

УДК 539.3

© 2006 г. **Н.В. МИНАЕВА**

**О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОСЫ,
БЛИЗКОМ К ОДНОРОДНОМУ**

Аналитический метод получения приближенного решения задач, описывающих напряженно-деформированное состояние твердых тел, разработан в [1–4]. Известно, что для нахождения в пространстве параметров, характеризующих внешнее воздействие, границы области непрерывной зависимости решения соответствующей задачи от характеристик геометрических несовершенств тела необходимо построить вспомогательную линеаризованную задачу. Граничные условия при этом следует формулировать на границе тела в деформированном состоянии. В данной работе для случая плоской деформации проведена линеаризация граничных условий, заданных в интегральном виде на границе тела в деформированном состоянии. В качестве примера рассмотрена задача о сжатии упруго подкрепленной полосы.

Пусть граница тела в ненагруженном состоянии описывается функциями

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = f_3(x) \quad (1)$$

Координаты точек A и B (фигура) будут находиться из следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1), \quad \eta_2 = f_2(\xi_2) \\ \xi_1 &= f_3(\eta_1), \quad \xi_2 = f_3(\eta_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Как следует из (2), ординаты точек A и B будут находиться из решений следующих уравнений:

$$\eta_1 = f_1(f_3(\eta_1)), \quad \eta_2 = f_2(f_3(\eta_2)) \quad (3)$$

В частности, если $f_3(y) \equiv l$, то из (3) получаем, что

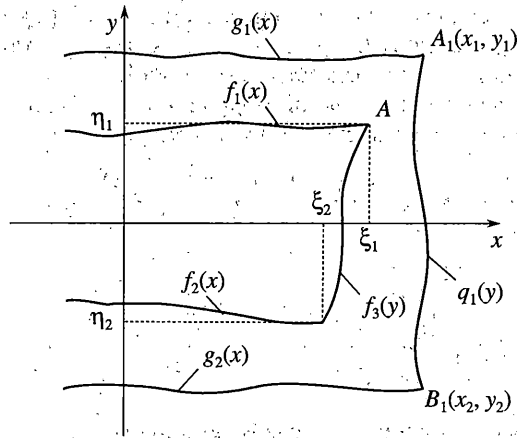
$$\eta_i = f_i(l), \quad \xi_i = l \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

Граница тела в деформированном состоянии пусть описывается функциями

$$y = g_1(x), \quad y = g_2(x), \quad x = q_1(y) \quad (5)$$

Граничное условие задано в виде

$$\int_{y_1}^{y_2} \varphi(q_1(y), y) dy = a \quad (6)$$



Ординаты точек A_1 и B_1 , как следует из фигуры, определяются следующими соотношениями

$$y_i = \eta_i + v(\xi_i, \eta_i) \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

Пусть при $f_i = f_i^0$ ($i = 1, 2, 3$) получено решение соответствующей задачи, когда хотя бы одно из граничных условий имеет вид (6), $u = u^0(x, y)$, $v = v^0(x, y)$. Согласно теореме о неявных функциях [5, 6] надо построить задачу относительно вспомогательных функций $\zeta_i(x, y)$. Соотношения (7) примут вид

$$y_i = \eta_i + v^0(\xi_i, \eta_i) + \zeta_2^{(i)}(\xi_i, \eta_i) \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

а граничное условие (6) станет следующим

$$\int_{\eta_2^0 + \zeta_2^{(2)}}^{\eta_1^0 + \zeta_2^{(1)}} [\varphi^0(q_1^0 + \zeta_3, y) + \zeta(q_1^0 + \zeta_3, y)] dy = a \quad (9)$$

$$\eta_i^0 = \eta_i + v^0(\xi_i, \eta_i), \quad \zeta_2^{(i)} = \zeta_2(\xi_i, \eta_i) \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

Проведя линеаризацию в (9) по ζ и ζ_3 , с учетом того, что

$$\int_{\eta_2^0}^{\eta_1^0} \varphi^0(y) dy = a \quad (11)$$

получаем граничные условия в следующем виде

$$\int_{\eta_2^0}^{\eta_1^0} \left[\frac{\partial \varphi^0(q_1^0, y)}{\partial x} \zeta_3 + \zeta(q_1^0) \right] dy = \varphi^0(q_1^0(\eta_2^0), \eta_2^0) \zeta_2(\xi_2, \eta_2) - \varphi^0(q_1^0(\eta_1^0), \eta_1^0) \zeta_2(\xi_1, \eta_1) \quad (12)$$

Рассмотрим поведение упругой полосы в случае плоской деформации, которая по кромкам $x = q_1$, $x = q_2$, т.е. от точки $A_1(x_1, y_1)$ до точки $B_1(x_2, y_2)$ и от точки $C_1(x_3, y_3)$ до

точки $D_1(x_4, y_4)$, нагружена сжимающим давлением p , а по кромкам $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, т.е. от точки $A_1(x_1, y_1)$ до точки $D_1(x_4, y_4)$ и от точки $C_1(x_3, y_3)$ до точки $B_1(x_2, y_2)$, упруго подкреплена с коэффициентом жесткости основания k .

Следуя [7], в качестве математической модели, описывающей состояние полосы из несжимаемого материала, примем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_x - \omega\tau)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau - \omega\sigma_y)}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial(\tau + \omega\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y + \omega\tau)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \sigma_x - \sigma_y &= 4G\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия сформулируем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_n|_{y=g_i} &= 0, \quad P_y|_{y=g_i} = -k[g_i(x) - y_i(x)] \\ \int_{A_1B_1} P_x|_{x=q_1} ds &= \int_{C_1D_1} P_x|_{x=q_2} ds = -2ph \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_{A_1B_1} P_x|_{x=q_1} y ds = \int_{C_1D_1} P_x|_{x=q_2} y ds = 0 \quad (15)$$

$$\int_{AB} v|_{x=f_3} ds = \int_{CD} v|_{x=f_4} ds = 0$$

Поскольку в (15) $ds = \sqrt{1 - \dot{q}_i^2} dy$ ($i = 1, 2$), то граничные условия (15) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \int_{y_2}^{y_1} (\sigma_x - \tau\dot{q}_1)|_{x=q_1} dy &= \int_{y_4}^{y_3} (\sigma_x - \tau\dot{q}_2)|_{x=q_2} dy = -2ph \\ \int_{y_2}^{y_1} (\sigma_x - \tau\dot{q}_1)|_{x=q_1} y dy &= \int_{y_4}^{y_3} (\sigma_x - \tau\dot{q}_2)|_{x=q_2} y dy = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1} v|_{x=f_3} dy = \int_{\eta_4}^{\eta_3} v|_{x=f_4} dy = 0$$

Рассмотрим случай, когда

$$f_3(y) = l + l^{(1)}(y), \quad f_4(y) = -f_3(y), \quad k = k^0 + k^{(1)}(x), \quad G = G^0 + G^{(1)}(x, y) \quad (17)$$

При $f^{(1)}(x) \equiv l^{(1)}(y) \equiv k^{(1)}(x) \equiv G^{(1)}(x, y) \equiv 0$ задача (13)–(15) допускает решение

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^0 &= -p, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 = -kh\varepsilon_y^0, \quad \tau = \tau^0 = 0 \\ v = v^0 &= \varepsilon_y^0 y; \quad u = u^0 = -\varepsilon_y^0 x \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует, что

$$g_1(x) = g_1^0(x) \equiv (1 + \varepsilon_y^0)h, \quad g_2(x) = g_2^0(x) \equiv -(1 + \varepsilon_y^0)h \quad (19)$$

Для того, чтобы выяснить, при каких значениях параметра внешней нагрузки p решение (18) задачи (13)–(15) при $f^{(1)}(x) < h$; $l^{(1)}(y) < l$; $G^{(1)} < G^{(0)}$ и $k^{(1)}(x) < k^0$ можно было бы принимать в качестве приближенного решения этой задачи, надо рассмотреть вопрос о непрерывности зависимости решения задачи (13)–(15) от функций $f^{(1)}$, $l^{(1)}$, $k^{(1)}$, $G^{(1)}$ и $f^{(1)} \equiv l^{(1)} \equiv k^{(1)} \equiv G^{(1)} \equiv 0$. А для этого надо рассмотреть вспомогательную задачу относительно функций ζ_i :

$$\frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_5}{\partial y} + \frac{\sigma^0 y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial \zeta_5}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} - \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0, \quad \zeta_3 - \zeta_4 = 4G \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \quad \zeta_5 = G^0 \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \right)$$

$$(\zeta_4 + k\zeta)_y = \pm h = 0, \quad \left(\zeta_5 - \sigma_x \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \right)_{x = \pm h} = 0 \quad (21)$$

$$\int_{y_2}^{y_1} (\sigma_x^0 + \zeta_3 - \zeta_5 \psi_1)_{x = \psi_1} dy = \int_{y_4}^{y_3} (\sigma_x^0 + \zeta_3 - \zeta_5 \psi_2)_{x = \psi_2} dy = -2ph$$

$$\int_{y_2}^{y_1} (\sigma_x^0 + \zeta_3 - \zeta_5 \psi_1)_{x = \psi_1} y dy = \int_{y_4}^{y_3} (\sigma_x^0 + \zeta_3 - \zeta_5 \psi_2)_{x = \psi_2} y dy = 0 \quad (22)$$

$$\int_{-h}^h (v^0 + \zeta_2)_{x = \psi_1} dy = \int_{-h}^h (v^0 + \zeta_2)_{x = \psi_2} dy = 0$$

$$y_1 = h + v^0(l, h) + \zeta_2(l, h), \quad y_2 = -h + v^0(l, -h) + \zeta_2(l, -h)$$

$$y_3 = h + v^0(-l, h) + \zeta_2(-l, h), \quad y_4 = -h + v^0(-l, -h) + \zeta_2(-l, -h)$$

Функция $\psi_1(x)$ определяется следующей параметрической формой записи: $x = l + u^0(l, t) + \zeta_1(l, t)$, $y = t + v^0(l, t) + \zeta_2(l, t)$, функция $\psi_2(x)$ – такой формулой:

$$x = l + u^0(-l, t) + \zeta_1(-l, t), \quad y = t + v^0(-l, t) + \zeta_2(-l, t)$$

Далее необходимо провести линейризацию по ζ_i граничных условий (22). Линейризованные по ζ_i функции ψ_i будут

$$\psi_1 = (1 + \varepsilon_x^0)l + \zeta_1 \left(l, \frac{y}{1 + \varepsilon_y^0} \right), \quad \psi_2 = -(1 + \varepsilon_x^0)l + \zeta_1 \left(-l, \frac{y}{1 + \varepsilon_y^0} \right)$$

Тогда линейризованные граничные условия (22) будут иметь вид

$$\int_{-y_1^0}^{y_1^0} \zeta_3|_{x = \pm x_1^0} dy + \sigma_x^0 [\zeta_2(\pm l, h) - \zeta_2(\pm l, -h)] = 0$$

$$\int_{-y_1^0}^{y_1^0} \zeta_3|_{x=\pm x_1^0} y dy + \sigma_x^0 h [\zeta_2(\pm l, h) + \zeta_2(\pm l, -h)] = 0 \quad (23)$$

$$\int_{-h}^h \zeta_2|_{x=\pm l} dy = 0$$

$$x_1^0 = (1 + \varepsilon_x^0)l; \quad y_1^0 = (1 + \varepsilon_y^0)h$$

При $\varepsilon_x^0 < 1$ и $\varepsilon_y^0 < 1$ граничные условия (23) можно заменить следующими:

$$\int_{-h}^h \zeta_3(\pm l, y) dy + \sigma_x^0 [\zeta_2(\pm l, h) - \zeta_2(\pm l, -h)] = 0$$

$$\int_{-h}^h \zeta_3(\pm l, y) y dy + \sigma_x^0 h [\zeta_2(\pm l, h) + \zeta_2(\pm l, -h)] = 0 \quad (24)$$

$$\int_{-h}^h \zeta_2(\pm l, y) dy = 0$$

Следуя [7], решение задачи (20), (24) ищем в виде

$$\zeta_1 = \partial\Phi/\partial y, \quad \zeta_2 = -\partial\Phi/\partial x, \quad \Phi(x, y) = \varphi(y) \sin \lambda x \quad (25)$$

При $\lambda = \pi/l$ граничные условия (24) будут выполнены. Задача относительно функции $\varphi(y)$, как следует из [7], будет иметь нетривиальное решение, если будет выполнено следующее условие:

$$2(\alpha_{22}\alpha_{14} - \alpha_{24}\alpha_{12})(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23}) + 2(\alpha_{22}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{32})(\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{13}) = 0 \quad (26)$$

$$\alpha_{11} = k_1 \operatorname{sh} \beta - 2 \operatorname{ch} \beta, \quad \alpha_{12} = k_1 \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta$$

$$\alpha_{13} = k_1 \operatorname{sh} \gamma_2 \beta - \frac{\gamma_2^2 + 1}{\gamma_2} (1 - \gamma) \operatorname{ch} \gamma_2 \beta, \quad \alpha_{14} = k_1 \operatorname{ch} \gamma_2 \beta - \frac{\gamma_2^2 + 1}{\gamma_2} (1 - \gamma) \operatorname{sh} \gamma_2 \beta$$

$$\alpha_{21} = -2(1 + \gamma) \operatorname{sh} \beta, \quad \alpha_{22} = -2(1 + \gamma) \operatorname{ch} \beta, \quad \alpha_{23} = -(1 + \gamma_2^2 + 2\gamma) \operatorname{sh} \gamma_2 \beta$$

$$\alpha_{24} = (1 + \gamma_2^2 + 2\gamma) \operatorname{ch} \gamma_2 \beta, \quad \alpha_{31} = -k_1 \operatorname{sh} \beta - 2 \operatorname{ch} \beta, \quad \alpha_{32} = k_1 \operatorname{ch} \beta + 2 \operatorname{sh} \beta$$

$$\alpha_{33} = -k_1 \operatorname{sh} \gamma_2 \beta - \frac{\gamma_2^2 + 1}{\gamma_2} (1 - \gamma) \operatorname{ch} \gamma_2 \beta, \quad \alpha_{34} = k_1 \operatorname{ch} \gamma_2 \beta + \frac{\gamma_2^2 + 1}{\gamma_2} (1 - \gamma) \operatorname{sh} \gamma_2 \beta$$

$$\alpha_{41} = -\alpha_{21}, \quad \alpha_{42} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{43} = -\alpha_{23}, \quad \alpha_{44} = \alpha_{24}, \quad k_1 = \frac{k}{2G\lambda}, \quad \beta = \lambda h$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma_1} = \frac{2G^0 - p}{2G^0 - \sigma_y^0}, \quad \gamma_1 = \frac{\sigma_y^0}{2G^0}, \quad \gamma = \frac{p}{2G^0}$$

Итак, если точка, определяемая параметрами k_1 и γ , не выходит за пределы области, ограниченной графиком функции, заданной в неявном виде (26), то решение задачи (13)–(15) непрерывно зависит от $f_i^{(1)}$, $k^{(1)}$, $G^{(1)}$. Следовательно, при достаточно малом отличии формы поперечного сечения полосы от прямоугольника и малой неоднородности ее материала выражения (18) можно брать в качестве приближенного решения задачи (13)–(15), т.е. несовершенствами можно пренебречь. Близость формы поперечного сечения полосы к прямоугольнику в этом случае сохраняется и в процессе деформирования. Если же функции, описывающие несовершенства, заданы с точностью до малых параметров, т.е. $f_i^{(1)} = \varepsilon_i \varphi_i$, $k^{(1)} = \varepsilon_5 \varphi_5(x)$, $G^{(1)} = \varepsilon_6 \varphi_6(x, y)$, то характеристики напряженно-деформированного состояния полосы, как следует из аналитичности выражений в (13)–(15), будут аналитическими функциями параметров ε_i в окрестности точки $\varepsilon_i = 0$. Поэтому в этом случае для получения более точного решения задачи (13)–(15) его можно искать в виде степенных рядов по малым параметрам, являющихся рядами Тейлора.

В ином случае надо рассматривать другое решение задачи (13)–(15), т.е. не соответствующее однородному напряженно-деформированному состоянию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
2. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
3. Гузь А.Н., Немши Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошной среды (обзор) // Прикл. механика. 1978. Т. 23. № 9. С. 3–29.
4. Гузь А.Н., Немши Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Выща шк., 1989. 352 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
6. Минаева Н.В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Науч. книга, 2002. 155 с.
7. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 448 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
22.12.2004