнением

$$\Phi(\sigma_{ij}^a, f, \sigma_Y) = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^a s_{ij}^a}{(\sigma_Y)^2} + 2q_1 f \operatorname{ch} \left( \frac{3q_2 \sigma_{kk}^a}{2 \sigma_Y} \right) - (1 + (q_1 f)^2) = 0 \quad (3.16)$$

где  $s_{ij}^a$  – девиатор тензора активных напряжений, а  $\sigma_Y$  есть предел текучести матрицы упруговязкопластического материала, который определяется из условия равенства пластической работы для матрицы и эффективного материала [59]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^a \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= (1 - f) \dot{\gamma}_p [\sigma_Y (\dot{\gamma}^p) + \psi^{-1} (\tau \dot{\gamma}^p)] \\ \sigma_Y &= \sigma_Y (\dot{\gamma}_p) + \psi^{-1} (\tau \dot{\gamma}^p) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из первого уравнения определяется  $\gamma^p$ , после чего из второго находим  $\sigma_Y$ . Напряжения  $\sigma_{ij}^a$  и скорости диссипативных деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  в эффективном материале связаны ассоциированным законом пластического течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \partial F / \partial \tau_{ij} \quad (3.18)$$

если ассоциативный закон имеет место для материала матрицы [59]. Параметр  $\lambda$  определяется из второго уравнения (3.17):

$$\lambda = \frac{\sigma_Y \Psi(\sigma_Y - \sigma_Y(\gamma^p))}{\tau_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}^a} \right)^{-1}$$

Из уравнения неразрывности следует уравнение роста пор

$$\dot{f}_{gr} = (1-f) \dot{\epsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{3f(1-f)}{\sigma_Y} q_1 q_2 \operatorname{sh} \frac{3q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_Y} \quad (3.19)$$

Уравнения зарождения и эволюции пор остаются такими же, как для GTN-модели, и описываются формулами (2.5)–(2.7) и замыкают полную систему определяющих уравнений (3.16)–(3.19). Из них находятся напряжения и внутренние параметры материала при заданном поле скоростей, которое определяется из законов сохранения.

Критерием разрушения материала для предполагаемой модели является условие критического накопления пор. Поскольку кристаллиты находятся в стесненном состоянии и не могут деформироваться свободно, то на межкристаллитных границах образуются межкристаллитные поры. Они накапливаются до некоторого критического значения пористости  $f = f_{cr}$ , при которой происходит их катастрофическое распространение, что ведет к полному межкристаллитному разрушению материала. Это критическое значение пористости  $f_{cr}$  зависит от многих внешних факторов: температуры, скорости нагружения и других, а также от структуры материала, и как показывают эксперименты, изменяется в пределах (0.05–0.50) [39].

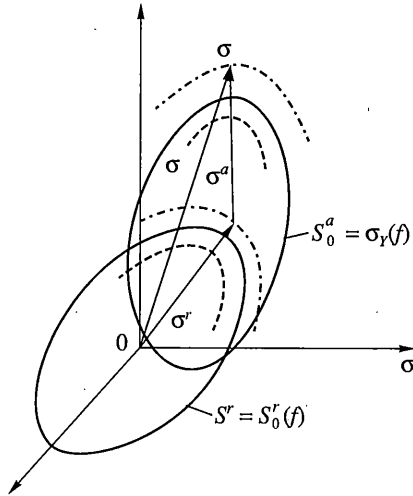
Введем в модель неучтенные в первоначальном варианте [29] эффекты: влияние пористости на упругие модули среды и на поверхность поврежденности материала  $S^r = S_0^r(f)$ .

Учитывая, что внутренняя упругая энергия поврежденного материала зависит от пористости и не зависит от пластических деформаций  $U^{el}(f, \epsilon_{ij}^{el})$ , получим, что упругие модули  $E, \mu$  изменяются в соответствии с формулой, предложенной Л.М. Качановым,  $E = E(1-f)$ ,  $\bar{\mu} = \mu(1-f)$ , где  $f$  – пористость, определяемая формулой (3.19).

Считая, что влияние пористости на поверхность поврежденности подобно ее влиянию на поверхность пластического течения для активных напряжений примем следующее приближенное соотношение

$$S_0^r(f) = S_0^a(f) S^r / S^a, \quad S_0^a(f) = \sigma_Y (1 + q_1^2 f^2)^{1/2}$$

Учет обоих эффектов приводит к более интенсивному разрушению, следовательно, и более резкой локализации. Как показали расчеты по начальной версии модели (без перечисленных добавлений), эти эффекты были недостаточно выраженными вследствие большой мезовязкости материала  $\tau_p \gg \tau_d$ .



Фиг. 7

Подчеркнем, что предложенная модель поврежденности в отличие от GTN-модели многомасштабная. Она содержит три временных масштаба:  $t_0$  – характерное время задачи,  $\tau_p$  – время релаксации напряжения в поврежденном материале,  $\tau_d$  – время релаксации в исходном вязкопластическом материале, соответствующие трем разным пространственным масштабам: макро-, мезо- и микро, которые отвечают соответственно размерам макрообъекта, размерам поры и дислокации и удовлетворяют неравенствам  $t_0 \gg \tau_p \gg \tau_d$ .

На стадии упрочнения масштабный эффект определяется малым параметром  $\delta_d = \tau_d/t_0$ , а на стадии разупрочнения  $\delta_p = \tau_p/t_0 \gg \delta_d$  и следовательно в предразрушенном состоянии масштабный эффект значительно сильнее. При стремлении  $\delta_p$  и  $\delta_d$  к нулю модель переходит в GTN-модель с кинематическим упрочнением, не зависящую от масштабных факторов.

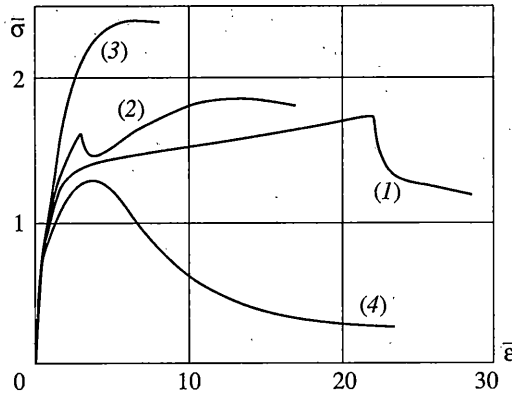
Приведем геометрическую интерпретацию поверхности пластичности и поврежденности для предложенной модели в пространстве напряжений, которая широко используется при описании теории пластического течения. Модель имеет две критические поверхности, зависящие от интенсивности скоростей пластической деформации и пористости  $f$ , которые определяют поведение материала. Они показаны на фиг. 7 штриховыми линиями. Поверхность пластичности активных напряжений  $S^a = \sigma_\gamma(f)$  определяет переход из упругого состояния в пластическое, поверхность  $S^r = S_0^r(f)$  определяет начало образования пор. Сплошными линиями показаны стационарные положения этих поверхностей.

В модель нетрудно включить температурные эффекты, если к деформации  $\epsilon$  добавить температурную составляющую  $\epsilon_{ij}^\theta = \alpha \theta \delta_{ij}$ , а температуру  $\theta$  определять из уравнения

$$\rho c_p = \partial \theta / \partial t = \chi \sigma_{ij}^a \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.20)$$

которое следует из предположения об адиабатичности процесса. Здесь  $c_p$  – теплоемкость при постоянном напряжении,  $\chi = 0.8-0.9$  – тепловой коэффициент конвертируемости,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,  $\rho$  – плотность эффективного материала.

В заключение отметим, что численное моделирование процессов разупрочнения и локализации деформаций на основе уравнений (3.16)–(3.20) предложенной микромоде-



Фиг. 8

ли было рассмотрено в [17], где приведено решение задачи о разрушении осесимметричного цилиндра при квазистатическом растяжении с постоянной скоростью, а в работе [29] рассмотрена задача о динамическом разрушении стержня при высоких скоростях нагружения.

В литературе имеются и другие мезомодели связанных вязкопластических повреждающихся сред, построенных в более упрощенных предположениях, чем в настоящей работе, как для описания вязкого континуального разрушения [80], так и для хрупкого разрушения под действием циклического нагружения [54].

*Растяжение тонкого стержня с постоянной скоростью деформации.* Рассмотрим наиболее распространенный вид испытания материалов на одноосное растяжение – сжатие тонкого стержня с постоянной скоростью деформаций. Решение этой задачи позволит оценить насколько хорошо предложенная модель описывает диаграмму материалов с разупрочнением. Подчеркнем, что вид кривой  $\bar{\sigma}$ – $\bar{\epsilon}$  в модель явно не закладывается, а является следствием принятой модели разрушения материала. На стадии упрочнения принимается простейшая гипотеза о линейном упрочнении материала.

Результаты интегрирования определяющих уравнений представлены в виде кривых  $\bar{\sigma}$ – $\bar{\epsilon}$  при постоянной скорости деформации  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0$ . На фиг. 8 приведены четыре характерные кривые для различного типа материалов. Первые три кривые получены при  $S_0 = 1.5$  и разных значениях параметра упрочнения  $\alpha$  (см. табл.),  $q_1 = 1.0$ ,  $q_2 = 1.0$ ,  $\tau_d/t_0 = 0.01$ ,  $\tau_p/t_0 = 1.0$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}$  – безразмерные величины, отнесенные к пределу текучести.

Как видно из фиг. 8, кривые при переходе во вторую стадию деформирования при появлении пор имеют излом, после которого следует разупрочнение.

Для кривой 1 при малых  $\alpha = 0.01$  характерны большие пластические деформации в стадии упрочнения и резкий спад напряжений при разупрочнении, которое затем выходит на стационарное значение.

Кривая 2 получена при  $\bar{\alpha} = 0.1$  и  $S_0 = 1.5$  в этом случае диаграмма имеет “зуб” текучести, после которого происходит частичное разупрочнение материала с последующим упрочнением. Такое поведение характерно для мягких сталей, железа и некоторых других материалов, в которых происходят фазовые превращения.

Кривая 3 соответствует большим значениям параметра кинематического упрочнения  $\bar{\alpha} = 0.9$ , остальные параметры приведены в табл. Видно, что в этом случае участок

разупрочнения невелик, критическое значение  $f_*$  достигается при сравнительно небольших деформациях. Кривые такого типа характерны для высокопрочных материалов.

№	1	2	3	4
$S_0$	1.5	1.5	1.5	0.2
$\alpha$	0.01	0.1	0.9	0.1

Кривой 4 соответствуют значения  $S_0 < 1$  ( $\bar{\alpha} = 0.1, \bar{S} = 0.2$ ). В этом случае диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  получается гладкой без излома, характерного для предыдущего случая ( $S_0 > 1$ ), с длительным участком разупрочнения, предшествующим полному разрушению материала при  $f_* = 0.5$ . Подобные диаграммы характерны для таких материалов как некоторые грунты, глина.

Таким образом, при сравнительно небольшом произволе в четыре параметра, модель позволяет описать, по крайней мере качественно, широкий спектр свойств различных материалов. При феноменологическом количественном описании реальных материалов дополнительно для согласования с экспериментальными данными может быть использован произвол в выборе функций  $Q(z), \Psi(z), S_0(f), \alpha(\varepsilon^p), E(f)$ , которые фигурируют в модели, но в данных расчетах принимались линейными или постоянными.

**4. Численное моделирование поврежденности упругопластических материалов (вязкое разрушение).** Для моделирования процессов поврежденности, кроме определяющих уравнений модели, необходимы специальные численные методы их решения. Поврежденность материалов связана с разупрочнением, локализацией пластических деформаций и даже с фазовыми превращениями. Это создает определенные трудности при интегрировании определяющих уравнений и решении начально-краевых задач. Как уже отмечалось, модели повреждающихся сред, неучитывающие многомасштабный эффект в процессе разрушения, приводят к некорректным задачам, требующим регуляризации. Например, первые попытки описать поврежденность в рамках теории течения с падающей диаграммой материала оказались неудачными, т.к. при этом нарушается условие реологической устойчивости Дракера (квазистатическое нагружение), а в динамике условие Адамара [3, 7]:

$$\det(C_{ijkl}n_i n_j) > 0 \quad \forall n_i$$

где  $C_{ijkl}$  – матрица модулей материала  $d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\varepsilon_{kl}$ .

Введение в модель регуляризирующих операторов возможно как на основе учета дополнительных физических процессов (неучтенных основной моделью), так и на основе математических соображений – введением в уравнения искусственных членов с малыми параметрами, регуляризирующих уравнение более низкого порядка. Вводимые операторы высокого порядка могут быть связаны с временным либо с пространственным масштабными факторами.

Например, в теории течения при условии пластичности, не зависящим от изменения масштаба времени, при падающей диаграмме материала  $\sigma = \sigma_Y(\varepsilon), d\sigma_Y/d\varepsilon < 0$  задача оказывается некорректной. Регуляризация достигается переходом к упруговязкопластической модели

$$\tau \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = \frac{\sigma - \sigma_Y(\varepsilon)}{\sigma_Y(0)} \tag{4.1}$$



где  $\tau$  – время релаксации,  $E$  – модуль упругости. Оператор в левой части уравнения, отвечающий скорости пластической деформации, повышает порядок определяющего уравнения по времени  $t$ .

Переход к градиентным или нелокальным соотношениям между напряжениями и деформациями (повышение старших производных по пространству) также регуляризует задачу

$$\varepsilon = \partial u / \partial x + a \partial^3 u / \partial x^3 \quad (4.2)$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad b^2 > 0, \quad c < 0$$

Однако регуляризация дифференциальных уравнений не снимает полностью проблему численной корректности решения дискретной задачи и требует специальных методов решения жестких задач, а также различного рода искусственных вычислительных приемов для получения адекватных результатов, подавляющих чувствительность решения к дискретизации задачи [3].

В работе [30] автором предложен новый эффективный численно-аналитический метод интегрирования уравнений упруговязкопластических сред с внутренними или структурными переменными, основанный на методе расщепления определяющих соотношений по физическим процессам.

Предложенный способ обладает вычислительными преимуществами перед стандартными итерационными методами решения, так как на каждом шаге интегрирования задача сводится к решению упругой задачи, а на этапе корректора к решению только одного дифференциального или простого уравнения для определения коэффициента корректировки. В то время как традиционными методами в каждой точке тела приходится решать систему  $6 + n$  определяющих нелинейных уравнений, где  $n$  – число внутренних переменных модели. В [31] и настоящей работе этот метод распространен на решение упругопластических и упруговязкопластических задач, учитывающих зарождение и рост микропор при условии пластичности типа Гарсона.

*4.1. Метод расщепления.* Рассмотрим сначала интегрирование методом расщепления определяющих уравнений упругопластической среды, не зависящих от изменения масштаба времени со структурными переменными.

Общая схема расщепления упругопластических уравнений выглядит следующим образом [30]. Расщеплению подвергается только уравнение

$$d\sigma/dt = \mathbf{D} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{pl}) \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{D}$  – тензор упругих модулей материала,  $d\sigma/dt$  – объективная производная от тензора напряжений Коши.

Предиктор берется при  $\dot{\varepsilon}^{pl} = 0$ , тогда материал среды упругий и совместно с уравнениями движения на шаге  $\Delta t$  необходимо решать упругую задачу при начальных условиях, полученных на предыдущем шаге для полной упругопластической задачи

$$d\sigma/dt = \mathbf{D} : \dot{\varepsilon} \quad (4.4)$$

После этого на этапе корректора решаются уравнения релаксации напряжений (4.3) при  $\dot{\varepsilon} = 0$  совместно с уравнениями, описывающими внутреннюю структуру материала (упрочнение, повреждаемость и т.д.) при начальных условиях, полученных на этапе предиктора.

Используя закон ассоциированного течения, получим уравнение релаксации напряжений

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} \mathbf{D} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (4.5)$$

$$\dot{H}_i = F_i(\sigma, H_j) \quad (4.6)$$

где  $H_i$  – параметры, описывающие внутреннюю структуру материала.

Задача интегрирования определяющих уравнений для нахождения напряжений и внутренних параметров среды при заданных деформациях представляет самостоятельную задачу независимо от того, в какой форме слабой [45] или дифференциальной, формулируются законы сохранения [30].

Релаксация происходит до момента выполнения равновесного (статического) условия пластичности

$$\Phi(p, q, H_i) \equiv 0 \quad (4.7)$$

или упругой разгрузки

$$\Phi(p, q, H_i) < 0$$

где  $p$  и  $q$  – первый и второй инварианты тензора напряжений соответственно.

В случае классической или равновесной упругопластической среды, свойства которой не зависят от изменения масштаба времени, в уравнении (4.5) и (4.6) можно исключить время  $t$  и перейти к дифференцированию по переменной  $\lambda$ :

$$d\sigma/d\lambda = -\mathbf{D} \partial \Phi / \partial \sigma \quad (4.8)$$

$$\partial H_i / \partial \lambda = \tilde{F}_i(\sigma, H_j) \quad (4.9)$$

Решая уравнения (4.8) и (4.9) при начальных условиях,  $\sigma(\lambda_0) = \sigma^{el}$ ,  $H_i(\lambda_0) = H_i^{el}$ , полученных после решения упругой задачи, на этапе корректора, найдем решение как функцию параметра  $\lambda$ ,  $\sigma^{el}$  и  $H_i^{el}$ :

$$\sigma = \sigma(\lambda, \sigma^{el}, H_i^{el}), \quad H_i = H_i(\lambda, \sigma^{el}, H_i^{el}) \quad (4.10)$$

Подставляя найденные решения в условие пластичности (4.7), получим уравнение для определения параметра  $\lambda$ :

$$\Phi(\lambda, p(\lambda), q(\lambda), H_i(\lambda)) = 0 \quad (4.11)$$

Решая это уравнение, найдем  $\lambda$  и, подставляя в (4.10), получим окончательное решение задачи.

*Теория пластичности Мизеса. Изотропное упрочнение.* Применим эту общую схему метода расщепления к конкретному типу уравнений пластического течения. Рассмотрим теорию течения Мизеса с деформационным упрочнением.

Условие пластичности (4.7) в этом случае зависит только от второго инварианта девиатора напряжения

$$\Phi = q - \sigma_Y - 2\mu_1 H, \quad q = \sqrt{3/2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (4.12)$$

где  $q$  – интенсивность касательных напряжений;  $\sigma_Y$  – предел текучести;  $\mu_1$  – модуль упрочнения при сдвиге;  $H$  – параметр упрочнения, в качестве которого принимается интенсивность скоростей пластических деформаций

$$\dot{H} = \sqrt{2/3 \dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}} \quad (4.13)$$

Ассоциированный закон и уравнение релаксации напряжений (4.5) примут вид

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{d\Phi}{d\sigma} = \dot{\lambda} \frac{3}{2q} \mathbf{s} = \dot{\Lambda} \mathbf{s}, \quad \dot{\Lambda} = \frac{3}{2q} \dot{\lambda} \quad (4.14)$$

$$d\mathbf{s} = -2\mu s d\Lambda \quad (4.15)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига. Интегрируя уравнение (4.15) при начальном условии, полученном после предиктора  $\Lambda = \Lambda_0$ ,  $\mathbf{s}(\Lambda_0) = \mathbf{s}^{el}$ , найдем

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{el} \exp(-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)), \quad q = q^{el} \exp(-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)) \quad (4.16)$$

Из уравнений (4.13) и (4.14) получим эволюционное уравнение для параметра упрочнения

$$\dot{H} = \sqrt{2/3 \dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}} = \dot{\Lambda} \sqrt{2/3 \mathbf{s} : \mathbf{s}} = 2/3 q \dot{\Lambda} \quad (4.17)$$

Интегрируя это уравнение с учетом (2.17), получим

$$H = H^{el} + \frac{2}{3} q^{el} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \exp(-2\mu(\Lambda' - \Lambda_0)) d\Lambda' = H^{el} - \frac{1}{3\mu} q^{el} (\exp(-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)) - 1) \quad (4.18)$$

Введем обозначение для коэффициента корректировки  $x = \exp(-2\mu(\Lambda - \Lambda_0))$ . Подставляя значение  $H$  из (4.18) в условие пластичности (4.12), получим

$$q^{el} x - \sigma_Y - 2\mu_1 \left( H^{el} - \frac{1}{3\mu} q^{el} (x - 1) \right) = 0$$

откуда

$$x = \frac{\sigma_Y + 2\mu_1 H^{el} + (2\mu_1/3\mu) q^{el}}{q^{el} (1 + 2\mu_1/3\mu)} \quad (4.19)$$

Таким образом, напряжение в точке равно

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{s} = -p^{el}\mathbf{I} + \mathbf{s}^{el} x \quad (4.20)$$

где  $p = p^{el}$  – давление,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга.

В случае идеальной пластичности  $\mu_1 = 0$  получим

$$x = \sigma_Y/q, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^{el} \sigma_Y/q^{el} \quad (4.21)$$

т.е. решение упругопластической задачи получается из решения упругой задачи простым умножением на коэффициент корректировки  $x$ , что означает нормировку тензора напряжения и приведение его на поверхность текучести (4.12) в пространстве напряжений. Это известное правило корректировки Уилкинса [44], которое верно для случая идеальнопластической среды.

В случае упрочнения из формулы (4.21) видно, что если его формально распространить на случай упрочняющейся среды, полагая  $x = (\sigma_Y + 2\mu_1 H^{el})/q^{el}$ , то получим неверный результат.

*Вычисление якобиана.* При решении краевой задачи методом конечных элементов принцип возможных перемещений сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений. Для решения этой системы уравнений методом Ньютона нужно вычислить якобиан  $\partial\sigma/\partial\epsilon$  ( $\epsilon$  – полная деформация) [45].

При интегрировании определяющих соотношений методом расщепления. На этапе предиктор решается упругая задача, в которой полная деформация  $\epsilon$  считается упругой и решение для напряжений зависит только от  $\epsilon^{el}$ . Поэтому можно записать

$$\partial\bar{\sigma}/\partial\epsilon = \partial\bar{\sigma}/\partial\epsilon^{el} \quad (4.22)$$

Продифференцируем уравнение (4.20) по  $\epsilon$  с учетом (4.22):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon} = -\left(\frac{\partial p^{el}}{\partial\epsilon}\right) \otimes \mathbf{I} + \left(\frac{\partial s^{el}}{\partial\epsilon}\right) x + s^{el} \otimes \left(\frac{\partial x}{\partial\epsilon}\right) \quad (4.23)$$

$$\partial p^{el}/\partial\epsilon = -K\mathbf{I}, \quad \partial s^{el}/\partial\epsilon = 2G\mathbf{I} - 2/3G\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (4.24)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия,  $G = \mu$  – модуль сдвига,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор четвертого ранга.

Так как выражение для коэффициента корректировки  $x$  получено в явном виде (4.10)–(4.21), то

$$\frac{\partial x}{\partial\epsilon} = \frac{\partial x}{\partial q^{el}} \frac{\partial q^{el}}{\partial\epsilon} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q^{el}} = \frac{\sigma_Y + 2\mu_1 H^{el}}{(1 + 2\mu_1/3\mu)(q^{el})^2}, \quad \frac{\partial q^{el}}{\partial\epsilon} = 3G \frac{s^{el}}{q^{el}} \quad (4.26)$$

Из (4.23)–(4.26) получим окончательный результат

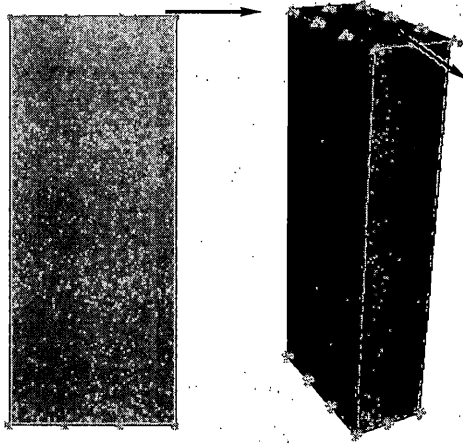
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon} = 2Gx\mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3}Gx\right)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{3G}{q^{el}} \left(\frac{\partial x}{\partial q^{el}}\right) s^{el} \otimes s^{el} \quad (4.27)$$

*Результаты расчета.* В качестве примера рассмотрим задачу о сдвиге бруска в 3-х мерном случае. Стальной брусок размером  $5 \times 2 \times 1$  мм жестко закреплен на торцах. Верхняя граница перемещается в направлении, показанном на фиг. 9 стрелками на верхней границе. Перемещение сдвига равно толщине бруска – 2 мм. Безразмерные константы материала, отнесенные к пределу текучести, следующие  $E = 500$ ,  $\nu = 0.3$  и модуль пластического упрочнения  $\mu_1 = 0.1$ .

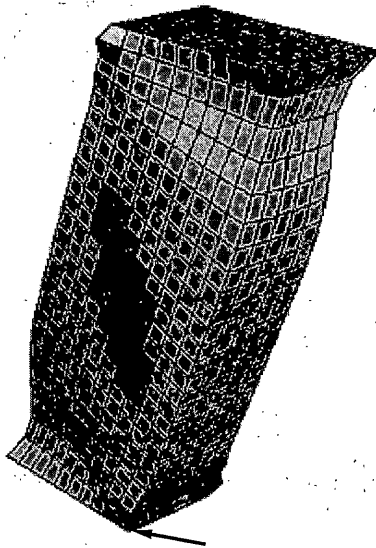
На фиг. 10 показаны деформация бруска, деформация лагранжевой сетки и интенсивность касательных напряжений в материале. На фиг. 11 и 12 изображены зависимости интенсивности касательных напряжений  $q$  и давления  $p$  от параметра нагружения в элементе, выделенном стрелкой на фиг. 10.

На фиг. 10–12 сплошная линия соответствует расчету с малым шагом по методу [46], а крестики – расчету по методу расщепления.

Вычисления проводились при автоматическом шаге двумя разными методами: методом, предложенным в [46] и заложенным в конечно-элементном пакете ABAQUS [45], и методом расщепления. При решении задачи методом расщепления был написан отдель-



Фиг. 9

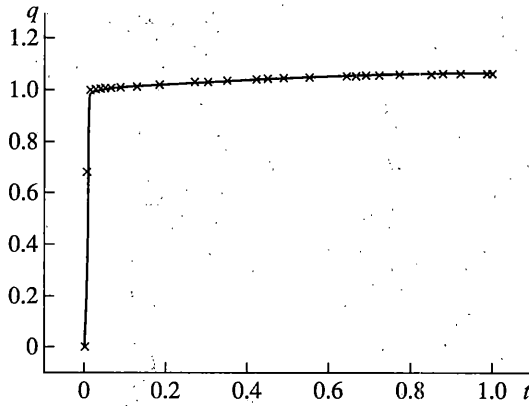


Фиг. 10

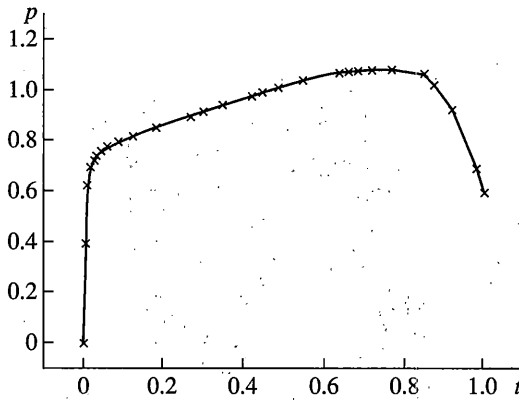
ный программный модуль, в котором было реализовано интегрирование определяющих соотношений по схеме, изложенной выше.

Были получены следующие результаты: шаг по времени в точности совпадает в обоих методах; количество итераций в методе Ньютона одинаково в обоих случаях; время расчета методом расщепления меньше (12 мин 18 с по сравнению с 13 мин 26 с); значения для интенсивности и давления совпали с хорошей точностью. Относительная погрешность не превышает  $10^{-5}$ .

4.2. Интегрирование определяющих соотношений GTN-модели: В расчете принималось, что нет зарождения пор и материал матрицы идеальнопластический. При этом



Фиг. 11



Фиг. 12

уравнение для определения  $\bar{\varepsilon}_m^{pl}$  рассматривать не надо, а уравнение для роста пор будет иметь вид  $\dot{f} = \dot{f}_{gr}$ .

Преобразование системы определяющих соотношений. В уравнении (4.3) можно исключить время и записать закон Гука в полных дифференциалах

$$d\sigma = \mathbf{D} : (d\varepsilon - d\varepsilon^{pl})$$

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{s}, \quad \mathbf{D} = 2G\mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3}G\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (4.28)$$

Подставляя эти выражения, получим

$$d\sigma = \mathbf{D} : d\varepsilon + \frac{d\lambda}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{D} : \mathbf{I} - \frac{3d\lambda}{2q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \mathbf{D} : \mathbf{s} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{D} : \mathbf{s} = 2G\mathbf{s}, \quad \mathbf{D} : \mathbf{I} = 3K\mathbf{I}$$

Запишем уравнение (4.20) в следующей форме:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s} = -p\mathbf{I} + q\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{s}/q \quad (4.30)$$

Уравнение для давления и девиаторов напряжений имеют вид

$$dp = -K(d\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) - d\lambda K \partial\Phi/\partial p \quad (4.31)$$

$$d\mathbf{S} = 2Gd\mathbf{e} - 6GSd\lambda \quad (4.32)$$

здесь учтено, что  $\partial\Phi/\partial q = 2q$ .

Преобразуем уравнение для пористости

$$df_{gr} = (1-f)d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbf{I} = (1-f)d\lambda(d\Phi/d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) = (1-f)d\lambda(d\Phi/dp)$$

С учетом предположения о том, что  $f = f_{gr}$ , получим

$$df = -d\lambda(1-f)d\Phi/dp \quad (4.33)$$

Уравнения (4.31)–(4.33) с условием пластичности представляют собой замкнутую систему определяющих соотношений. Расщеплению подвергаются только уравнения (4.31) и (4.32). Приведем для сравнения систему определяющих уравнений полной задачи и уравнений в методе расщепления на этапе корректора

Полная задача

<b>Полная задача</b>	<b>Метод расщепления</b>
$dp = -K(d\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) - d\lambda K \partial\Phi/\partial p$	$dp = -d\lambda K \partial\Phi/\partial p$
$ds = 2Gd\mathbf{e} - 6Gsd\lambda$	$ds = -6Gsd\lambda$
$df = -d\lambda(1-f)\partial\Phi/\partial p$	$df = -d\lambda(1-f)\partial\Phi/\partial p$

$$\Phi = \left(\frac{q}{\sigma_Y}\right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch}\left(-\frac{3q_2 p}{2\sigma_Y}\right) - (1 + q_1^2 f^2)$$

В полной задаче начальные условия берутся с предыдущего шага, а в методе расщеплений в качестве начальных условий берется упругое решение.

*Метод расщепления. Этап корректор.* Решаем задачу методом расщепления, считая решение на стадии предиктор известным (упругое решение).

Система уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = -\bar{K} \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{p}} = -\bar{K} 3q_1 q_2 f \operatorname{sh}(3/2q_2 \bar{p}) \quad (4.34)$$

$$ds = -6Gsd\bar{\lambda} \quad (4.35)$$

$$df/d\bar{\lambda} = -(1-f)\partial\Phi/\partial p \quad (4.36)$$

$$\Phi = \bar{q}^2 + 2q_1 f \operatorname{ch}(-3/2q_2 \bar{p}) - (1 + q_1^2 f^2) \quad (4.37)$$

$$\bar{p} = p/\sigma_Y, \quad \bar{K} = K/\sigma_Y, \quad \bar{G} = G/\sigma_Y, \quad \bar{\lambda} = \lambda/\sigma_Y$$

Начальные условия берутся из решения упругой задачи

$$\bar{p}(\bar{\lambda}_0) = \bar{p}_0, \quad \mathbf{s}(\bar{\lambda}_0) = \bar{\mathbf{s}}_0 \Rightarrow \bar{q}(\bar{\lambda}_0) = \bar{q}_0, \quad f(\bar{\lambda}_0) = f_0 \quad (4.38)$$

Всю систему уравнений полностью не удается проинтегрировать в аналитическом виде, как в случае условия текучести Мизеса. Точно интегрируются уравнения для компонент девиатора (4.35) и давления (4.36). Для интенсивности касательных напряжений получим

$$d\bar{q}/\bar{q} = -6\bar{G}d\bar{\lambda} \quad (4.39)$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии (4.38), получим

$$\bar{q} = \bar{q}_0 \exp(-6\bar{G}(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)) \quad (4.40)$$

Из (4.34) и (3.36) найдем

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}} = \frac{\bar{K}}{(1-f)} \frac{df}{d\bar{\lambda}} \Rightarrow d\bar{p} = \frac{\bar{K}}{(1-f)} df$$

Интегрируя с учетом начальных условий, получим

$$\bar{p} = \bar{p}_0 - \bar{K} \ln\left(\frac{1-f}{1-f_0}\right), \quad f = 1 - (1-f_0) \exp\left(\frac{\bar{p} - \bar{p}_0}{\bar{K}}\right) \quad (4.41)$$

Исключая пористость  $f$  из (4.34), получим дифференциальное уравнение относительно  $\bar{p}$ :

$$d\bar{p}/d\bar{\lambda} = -3\bar{K}q_1q_2f \operatorname{sh}(3/2q_2\bar{p}) \quad (4.42)$$

Это уравнение проинтегрировать в аналитическом виде не удастся, но его численное решение на отрезке  $\Delta\lambda$  с заданными начальными условиями, полученными из упругого решения задачи, может быть легко найдено с любой требуемой точностью. Найденные  $p(\lambda)$  и  $f(\lambda)$  подставляются в условие пластичности Гарсона (4.37), из которого также численно определяется значение  $\lambda = \lambda_*$ , отвечающее коэффициенту корректировки. В этом случае все дальнейшее решение краевой задачи должно выполняться в численном виде.

Но можно найти приближенные аналитические выражения для  $p(\lambda)$  и  $f(\lambda)$ , используя на малом шаге  $\Delta\lambda$  линеаризацию уравнений (4.37)–(4.42). Такой подход, основанный на линеаризации уравнений (4.42) и (4.37), применен ниже. Функция  $\Phi(x)$  определялась в аналитическом виде и все последующие выкладки также проводились аналитически, что существенно упрощает выкладки и расчеты. Однако следует отметить, что из-за линеаризации уменьшается точность вычислений.

В результате линеаризации получим

$$d\bar{p}/d\bar{\lambda} = C_0^p + C_p^p \bar{p} \quad (4.43)$$

Интегрируя (4.43) с учетом начального условия  $\bar{p}(\bar{\lambda}_0) = \bar{p}_0$ , найдем зависимость  $\bar{p}(\bar{\lambda})$  в явном виде

$$\bar{p} = \left( \bar{p}_0 + \frac{C_0^p}{C_p^p} \right) \exp(C_p^p(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)) - \frac{C_0^p}{C_p^p} \quad (4.44)$$

Явное выражение для пористости имеет вид

$$f = C_0^f + C_{\Delta p}^f \Delta p \quad (4.45)$$

Коэффициенты в формулах (4.43)–(4.44) определяются из разложения (4.41).



Представим линеаризованные выражения

$$\bar{q} = \bar{q}_0 X^\beta, \quad \bar{p} = a + bX^\alpha, \quad f = c + dX^\alpha \quad (4.46)$$

через коэффициент корректировки  $X$ . Подставляя (4.46) в условие пластичности (4.37), получим обыкновенное нелинейное уравнение  $\Phi(X) = 0$  относительно коэффициента корректировки  $X$ . Коэффициенты в формулах (4.46) приведены в работе [31]:

Это уравнение решим методом Ньютона

$$X^{n+1} = X^n - \Phi(X^n)/\Phi'(X^n) \quad (4.47)$$

$$\Phi'(X) = 2\beta\bar{q}_0^2 X^{2\beta-1} + \alpha X^{\alpha-1} [2q_1 d \operatorname{ch}(3/2q_2\bar{p}) + 3q_1 q_2 b f \operatorname{sh}(3/2q_2\bar{p}) - 2q_3 f d]$$

В качестве начального приближения берется  $X_0 = 1$ . Итерационный процесс (4.47) продолжается до тех пор, пока относительная погрешность  $\epsilon$  в определении  $X$  не станет меньше чем  $\epsilon_0 = 10^{-7}$ .

*Вычисление якобиана.* При решении полной системы уравнений методом Ньютона, нужно вычислить якобиан  $\partial\sigma/\partial\epsilon$ . В принятом подходе якобиан вычисляется в аналитическом виде.

Выражение для напряжений имеет вид

$$\sigma = -p\mathbf{I} + q\mathbf{n} \quad (4.48)$$

Так как  $\mathbf{s}^{\text{el}}$  и  $\mathbf{n}$  коллинеарны (см. [46]), то  $\mathbf{n} = \mathbf{s}^{\text{el}}/q^{\text{el}} = \mathbf{s}_0/q_0$ .

Общее выражение для якобиана имеет вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon} = \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\epsilon}\right) \otimes \mathbf{I} + \left(\frac{\partial\bar{q}}{\partial\epsilon}\right) \otimes \mathbf{n} + \bar{q} \left(\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\epsilon}\right) \quad (4.49)$$

$$\partial\bar{p}/\partial\epsilon = C_0^{p,\epsilon} \mathbf{I} + C_X^{p,\epsilon} (\partial X/\partial\epsilon) \quad (4.50)$$

$$\partial\bar{q}/\partial\epsilon = C_0^{q,\epsilon} \mathbf{n} + C_X^{q,\epsilon} (\partial X/\partial\epsilon) \quad (4.51)$$

$$\partial X/\partial\epsilon = C_I^X \mathbf{I} + C_n^X \mathbf{n} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\epsilon} = \frac{2G}{q^{\text{el}}} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{3}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right] \quad (4.53)$$

Коэффициент в выражениях (4.50)–(4.52) имеет вид (см. [31]):

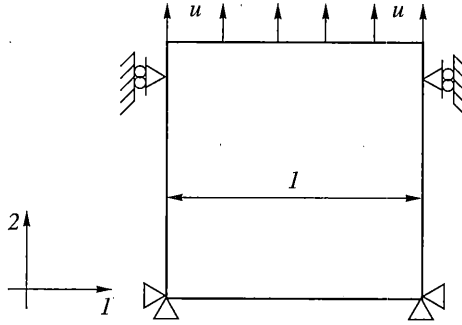
$$C_0^{q,\epsilon} = 3\bar{G}X^\beta, \quad C_X^{q,\epsilon} = \bar{q}_0\beta X^{\beta-1}$$

$$C_0^{p,\epsilon} = 3q_1 q_2 \bar{K} \frac{C_{\Delta p}^f}{C_p^p} [\bar{K} C_0^{sh} + (\bar{p}_t - a)(C_0^{sh} - C_{\Delta p}^{sh} \bar{K})] (1 + A^\alpha) -$$

$$- \bar{K} X^\alpha - \frac{3\bar{K} b q_1 q_2}{1000} (C_0^{sh} - C_{\Delta p}^{sh} \bar{K}) C_{\Delta p}^f X^\alpha \ln(X)$$

$$C_X^{p,\epsilon} = \alpha\beta X^{\alpha-1}$$

$$C_n^X = -\frac{2\bar{q} C_0^{q,\epsilon}}{2\bar{q} C_X^{q,\epsilon} + \Phi_p^\epsilon C_X^{p,\epsilon}}, \quad C_I^X = -\frac{\Phi_0^\epsilon + \Phi_p^\epsilon C_0^{p,\epsilon}}{2\bar{q} C_X^{q,\epsilon} + \Phi_p^\epsilon C_X^{p,\epsilon}}$$



Фиг. 13

Окончательное выражение для якобиана будет таким

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = C_I \mathbf{I} + C_{II} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + C_{nI} \mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + C_{In} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} + C_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.54)$$

В общем случае якобиан (4.54) несимметричный. Оценки величин показывают, что коэффициенты  $C_{nI}$  и  $C_{In}$  на два порядка меньше чем коэффициенты при симметричных членах. Поэтому, выражение (4.54) можно записать в симметричном виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \cong C_I \mathbf{I} + C_{II} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2} (C_{nI} + C_{In}) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}) + C_{nn} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.55)$$

Так как якобиан является положительно определенным, то в этом случае гарантировано существование обратной матрицы, которая фигурирует в методе Ньютона для полной краевой задачи. Значения коэффициента в (4.55) имеют вид

$$C_I = 2G\bar{q}/\bar{q}_0, \quad C_{II} = -C_0^{p,\epsilon} - C_X^{p,\epsilon} C_I^X - 1/3 C_I$$

$$C_{nn} = C_0^{q,\epsilon} + C_X^{q,\epsilon} - 1/3 C_I, \quad C_{nI} = C_X^{q,\epsilon} C_I^X, \quad C_{In} = C_X^{p,\epsilon} C_n^X$$

**4.3. Одноосное растяжение. Результаты расчета.** В качестве модельной задачи рассмотрим одноосное растяжение квадратного элемента, изображенного на фиг. 13 в случае плоской деформации.

Здесь использовалась логарифмическая мера деформаций

$$\epsilon = \ln(1 + u(t)/l), \quad u(t) = 0.5t \quad (4.56)$$

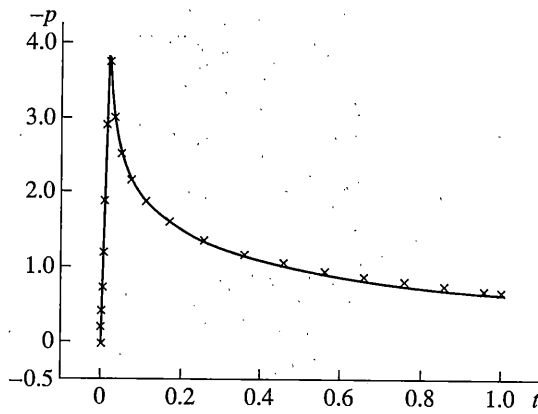
Начальная пористость материала равна  $f = 0.001$ .

Эта тестовая задача была решена двумя методами: методом, предложенным в [46] и заложенным в программе ABAQUS, и методом расщепления. Причем решение методом пакета ABAQUS осуществлялось с малым шагом в  $0.001t$ , а решение методом расщепления проводилось в начале с автоматическим шагом, ограниченным значением  $0.1t$ , а потом с шагом  $0.1t$  до  $t = 1$ .

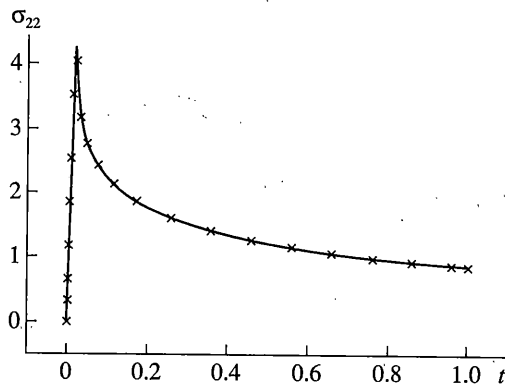
Результаты моделирования приведены на графиках.

На фиг. 14–16 изображены зависимости давления, нормального напряжения  $\sigma_{22}$  и пористости  $f$  от параметра нагружения. Сплошной линией показано точное решение [46], крестиками – по методу расщепления.

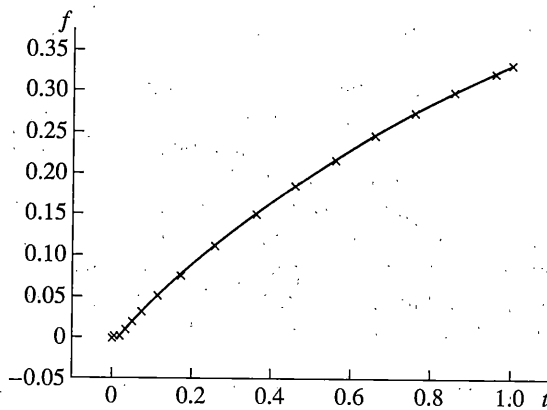
Как видно из графиков, совпадение результатов довольно хорошее. Максимальная относительная погрешность в определении давления не превышает  $\epsilon = 5\%$ . Остальные величины найдены с большей точностью.



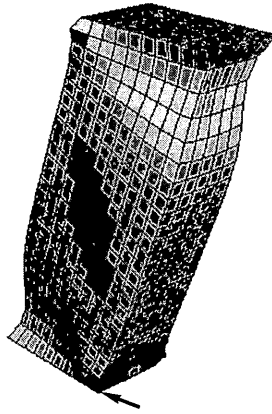
Фиг. 14



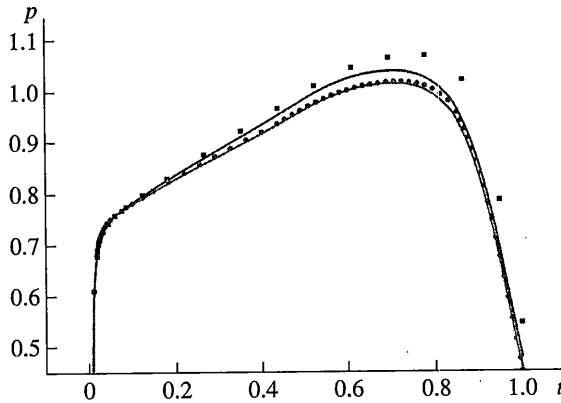
Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17



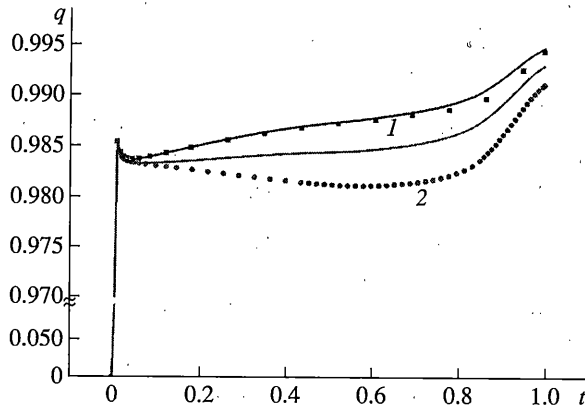
Фиг. 18

Выше было отмечено, что материал матрицы пластически несжимаем, а пластическая сжимаемость эффективного материала происходит за счет изменения пористости. В приведенном выше примере, тело увеличивает объем в полтора раза, а упругая деформация при этом составляет всего  $\epsilon^{el} = 0.002$ .

*Краевая задача.* Рассмотрим задачу о сдвиге бруска в трехмерном случае (фиг. 17). Выше эта задача была решена для упругопластического материала при условии пластичности Мизеса. Приведем результаты расчета той же краевой задачи для случая повреждающейся среды при условии пластичности Гарсона (GTN-модель). На фиг. 17 показаны форма бруска, лангранжева сетка после деформации и изолинии интенсивности деформаций.

На фиг. 18 изображен график зависимости давления от параметра нагружения в элементе, выделенном стрелкой на фиг. 17. Расчеты проводились двумя разными методами при различном временном шаге.

На фиг. 19 изображен график зависимости интенсивности касательных напряжений в элементе, выделенном стрелкой на фиг. 4.14. На фиг. 18, 19 приведены графики зависимости давления и интенсивности касательных деформаций от параметра нагружения,



Фиг. 19

сплошной линией показано точное решение по методу [46] (фиксированный мелкий шаг), квадратиками – метод [46] (автоматический выбор шага), кривые 1 и 2 получены методом расщепления (соответственно фиксированный мелкий шаг и с автоматическим выбором шага). Ошибка не превышает 0.5%.

При фиксированном шаге, для решения задачи методом расщепления требуется выполнить в 2.4 раза больше итераций, чем при решении этой же задачи методом [46], тогда как время расчета примерно одинаковое (MP – 1 час 31 мин., а ABAQUS – 1 час 27 мин.).

Таким образом, предложенный метод интегрирования определяющих соотношений затрачивает на одну итерацию времени в 2.4 раза меньше, чем стандартный.

Следует подчеркнуть, что в приведенном варианте расчета была проведена линеаризация уравнений, чтобы получить аналитическое решение [31]. В первом тестовом примере результат, полученный методом расщепления, хорошо совпадает с точным решением. Во втором примере совпадение результатов хуже, но с уменьшением шага точность расчета возрастает, что говорит о том, что линеаризация уравнений загроубляет решение при недостаточно мелком шаге. Следовательно, для улучшения сходимости метода на этапе корректора для определения давления (4.42) нужно применять численное интегрирование. Преимущество рассматриваемого метода заключается в скорости интегрирования определяющих соотношений.

Сравнение результатов, полученных при условии пластичности Мизеса и при условии пластичности Гарсона в рассмотренных примерах показывает существенное влияние пористости на напряженно-деформируемое состояние, которое нельзя не учитывать.

В заключение приведем сведения об интегрировании уравнений модели, рассмотренной в п. 3. Интегрирование полной системы определяющих уравнений микромеханической модели поврежденной упруговязкопластической среды, как видно из приведенных уравнений (3.16)–(3.19), достаточно сложно. Однако для многих процессов она может быть упрощена, так как не все описанные в ней эффекты необходимо учитывать одновременно. Например, при отсутствии упругой разгрузки можно пренебречь кинематическим упрочнением – разупрочнением, описывающим эффект Баушингера, и ограничиться лишь учетом влияния на условие пластичности Гарсона второго инварианта девиатора скорости пластической деформации. Это существенно упрощает интегрирование определяющих уравнений. Как показано в [17], [61], [62], их интегрирование методом расщепления несущественно усложняется по сравнению с интегрированием

уравнений GTN-модели и в то же время обеспечивает асимптотические свойства схемы метода расщепления так же как в случае упруговязкопластического материала при условии пластичности Мизеса [30].

**5. Выводы.** 1). На основе феноменологической теории дислокаций построена многомасштабная связанная микромеханическая модель упруговязкопластичности и поврежденности, которая корректно описывает масштабный эффект, локализацию пластических деформаций и вязкое континуальное разрушение.

2). Предложен эффективный численно-аналитический метод интегрирования упруговязкопластических уравнений с внутренними переменными. Преимущество предложенного метода расщепления заключается в том, что

интегрирование нелинейной системы из  $n$  определяющих уравнений ( $n = 6 + k$ ) для  $6$  компонент тензора напряжений и  $k$  внутренних переменных для случая связанных моделей пластических сред с поврежденностью сводится к численному решению нелинейной системы из 2-х уравнений. Остальные уравнения интегрируются в аналитическом виде, благодаря чему возрастает скорость решения системы (для GTN-модели более чем в 2 раза);

численно-аналитическое решение системы определяющих уравнений позволяет легко проанализировать разностные схемы расщепления многомасштабных упругопластических задач и гарантирует их устойчивость и асимптотическую сходимость к решению предельного равновесного уравнения при стремлении малых параметров к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00523) и программы ОЭММПУ РАН 14.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В.А., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарс. ун-та, 2001. 631 с.
2. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 434–444.
3. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение задач континуального разрушения. Препринт № 746. М.: ИПМех РАН, 2004. 40 с.
4. Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 156–166.
5. Гилман Дж.Д. Микродинамическая теория пластичности // Микропластичность. М.: Металлургия, 1972. С. 18–37.
6. Глушко А.И. Исследование откола как процесс образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 132–140.
7. Ежов Г.П., Кондауров В.И. О волнах разрушения в начально напряженном слое пористого материала // ПММ. Т. 70. Вып. 3. С. 515–530.
8. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестник АН СССР. 1957. № 11. С. 78–85.
9. Зегер А. Механизм скольжения и упрочнения в кубических гранецентрированных и гексагональных плотноупакованных металлах // Дислокации и механические свойства кристаллов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. С. 179–268.
10. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
11. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
12. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
13. Каннель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е. Ударноволновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 407 с.
14. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
15. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

16. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
17. Кибардин В.Ю., Кукуджанов В.Н. Моделирование континуального разрушения в упруговязкопластическом материале // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 113–123.
18. Кондауров В.И. Энергетический подход к задаче континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 6. С. 17–22.
19. Кондауров В.И. Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302–310.
20. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 206 с.
21. Кондауров В.И., Фортвов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. М.: Изд-во МФТИ, 2002. 336 с.
22. Коттрел А.Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М.: Metallurgizdat, 1958. 267 с.
23. Кукуджанов В.Н. Распространение сферических волн в упруговязкопластической среде // Изв. вузов. Машиностроение. 1958. № 2. С. 14–20.
24. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. Т. 8. 1985. № 4. С. 21–65.
25. Кукуджанов В.Н. К численному моделированию нестационарных процессов деформирования и разрушения упругопластических тел при больших деформациях // Математические методы в механике деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 75–84.
26. Кукуджанов В.Н. Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: Изд-во МФТИ, 1992. 125 с.
27. Кукуджанов В.Н., Иванов В.Л., Ковшов А.Н., Шнейдерман Д.Н. Исследование локализации пластических деформаций при потере устойчивости откосов. Препринт № 538. М.: ИПМех РАН, 1994. 67 с.
28. Кукуджанов В.Н. Микромеханическая модель неупругой среды для описания локализации деформаций // Тр. 9-ой конф. по прочности и пластичности. Т. 2. Прочность и пластичность. М.: ИПМ РАН, 1996. С. 118–125.
29. Кукуджанов В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 72–87.
30. Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 98–108.
31. Кукуджанов В.Н., Левитин А.Л., Синюк В.С. Численное моделирование повреждающихся упругопластических материалов. Препринт № 807. М.: ИПМех РАН. 2006. 55 с.
32. Никитин Л.В., Юнга С.Л. Методы теоретического определения тектонических деформаций и напряжений в сейсмоактивных областях // Изв. АН СССР. Физика Земли. № 11. С. 54–67.
33. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
34. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформаций твердых тел. Новосибирск: Наука, 1985. 229 с.
35. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
36. Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
37. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
38. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Вышш. шк., 1969. 608 с.
39. Судзуки Т., Ёсинага Х., Такеути С. Динамика дислокаций и пластичность. М.: Мир, 1989. 294 с.
40. Селективное разрушение минералов / Под ред. В.И. Ревнивцева. М.: Недра, 1988. 286 с.
41. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
42. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
43. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
44. Уилкинс М. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
45. ABAQUS Theory Manual.
46. Aravas N. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models // Intern. J. Numer. Methods in Engng. 1987. V. 24. № 7. P. 1395–1416.

47. *Barbee T.W., Seaman L., Crewdson R., Curran R.* Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // *Mater.* 1972. V. 7. № 3. P. 393–401.
48. *De Borst R.* Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strainsoftening solids. // *Computers and Structures.* 1987. V. 25. № 2. P. 211–224.
49. *Budiansky B., O'Connell R.J.* Elastic moduli of a cracked solid // *Intern. J. Solids and Structures.* 1976. V. 12. № 2. P. 81–97.
50. *Cho K., Chi Y.C., Duffy L.* // Microscopic observation of adiabatic shear bands in three different steels // *Brown University Report*, 1988.
51. *Chu C.C., Needleman A.* Void nucleation effects in biaxially stretched sheets // *Trans. ASME. J. Engng. Materials and Technology.* 1980. V. 102. № 3. P. 249–256.
52. *Curran D.R., Seaman L., Shockey D.A.* Dynamic failure in solids // *Phys. Today.* 1977. V. 30. № 1. P. 46–55.
53. *Curran D.R., Seaman L., Shockey D.A.* Dynamic failure of solids // *Physics Reports.* 1987. № 147. P. 253–388.
54. *Dornowski W., Perzyna P.* Localization and localized fracture phenomena in inelastic solids under cyclic dynamic loadings // *Foundation of Civil and Environmental Engng.* 2002. № 1. P. 41–86.
55. *Eshelby J.D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1957. V. 241. № 1226. P. 376–396.
56. *Gillman J.J.* Dislocation dynamics and the response of material to impact // *Appl. Mech. Rev.* 1968. V. 21. № 8. P. 767–783.
57. *Criffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1920. V. 221. P. 163–198.
58. *Gurson A.L.* Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Pt. I. Yield criteria and flow rules for porous ductile materials // *Trans ASME. J. Engng. Materials and Technology.* 1977. V. 99. № 1. P. 2–15.
59. *Hill R.* The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals // *J. Mech. and Phys. of Solids.* 1967. V. 15. № 2. P. 79–95.
60. *Krajcinovic D.* *Damage Mechanics.* Amsterdam: Elsevier, 1996. 761 p.
61. *Kukudzhanov V.N.* A new numerico-analytical method for the solution of elastoplastic equations based on the splitting of constitutive equations // *Book Computational Plasticity VII. / Eds. D.R.T. Owen et al. Barsezona CIMNE, 2005. V. 2. P. 711–714.*
62. *Kukudzhanov V.N.* A new splitting method for the solution of nonlinear equations of damaged elastoviscoplastic materials with complicated yield condition // *Proc. WCCM-VII. Los Angeles California USA, 2006 (CD-ROW).*
63. *Lemaitre J.* *A Course on Damage Mechanics.* Berlin–London: Springer, 1992. 210 p.
64. *Maugin G.A.* *The Thermodynamics of Plasticity and Fracture.* Cambridge: Univer. Press, 1992. 400 p.
65. *Miller O., Freud L.B., Needleman A.* Modeling and simulation of dynamic fragmentation in brittle materials // *Intern. J. Fracture.* 1999. V. 96. P. 101–125.
66. *Basista M., Nowacki W.K.* (eds.). *Modelling of Damage and Fracture Processes in Engineering Materials // Trends in Mechanics of Materials. V. 2.* Warsaw: IPPT PAN, 1999.
67. *Murakami S.* Mechanical modeling of material damage // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. № 2. P. 280–286.
68. *Needleman A.* A continuum model for void nucleation by inclusion debonding // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1987. № 3. P. 525–531.
69. *Nowacki W.K., Klepaczko J.R.* (Eds.) *New Experimental methods in Material Dynamics and Impact // Trends in Mechanics of Materials. V. 3.* Warsaw: IPPT PAN, 2001.
70. *Perzyna P., Drabik A.* Description of micro-damage process by porosity parameter for nonlinear viscoplasticity // *Arch. Mechanics.* 1989. V. 41. № 6. P. 895–908.
71. *Puttick K.E.* Ductile fracture in metals // *Phil. Mag. Ser. B.* 1959. V. 4. № 44. P. 964–969.
72. *Radaev Y.N.* Thermodynamical modeling of anisotropic damage growth. Pt. I. Canonical dynamic state variables of continuum damage mechanics and thermodynamical functions of three-dimensional anisotropic damage state // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 1996. V. 21. № 2. P. 129–152.
73. *Radaev Y.N.* Thermodynamical modeling of anisotropic damage growth. Pt. II. Canonical damage growth rate equations and theory of damage invariants // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 1996. V. 21. № 3. P. 197–222.



74. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1975. V. 23. № 6. P. 371–394.
75. *Shockey D.A., Curran D.R., Seaman L., Rosenberg J.T., Petersen C.F.* Fragmentation of rocks under dynamic loads // *Intern. J. Rock. Mech. Min. Sci.* 1974. V. 11. № 8. P. 303–317.
76. *Steglich D., Brocks W., Heerens J.* Punch Test for the Simulation of Ships Hull Damage. Experiment and Simulation. FENet, NAFEMS 2003. (Материал доступен в Интернете по адресу: <http://www.gkss.de/Themen/W/WMS>).
77. *Taylor J.W.* Dislocation dynamics and dynamic yielding // *J. Appl. Phys.* 1965. V. 36. № 10. P. 3146–3150.
78. *Tvergaard V.* Influence of voids on shear band instabilities under plane strain condition // *Intern. J. Fracture Mechanics*. 1981. V. 17. № 4. P. 389–407.
79. *Tvergaard V., Needleman A.* Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // *Acta Metallurgica*. 1984. V. 32. № 1. P. 157–169.
80. *Tvergaard V., Needleman A.* Elastic-viscoplastic analysis of ductile fracture // *Finite Inelastic Deformations – Theory of Applications* / Eds. D. Besdo and E. Stain. Berlin etc.: Springer. 1991. P. 3–14.
81. *Yew C.H., Taylor P.A.* A thermodynamic theory of dynamic fragmentation // *Intern. J. Impact Engng.* 1994. V. 15. P. 385–394.

Москва

Поступила в редакцию  
19.09.2006