

© 2006 г. В.М. МАЛЬКОВ, Ю.В. МАЛЬКОВА

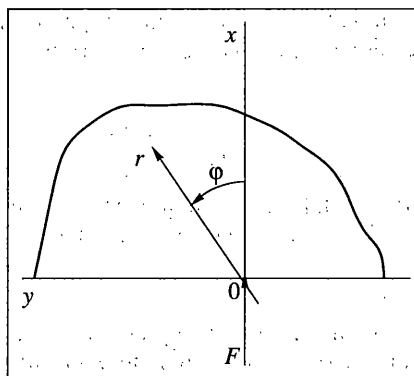
## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ФЛАМАНА

Рассмотрена обобщенная плоская задача нелинейной теории упругости для полуплоскости, нагруженной на границе внешней сосредоточенной силой (нелинейная задача Фламана). Для модели несжимаемого материала неогукковского типа получено аналитическое решение краевой задачи без наложения ограничений на величину деформаций. Сравнение решений нелинейной и линейной задач Фламана показало, что они отличаются принципиально, как характером напряженного состояния и перемещений в окрестности точки приложения силы, так и по другим свойствам. В нелинейной задаче присутствуют и радиальные и окружные напряжения, которые зависят от модели материала. Причем радиальные напряжения являются сжимающими, а окружные напряжения – растягивающими. Перемещения нелинейной задачи не содержат известных противоречий линейного решения, в частности, они ограничены и непрерывны в полюсе. В нелинейной задаче фигурируют несколько видов напряжений: истинные напряжения Коши, условные напряжения и напряжения Пиолы – Кирхгофа. Эти напряжения имеют разные асимптотики в окрестности полюса. В смысле близости к линейным напряжениям по типу особенности и другим параметрам приоритетными являются истинные напряжения Коши.

**Введение.** Решение линейной плоской задачи для полуплоскости, которая нагружена сосредоточенной силой на границе (фиг. 1), получено в 1892 г. Фламаном (сила нормальна к границе) и Буссинеском (для наклонной силы). Линейная плоская задача для клина решена Мичеллом в 1890 г. Экспериментальное исследование этих задач провел Вильсон (1891 г.).

В линейной задаче Фламана только радиальное напряжение отлично от нуля. Это напряжение имеет особенность типа  $1/r$  при  $r \rightarrow 0$ . Важно также отметить, что напряжение не зависит от механических свойств материала. Более подробные сведения об этих задачах можно найти в [1]. Линейная задача Фламана продолжает вызывать интерес и сейчас [2]. В [3] рассмотрены некоторые нелинейные плоские задачи при сосредоточенных нагрузках. Использован упругий потенциал частного вида, из которого не выводится линейный закон Гука в случае малых деформаций. Краевая задача оказалась линейной и свелась к решению уравнения Лапласа относительно вектора перемещений (в линейной теории упругости имеем бигармоническое уравнение). Нелинейная контактная задача о вдавливании эластомерного клина в жесткий штамп с клиновидным вырезом рассмотрена в [4]. Задача решалась приближенными аналитическими и численными методами (МКЭ) и результаты сопоставлены.

В данной работе исследована нелинейная обобщенная плоская задача для полуплоскости, нагруженной ортогонально к границе сосредоточенной силой. Свойства несжимаемого материала описываются неогукковским упругим потенциалом. Эта модель материала широко используется при решении нелинейных задач теории упругости эластомерных материалов. Ее применение оправдано в краевых задачах, где деформация не стеснена граничными условиями (в данном случае граница свободна от



Фиг. 1

напряжений). Имеются экспериментальные подтверждения применимости модели для расчета эластомерных элементов.

Одной из актуальных проблем является исследование правомерности применения уравнений линейной теории упругости для решения сингулярных краевых задач для областей с разрезами, сосредоточенными нагрузками и так далее. В задачах этого класса деформации не только не малы, как это предполагает линейная теория, но и обращаются в бесконечность в окрестности особой точки. Результаты работы вносят определенный вклад в изучение этой проблемы, так как позволяют сравнить аналитические решения линейной и нелинейной задач Фламана и выяснить влияние нелинейности на напряженное состояние и поле перемещений.

**1. Постановка краевой задачи.** Введем цилиндрические координаты отсчетной конфигурации  $(r, \varphi, z)$ , для полуплоскости имеем  $r \in [0, \infty)$ ,  $|\varphi| \leq \pi/2$ . Предложим, что векторный базис  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) этих координат совпадает с главными осями тензора деформации Коши. В результате деформации векторы  $\mathbf{e}_i$  переходят в векторы  $\mathbf{e}'_i$ , которые также образуют ортонормированный базис. В упомянутых выше линейных задачах Фламана и Мичелла это предположение выполняется, что и служит некоторым основанием для его принятия. Позже будет показано, что данная гипотеза оказывается справедливой и при больших деформациях.

Градиент деформации  $\mathbf{G} = (\nabla \mathbf{R})^T$ , где  $\mathbf{R}$  – вектор точки текущей конфигурации, и тензор условных напряжений  $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathcal{L} \mathbf{T}$  в смешанном векторном базисе будут диагональными [5]:

$$\mathbf{G} = \lambda_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha, \quad \mathbf{S} = s_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha \quad (1.1)$$

где  $\lambda_i$  – главные кратности удлинений, причем кратность удлинения в осевом направлении  $\lambda_3 = \text{const}$ ;  $J = \det \mathbf{G}$  – кратность изменения объема;  $\mathbf{T}$  – тензор истинных напряжений Коши. Векторы условных напряжений на площадках с нормальными  $\mathbf{e}_i$  таковы  $\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} = s_i \mathbf{e}'_i$ . В формулах (1.1) и далее по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 3, по латинским индексам суммирования нет.

Для плоской задачи параметр  $\lambda_3 = 1$ , для обобщенной плоской задачи  $\lambda_3 \neq 1$  есть заданное число или величина, определяемая по заданной осевой силе.

Граничные условия задачи

$$s_1, s_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad s_2 = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \pm \pi/2 \quad (1.2)$$

Результирующая напряжений  $\mathbf{s}_1$  на дуге окружности радиуса  $r = \text{const}$  должна уравновешивать внешнюю силу  $\mathbf{F}$  (сила отнесена к единице толщины тела)

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \mathbf{s}_1 r d\varphi = -\mathbf{F} \quad (1.3)$$

Когда  $r \rightarrow 0$  напряжения  $\mathbf{s}_1$  растут так, что сила  $\mathbf{F}$  остается постоянной.

Материал неогукковского типа задается определяющим уравнением [5]:

$$\mathbf{S} = \mu \mathbf{G}^T + q J \mathbf{G}^{-1} \quad (1.4)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига; для несжимаемого материала параметр  $q$  является неизвестной функцией (множителем Лагранжа). При малых деформациях из выражения (1.4) выводится линейный закон Гука несжимаемого материала. Запишем (1.4) в компонентах тензоров (1.1)

$$s_i = \mu \lambda_i + q J \lambda_i^{-1} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

Кратность изменения объема такова  $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ . Из условий для напряжений (1.2) и формул (1.5) вытекает

$$q \rightarrow -\mu \lambda_3^{-1}, \quad \lambda_i^2 \rightarrow J \lambda_3^{-1} \quad (i = 1, 2), \quad r \rightarrow \infty$$

При отсутствии объемных сил уравнение равновесия отсчетной конфигурации для закона (1.4) имеет вид

$$\text{div} \mathbf{S} = \mu \text{div} \mathbf{G}^T + \nabla q \cdot J \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

Так как тензор  $\mathbf{G}$  неособый, уравнение (1.6) можно преобразовать так

$$\mu [\text{div} \mathbf{C} - 0.5 \nabla \text{tr} \mathbf{C}] + J \nabla q = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{C} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$  – тензор деформации Коши.

**2. Решение краевой задачи.** Подставим в уравнение (1.7) тензор деформации Коши  $\mathbf{C} = \lambda_\alpha^2 \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ , записанный в его главных осях, и спроектируем на вектора базиса

$$\begin{aligned} 0.5 \mu r (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)'_r + \mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + r J q'_r &= 0 \\ 0.5 \mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)'_\varphi - J q'_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для модели несжимаемого материала  $J = 1$  и уравнения (2.1) являются линейными относительно двух искомых функций:  $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$  и  $q$ . Общее решение этих уравнений

$$\begin{aligned} 0.5 \mu (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)' &= g'_r(r) + q \\ r q &= h(\varphi) - 0.5 [r g'_r(r) + g(r)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $g(r)$  и  $h(\varphi)$  – неизвестные функции, подлежащие определению с помощью краевых условий.

Используя условие несжимаемости и формулы (2.2), найдем кратности удлинений

$$\begin{aligned} \mu \lambda_1^2 &= (g'_r + q) + \sqrt{(g'_r + q)^2 + \mu^2 \lambda_3^{-2}} \\ \mu \lambda_2^2 &= -(g'_r + q) + \sqrt{(g'_r + q)^2 + \mu^2 \lambda_3^{-2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из граничных условий  $s_2 = 0$  при  $\varphi = \pm\pi/2$  получим два уравнения для функции  $g(r)$ :

$$g'_r = \sqrt{(g'_r + q)^2 + \mu^2 \lambda_3^{-2}} \quad (2.4)$$

которые будут совместны, если  $h(-\pi/2) = h(+\pi/2) = h_0$ .

Из (2.4) видно, что функция  $g'_r(r) \geq \mu \lambda_3^{-1}$ , причем  $g'_r(r) \rightarrow \mu \lambda_3^{-1}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Обе части уравнения (2.4) возведем в квадрат, затем заменим неизвестную функцию  $g(r)$  и независимую переменную  $r$ , положив  $g(r) = 2h_0 + \mu \lambda_3^{-1} ry(r)$ ,  $t = \ln r$ . Результатом будет уравнение с постоянными коэффициентами

$$3y'_t{}^2 + 8yy'_t + 4y^2 = 4 \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.5) находится достаточно просто; сначала разрешим его относительно первой производной

$$y'_t = -4/3y \pm 2/3\sqrt{y^2 + 3}$$

Второе уравнение не совместимо с условием  $g'(r) \geq \mu \lambda_3^{-1}$ , из которого следует  $y'_t + y \geq 1$ , поэтому остается одно уравнение

$$y'_t = -4/3y + 2/3\sqrt{y^2 + 3} \quad (2.6)$$

Так как правая часть уравнения (2.6) непрерывно дифференцируема по  $y$ , то через каждую точку плоскости  $(t, y)$  проходит одна интегральная кривая. Уравнение (2.6) имеет очевидное решение  $y = 1$ , исследуем другие решения этого уравнения.

Пусть правая часть уравнения (2.6) не обращается в нуль, т.е.  $y \neq 1$ ; справедливы следующие оценки:

$$y < 1; y'_t > 0; \quad (y \uparrow 1, y'_t \rightarrow +0); \quad (y \rightarrow -\infty, y'_t \rightarrow +\infty)$$

$$y > 1; y'_t < 0; \quad (y \downarrow 1, y'_t \rightarrow -0); \quad (y \rightarrow +\infty, y'_t \rightarrow -\infty)$$

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

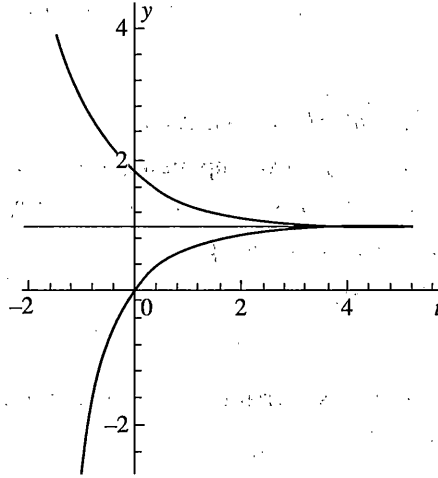
$$\frac{3\sqrt{\sqrt{y^2 + 3} - y}}{2\sqrt{y^2 + 3 - 2y}} = Ce^t = Cr, \quad C > 0 = \text{const} \quad (2.7)$$

На фиг. 2 показана одна из интегральных кривых  $y = y(t)$ , проходящая через точку  $t = 0, y = 0$ , другие интегральные кривые получаются при поступательном перемещении этой кривой вдоль оси  $t$ . Из фигуры видно, что функции  $y$  решения (2.7) не являются однозначными функциями переменной  $t$  или  $r$ , что противоречит физическому смыслу задачи.

Единственным допустимым решением будет  $y = 1$ , ему соответствует функция  $g(r) = 2h_0 + \lambda r \lambda_3^{-1}$ . Подставим это выражение в формулы (2.2):

$$0.5\mu(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = r^{-1}(h - h_0) \quad (2.8)$$

$$q = r^{-1}(h - h_0) - \mu \lambda_3^{-1}$$



Фиг. 2

Кратности удлинений (2.3) будут такими

$$\begin{aligned} r\mu\lambda_1^2 &= h - h_0 + f, & r\mu\lambda_2^2 &= -h + h_0 + f \\ f &= \sqrt{(h - h_0)^2 + \mu^2 r^2 \lambda_3^{-2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зная кратности удлинений (2.9) и функцию  $q$ , можно найти любые напряжения для закона упругости (1.5). Далее вместо выражения  $h - h_0$  будем писать просто  $h$ , позже увидим, что величина  $h_0 = 0$ .

**3. Вычисление напряжений.** Истинные напряжения Коши ( $\mathbf{T} = t_\alpha \mathbf{e}_\alpha' \mathbf{e}_\alpha'$ ), условные напряжения ( $\mathbf{S} = s_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ) и напряжения Пиолы – Кирхгофа ( $\mathbf{\Sigma} = \sigma_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ) для закона (1.4) вычисляются по формулам

$$Jt_i = \mu\lambda_i^2 + Jq, \quad s_i = \mu\lambda_i + Jq\lambda_i^{-1}, \quad \sigma_i = \mu + Jq\lambda_i^{-2} \quad (3.1)$$

Эти напряжения связаны зависимостью

$$Jt_i = \lambda_i s_i = \lambda_i^2 \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

В случае несжимаемого материала  $J = 1$  имеем

$$\begin{aligned} rt_1 &= 2h + f - r\mu\lambda_3^{-1}, & rt_2 &= f - r\mu\lambda_3^{-1} \\ \sigma_1 &= \mu + \mu \frac{h - r\mu\lambda_3^{-1}}{h + f}, & \sigma_2 &= \mu - \mu \frac{h - r\mu\lambda_3^{-1}}{h - f} \end{aligned}$$

Осевые напряжения вычисляются по формулам

$$t_3 = hr^{-1} + \mu(\lambda_3^2 - \lambda_3^{-1}), \quad s_3 = t_3 \lambda_3^{-1}, \quad \sigma_3 = t_3 \lambda_3^{-2}$$

Таким образом, краевая задача решена с точностью до неизвестной функции  $h(\varphi)$ . Поскольку эта функция не зависит от переменной  $r$ , уже сейчас можно сделать асимп-

асимптотические оценки кратностей удлинений и напряжений. Ввиду формул (3.2) очевидно, что эти напряжения имеют разную асимптотику.

В частности, для  $r \rightarrow 0$  имеем разложения

$$\lambda_1^2 = \frac{h}{\mu r} + \frac{|h|}{\mu r} \left[ 1 + \frac{\mu^2 r^2}{2h^2 \lambda_3^2} + O(r^4) \right]$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{h}{\mu r} + \frac{|h|}{\mu r} \left[ 1 + \frac{\mu^2 r^2}{2h^2 \lambda_3^2} + O(r^4) \right]$$

$$t_1 = [2h + |h|]r^{-1} - \mu \lambda_3^{-1} + \frac{r\mu^2}{2|h|\lambda_3^2} + O(r^3)$$

$$t_2 = |h|r^{-1} - \mu \lambda_3^{-1} + \frac{r\mu^2}{2|h|\lambda_3^2} + O(r^3)$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{2|h|}{\mu r}} \left[ \lambda_3 h r^{-1} - \mu + \frac{5}{8} \frac{\mu^2 r}{|h|\lambda_3} + O(r^2) \right]$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\mu r}{2|h|}} \left[ |h|r^{-1} - \mu \lambda_3^{-1} + \frac{3}{8} \frac{\mu^2 r}{|h|\lambda_3^2} + O(r^2) \right]$$

$$\sigma_1 = -\frac{2h^2 \lambda_3^2}{\mu r^2} + \frac{2h\lambda_3}{r} + \mu + O(r), \quad \sigma_2 = \mu + O(r)$$

Асимптотические разложения для  $r \rightarrow \infty$

$$\lambda_1^2 = \lambda_3^{-1} + \frac{h}{\mu r} + \frac{1}{2} \frac{h^2 \lambda_3}{\mu^2 r^2} + O(r^{-4})$$

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^{-1} - \frac{h}{\mu r} + \frac{1}{2} \frac{h^2 \lambda_3}{\mu^2 r^2} + O(r^{-4})$$

$$t_1 = 2\frac{h}{r} + \frac{h^2 \lambda_3}{2\mu r^2} + O(r^{-4}), \quad t_2 = \frac{h^2 \lambda_3}{2\mu r^2} + O(r^{-4})$$

$$s_1 = 2\sqrt{\lambda_3} \frac{h}{r} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{h\lambda_3}{\mu r} \right) + O(r^{-4})$$

$$s_2 = \sqrt{\lambda_3} \frac{h^2 \lambda_3}{2\mu r^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h\lambda_3}{\mu r} \right) + O(r^{-4})$$

$$\sigma_1 = 2\frac{h\lambda_3}{r} - \frac{3}{2} \frac{h^2 \lambda_3^2}{\mu r^2} + O(r^{-3}), \quad \sigma_2 = \frac{h^2 \lambda_3^2}{2\mu r^2} + O(r^{-3})$$

На границах области  $\varphi = \pm\pi/2$  имеем  $h = 0$  и некоторые из асимптотических формул не работают, здесь нужно использовать полные формулы. В окрестности границ необходимо специальное исследование асимптотики решения. На самых границах напряжения  $t_i, s_i, \sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) обращаются в нуль, другие величины принимают значения  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^{-1}, s_3 = \mu(\lambda_3 - \lambda_3^{-2})$ .

Отметим одно важное обстоятельство. Решение нелинейной задачи Фламана, наряду с радиальными напряжениями, содержит и окружные напряжения, которые в линейной задаче равны нулю. Причем окружные напряжения являются растягивающими и имеют такую же особенность в окрестности полюса, что и радиальные напряжения (речь идет об истинных напряжениях Коши).

**4. Определение функции  $h(\varphi)$ .** Незвестную функцию  $h(\varphi)$  можно найти, задав распределение напряжения  $s_1$  на дуге  $r = r_0$ . Однако при произвольном задании напряжения можно "испортить" систему цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$  в том смысле, что она перестанет быть главной. Поэтому будем искать эту функцию другим способом.

В полярном разложении градиента деформации  $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$  тензор кратностей удлинений  $\mathbf{\Lambda} = \lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  уже найден. Нужно найти ортогональный тензор  $\mathbf{Q}$ , переводящий базис  $\mathbf{e}_i$  в базис  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i$ . Общий вид ортогонального тензора плоской задачи в базисе отсчетной конфигурации [5]:

$$\mathbf{Q} = \cos\omega(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) - \sin\omega(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \quad (4.1)$$

Используя формулы дифференцирования векторов  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i$ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}'_1}{\partial r} = -\frac{1}{r\lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \mathbf{e}'_2, \quad \frac{\partial \mathbf{e}'_1}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial r \lambda_2}{\partial r} \mathbf{e}'_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}'_2}{\partial r} = -\frac{1}{r\lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \mathbf{e}'_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}'_2}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial r \lambda_2}{\partial r} \mathbf{e}'_1$$

получим два уравнения для функции  $\omega$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{1}{r\lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi}, \quad 1 + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial r \lambda_2}{\partial r} \quad (4.2)$$

Условие совместности уравнений (уравнение Ляме текущей конфигурации):

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r\lambda_1} \frac{\partial r \lambda_2}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r\lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.3)$$

используем для нахождения функции  $h(\varphi)$ . Подставим в (4.3) кратности удлинений (2.9) и перейдем к пределу при  $r \rightarrow \infty$ ; в результате получим уравнение для функции  $h(\varphi)$ :  $h''_\varphi + h = 0$ . Общее решение этого уравнения

$$h = D_1 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi \quad (4.4)$$

где константы  $D_1$  и  $D_2$  находятся из условия равновесия области, ограниченной радиусом  $r = \text{const}$ . Так как задача симметрична относительно луча  $\varphi = 0$ , то константа  $D_2 = 0$ .

Из условия равновесия (1.3), записанного в предельной форме при  $r \rightarrow \infty$ , найдем константу  $D_1$ , тогда формула (4.4) примет вид

$$h = -F \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda_3}} \cos \varphi$$

где  $F$  – величина внешней силы (на единицу толщины тела). Не ограничивая общности, можно было считать  $h_0 = 0$  в полученных выше формулах. На интервале  $|\varphi| < \pi/2$  функция  $h(\varphi)$  отрицательна.

Обозначим  $x = \pi \mu r / (F \sqrt{\lambda_3})$ , тогда истинные напряжения Коши можно представить в следующем виде:

$$\lambda_3 t_1 / \mu = -1 - 2x^{-1} \cos \varphi + \sqrt{(x^{-1} \cos \varphi)^2 + 1}$$

$$\lambda_3 t_2 / \mu = -1 + \sqrt{(x^{-1} \cos \varphi)^2 + 1}$$

Правые части этих равенств содержат только два параметра  $x$  и  $\varphi$ .

**5. Нахождение перемещений.** Сначала найдем угол  $\omega = \omega(r, \varphi)$ , который характеризует поворот главных осей  $e_i$  в результате деформации. Этот угол входит в ортогональный тензор (4.1).

Проинтегрируем первое выражение (4.2) по переменной  $r$ :

$$\omega = \omega_0(\varphi) + \frac{1}{2} \frac{\lambda_3}{\mu r} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{\mu^2 r^2}{h^2 \lambda_3^2}} \right] \frac{dh}{d\varphi} \quad (5.1)$$

где  $\omega_0(\varphi)$  – неизвестная функция. Асимптотические разложения функции  $\omega$  будут

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{4} \frac{\mu r}{h^2 \lambda_3^2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{\mu^2 r^2}{h^2 \lambda_3^2} + O(r^4) \right] \frac{dh}{d\varphi}, \quad r \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2h} \left[ 1 + \frac{h \lambda_3}{\mu r} + \frac{1}{2} \frac{h^2 \lambda_3^2}{\mu^2 r^2} + O(r^{-4}) \right] \frac{dh}{d\varphi}, \quad r \rightarrow \infty$$

Поскольку  $\omega \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , из последнего равенства получим

$$\omega_0 = -\frac{1}{2h} \frac{dh}{d\varphi}$$

Таким образом, градиент деформации  $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$  полностью построен.

Вектор текущего положения точки  $\mathbf{R}$  находится из уравнения  $\mathbf{G}^T = \mathbf{V}\mathbf{R}$  при заданном градиенте деформации. Необходимое и достаточное условие разрешимости этого уравнения [6]:

$$\text{rot} \mathbf{G}^T = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

Можно проверить, что равенство выполняется при подстановке в него тензора  $\mathbf{G} = \lambda_\alpha e'_\alpha e_\alpha$ . Тем самым оправдано начальное предположение, что система цилиндрических координат  $(r, \varphi, z)$  является главной.



При условии (5.2) вектор  $\mathbf{R}$  определяется криволинейным интегралом

$$\mathbf{R} = \int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int (\lambda_1 \mathbf{e}'_1 dr + \lambda_2 \mathbf{e}'_\alpha r d\varphi) \quad (5.3)$$

который не зависит от пути интегрирования [6];  $\mathbf{r}$  – вектор точки отсчетной конфигурации. Для компонент вектора  $\mathbf{R} = R_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  из соотношения  $d\mathbf{R} = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$  получим уравнения

$$\begin{aligned} (R_1)'_r &= \lambda_1 \cos \omega, & (R_2)'_r &= \lambda_1 \sin \omega \\ (R_1)'_\varphi - R_2 &= -r\lambda_2 \sin \omega, & (R_2)'_\varphi + R_1 &= r\lambda_2 \cos \omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из первого и второго уравнений (5.4) следует

$$R_1 = \int \lambda_1 \cos \omega dr + f_1(\varphi), \quad R_2 = \int \lambda_1 \sin \omega dr + f_2(\varphi) \quad (5.5)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – неизвестные функции угла  $\varphi$ , определяемые из третьего и четвертого уравнений (5.4):

$$\begin{aligned} f_1 &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi - \int \lambda_1 \cos \omega dr - \\ &- \cos \varphi \int r\lambda_2 \sin(\omega + \varphi) d\varphi + \sin \varphi \int r\lambda_2 \cos(\omega + \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \int \lambda_1 \sin \omega dr + \\ &+ \sin \varphi \int r\lambda_2 \sin(\omega + \varphi) d\varphi + \cos \varphi \int r\lambda_2 \cos(\omega + \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Константа  $C_2 = 0$  в силу четности функции  $f_1$ , константа  $C_1$  определяется, если фиксировать перемещение любой точки луча  $\varphi = 0$ .

Вычислим компоненты тензора деформации Коши  $\mathbf{C} = c_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$  через компоненты вектора  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} c_{11} &= (R'_{1,r})^2 + (R'_{2,r})^2, & r^2 c_{22} &= (R'_{1,\varphi} - R_2)^2 + (R'_{2,\varphi} + R_1)^2 \\ rc_{12} &= R'_{1,r}(R'_{1,\varphi} - R_2) + R'_{2,r}(R'_{2,\varphi} + R_1) \end{aligned}$$

С помощью формул (5.4) можно убедиться, что компонента  $c_{12} = 0$ . Это также подтверждает правильность гипотезы, что векторы  $\mathbf{e}_i$  совпадают с главными осями тензора деформации Коши.

Далее проведем сравнение перемещений линейной и нелинейной задач. Вектор  $\mathbf{R}$  представим в виде суммы  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$  – вектор перемещений,  $u_1$  и  $u_2$  – радиальное и окружное перемещения, соответственно (здесь не рассматриваются осевые перемещения). Поскольку нелинейная задача решена для модели несжимаемого материала, то линейные перемещения возьмем для такой же модели. В линейной плоской задаче перемещения имеют вид

$$u_1 = -\frac{F}{2\pi\mu} (\ln r - C) \cos \varphi, \quad u_2 = \frac{F}{2\pi\mu} (1 + \ln r - C) \sin \varphi \quad (5.6)$$

где  $C$  – константа. Перемещения для сжимаемого материала отличаются от (5.6) наличием непериодических слагаемых [1] и также имеют логарифмическую особенность в полюсе.

Перемещения нелинейной задачи (5.5) ограничены в полюсе. Например, рассмотрим текущие координаты точек луча  $\varphi = 0$ :

$$R_1 = \int \lambda_1(r, 0) dr + \text{const} \quad (5.7)$$

Построим асимптотические разложения этого выражения

$$R_1 = \frac{r}{3\lambda_3} \sqrt{\frac{2\mu r}{|h|}} [1 + O(r^2)], \quad r \rightarrow 0$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \left[ r + \frac{h\lambda_3}{2\mu} \ln r + O(r^{-2}) \right], \quad r \rightarrow \infty$$

Отсюда следует, что радиальное перемещение не имеет особенностей в полюсе, в отличие от перемещения линейной задачи. Разложение в окрестности бесконечности содержит  $\ln r$ , как и перемещения (5.6).

Интеграл (5.7) можно выразить через гипергеометрические функции, предварительно записав его в виде,

$$R_1 = \frac{F}{\pi\mu} \int \sqrt{\sqrt{1+x^{-2}} - x^{-1}} dx + \text{const}, \quad x = \frac{\pi\mu r}{F\sqrt{\lambda_3}}$$

Таким образом, основное противоречие перемещений линейной задачи Фламана устраняется в нелинейной ее постановке.

Радиальные перемещения (5.6) на лучах  $\varphi = \pm\pi/2$  равны нулю. Для сжимаемого материала эти перемещения постоянны (не равны нулю) и направлены к полюсу [1]. Это второе противоречие с физическим процессом, так как очевидно, что в полюсе перемещения должны быть равны нулю и непрерывны.

В нелинейной задаче, из формул (5.5) при  $\varphi = \pm\pi/2$  получим

$$R_1 = \int \sqrt{\lambda_3^{-1}} \cos \omega dr + \text{const}, \quad R_2 = \int \sqrt{\lambda_3^{-1}} \sin \omega dr \quad (5.8)$$

Функция  $\omega$  на лучах  $\varphi = \pm\pi/2$  равна

$$\omega\left(r, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_3}{\mu r} \frac{dh}{d\varphi}$$

Разложения функций (5.8) на бесконечности имеют вид

$$R_1 = \sqrt{\lambda_3^{-1}} r \left( 1 + \frac{1}{2} \omega^2 + \dots \right), \quad R_2 = \sqrt{\lambda_3^{-1}} \omega r \left( \ln r + \frac{1}{12} \omega^2 + \dots \right)$$

Угол  $\omega$  имеет в полюсе особенность первого порядка, как и угол поворота линейной задачи. Полученное выше разложение угла  $\omega$  для области, не содержащей окрестности лучей  $\varphi = \pm\pi/2$ , не имеет особенностей в полюсе. Интегралы (5.8) можно выразить через интегральные синус и косинус.

Из формул (5.5), (5.8) следует, что функции  $R_1$  и  $R_2$  ограничены в точке  $r = 0$  и непрерывны, в частности  $R_1(0) = 0$ . Вне полюса радиальное перемещение не равно нулю и зависит от  $r$ . Так что и второе противоречие перемещений линейной задачи устраняется при учете нелинейности.

**6. Заключение.** Напряженное состояние нелинейной задачи зависит от упругих свойств материала, т.е. от принятой модели материала. Напряжения линейной задачи

не зависят от параметров упругости материала, это общее свойство плоских задач рассматриваемого класса [1, 6].

Решение нелинейной задачи содержит и радиальные и окружные напряжения. Причем окружные напряжения являются растягивающими и не малы, в частности, оба истинных напряжения в окрестности полюса при  $r \rightarrow 0$  имеют особенность  $1/r$ . Окружные напряжения линейной задачи Фламана равны нулю. Обратим внимание на еще одно обстоятельство. В разложении истинных напряжений для  $r \rightarrow 0$  коэффициент интенсивности радиального напряжения равен  $-1$ , а окружного  $+1$ ; коэффициенты для линейных напряжений соответственно  $-2$  и  $0$ . Качественно другое распределение напряжений нелинейной задачи дает возможность уточнить критерии прочности, использующие линейные решения. Наличие бесконечно больших растягивающих напряжений в окружном направлении позволяет также лучше объяснить механические процессы, происходящие при резке материалов острым инструментом.

Перемещения линейной задачи имеют ряд противоречий с физическими представлениями, например, логарифмическая особенность в полюсе, разрыв перемещений в полюсе. Эти противоречия пытались объяснить наличием пластической области и другими причинами, не учитываемыми математической моделью задачи [1]. Однако, при нелинейной постановке задачи Фламана получили перемещения, свободные от указанных недостатков. Следовательно, их причиной является неучет нелинейности деформации в окрестности полюса.

В нелинейной задаче фигурируют разные виды напряжений, рассмотрены истинные напряжения Коши, условные напряжения и напряжения Пиолы – Кирхгофа. Эти напряжения имеют разные особенности в полюсе, из них только истинные напряжения Коши имеют тот же тип особенности, что и линейные напряжения. Главные члены разложения истинных напряжений не зависят от материала. По этим параметрам близости к линейным напряжениям истинные напряжения являются приоритетными, по сравнению с напряжениями других видов. Именно истинные напряжения имеет смысл сравнивать с линейными напряжениями.

Результаты работы показывают, что для решения сингулярных краевых задач, где напряжения и деформации не ограничены в окрестностях особых точек, целесообразно использовать уравнения нелинейной теории упругости.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00214).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
2. Unger D.J. Similarity solution of the Flamant problem by means of a one – parameter group transformation // J. Elasticity. 2002. V. 66. № 1. P. 93–97.
3. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 2. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 195 с.
4. Gao Y.C., Zhou Z. Large strain contact of a rubber wedge with a rigid notch // Intern. J. Solids and Structures. 2001. V. 38. № 48/49. P. 8921–8928.
5. Мальков В.М. Основы математической нелинейной теории упругости. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 216 с.
6. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
2.07.2004