МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2006

УДК 531.391

 В.Ф. ЧУБ

ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ В ТЕОРИИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

10-параметрическая группа Галилея расширяется до 13-параметрической группы, которая используется для вывода нерелятивистских уравнений идеальной работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы с гравитационным вариометром. При релятивистской постановке задачи инерциальной навигации 10-параметрическую группу Пуанкаре приходится расширять до 15-параметрической конформной группы. Приведены определяющие соотношения конформной группы и выведены релятивистские уравнения инерциальной навигации.

1. Введение. Теоретико-групповой подход [1, 2][1] находит широкое применение в современной физике [3, 4][2] и, в частности, в механике [5–7].

В то же время, в таком сравнительно молодом разделе общей механики как инерциальная навигация [8–11][3] теоретико-групповые идеи до сих пор привлекались лишь эпизодически и не претендовали на фундаментальную роль в построении теории в целом. При этом для частного случая теории инерциальной навигации – теории инерциальной ориентации [12] (нерелятивистской) – имеется группа преобразований, играющая фундаментальную роль: группа вращений, точнее, группа единичных (нормированных) кватернионов [13, 14], которая является односвязной накрывающей группы вращений [5, с. 41–42, 51].

Заметим, что расширение 3-параметрической группы вращений пространства[4] (называемой также группой вращений твердого тела) до 10-параметрической группы движений пространства-времени (в нерелятивистской постановке – группа Галилея, в релятивистской – группа Пуанкаре) позволяет перейти к более общему, но тоже частному случаю задачи инерциальной навигации – инерциальной навигации в свободном от гравитационного поля пространстве [15][5].

2. Постановка задачи. В настоящей работе ставится задача поиска групп преобразований, которые можно положить в основу теории инерциальной навигации (как нерелятивистской, так и релятивистской) и, соответственно, задача применения этих групп для вывода уравнений инерциальной навигации.

3. Расширение группы Галилея. В 10-параметрической группе Галилея выделяют следующие четыре типа физически различных элементарных преобразований: пере-

---

[1] Сборник [2] посвящен 125-летию "Эрлангенской программы" Феликса Клейна.

[2] В книге [4] см., прежде всего, дополнение переводчика Г.А. Зайцева "О связи теории относительности с теорией групп".

[3] В книге [8] см. работу А.Ю. Ишлинского "Истоки пространственной инерциальной навигации".

[4] Строго говоря, в задаче нерелятивистской инерциальной ориентации нужно рассматривать 4-параметрическую группу, включающую пространственные повороты и переносы во времени.

[5] Пользуясь случаем укажем наиболее существенные опечатки из замеченных в работе [15]: в формулах (2.19) и (2.20) должно быть $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \psi(\mathrm{ch}\psi - 1)\mathbf{r}\cdot\psi/\psi^2$, в сноске 17 номер препринта № 576, а в ссылке [26] – номер журнала № 2.

носы во времени (которые называют также сдвигами или трансляциями во времени); переносы (или, для уточнения, параллельные переносы) в пространстве (которые также называют сдвигами, смещениями или трансляциями в пространстве); повороты (или, для уточнения, повороты в пространстве, которые также называют вращениями); преобразования Галилея (их также называют нерелятивистскими бустами, поскольку преобразованиями Галилея часто называют преобразования общего вида из 10-параметрической группы Галилея). Разнобой в терминологии становится несущественным после перехода к математическому описанию преобразований.

Введем вспомогательный[6] вещественный четырехмерный вектор (далее “4-вектор”) $X = \tau + \boldsymbol{\rho}$. Тогда преобразование из группы Галилея удобно описывать, считая, что оно действует на 4-вектор X, переводя его в некоторый другой 4-вектор $X' = \tau' + \boldsymbol{\rho}'$ (активная трактовка[7]):

(1) перенос во времени T_t:

$$\tau' = \tau + t, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}$$

(2) перенос в пространстве $R_{\mathbf{r}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}$$

(3) поворот $\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2} \circ \boldsymbol{\rho} \circ e^{-i\boldsymbol{\vartheta}/2}$$

(4) нерелятивистский буст $V_{\boldsymbol{\upsilon}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\upsilon}\tau$$

Здесь использованы обозначения для элементарных преобразований и их параметров, введенные в [15].

Элементарных преобразований рассмотренных четырех типов достаточно для теоретико-групповой интерпретации всех величин, входящих в уравнения инерциальной навигации, за исключением гравитационного ускорения [11, с. 149; 16, с. 12; 17, с. 26] (которое называют также ускорением силы тяготения [8, с. 372] или просто ускорением тяготения [11, с. 149], напряженностью гравитационного поля [9, с. 311] и т.п. [17, с. 39–45]). Введем теперь специальное нелинейное (в отличие от рассмотренных выше преобразований, линейных по компонентам 4-вектора X):

(5) нерелятивистское **g**-преобразование $G_{\mathbf{g}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{g}\tau^2/2$$

Анализ групповых свойств преобразований удобно начать с бесконечно малых преобразований, используя так называемые генераторы (инфинитезимальные операторы [5, с. 207–209]). Для сохранения определенной преемственности обозначим компоненты вспомогательного 4-вектора X через τ, x, y, z, т.е. $X = \tau + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \tau + \boldsymbol{\rho}$ (использовать символ t вместо τ невозможно, поскольку он уже занят для обозначения параметра переноса во времени).

Выпишем инфинитезимальные операторы преобразований, используя сокращенные обозначения (∂_τ вместо $\partial/\partial\tau$, ∂_x вместо $\partial/\partial x$ и т.д.):

(1) перенос во времени:

$$T = \partial_\tau$$

---

[6] Физическая интерпретация 4-вектора X далее не требуется, так как при выводе уравнений инерциальной навигации используются только операторы преобразований (см. [15]).

[7] Нижний индекс *I*, использовавшийся в *п. 2.5* работы [15], опущен.

Таблица 1

$U \backslash V$	T	R_x	R_y	R_z	Θ_x	Θ_y	Θ_z	V_x	V_y	V_z	G_x	G_y	G_z
T	0	0	0	0	0	0	0	R_x	R_y	R_z	V_x	V_y	V_z
R_x	0	0	0	0	0	R_z	$-R_y$	0	0	0	0	0	0
R_y	0	0	0	0	$-R_z$	0	R_x	0	0	0	0	0	0
R_z	0	0	0	0	R_y	$-R_x$	0	0	0	0	0	0	0
Θ_x	0	0	R_z	$-R_y$	0	Θ_z	$-\Theta_y$	0	V_z	$-V_y$	0	G_z	$-G_y$
Θ_y	0	$-R_z$	0	R_x	$-\Theta_z$	0	Θ_x	$-V_z$	0	V_x	$-G_z$	0	G_x
Θ_z	0	R_y	$-R_x$	0	Θ_y	$-\Theta_x$	0	V_y	$-V_x$	0	G_y	$-G_x$	0
V_x	$-R_x$	0	0	0	0	V_z	$-V_y$	0	0	0	0	0	0
V_y	$-R_y$	0	0	0	$-V_z$	0	V_x	0	0	0	0	0	0
V_z	$-R_z$	0	0	0	V_y	$-V_x$	0	0	0	0	0	0	0
G_x	$-V_x$	0	0	0	0	G_z	$-G_y$	0	0	0	0	0	0
G_y	$-V_y$	0	0	0	$-G_z$	0	G_x	0	0	0	0	0	0
G_z	$-V_z$	0	0	0	G_y	$-G_x$	0	0	0	0	0	0	0

(2) переносы в пространстве (по осям x, y, z):

$$R_x = \partial_x, \quad R_y = \partial_y, \quad R_z = \partial_z$$

(3) повороты:

$$\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad \Theta_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad \Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$$

(4) нерелятивистские бусты:

$$V_x = \tau\partial_x, \quad V_y = \tau\partial_y, \quad V_z = \tau\partial_z$$

(5) нерелятивистские g-преобразования:

$$G_x = 1/2\tau^2\partial_x, \quad G_y = 1/2\tau^2\partial_y, \quad G_z = 1/2\tau^2\partial_z$$

Для обозначения генераторов использованы те же буквы, что и для конечных преобразований, но из-за стандартных нижних индексов путаницы не возникнет.

Выписывая коммутаторы (см. табл. 1, где в левом столбце и в верхней строке стоят генераторы, соответственно, U и V, а в соответствующей клетке таблицы – их коммутатор $[U, V] = UV-VU$), убеждаемся, что 13 рассматриваемых генераторов порождают 13-параметрическую группу [5, с. 211].

Перейдем к определяющим соотношениям для конечных преобразований (расширенной группы Галилея). Как и в работе [15] приведем табличку, позволяющую их систематизировать (см. табл. 2).

В табл. 2 номера формул (2.1)–(2.16) соответствуют определяющим соотношениям группы Галилея (см. [15]). Ниже выписаны только формулы, которые потребовались при расширении группы Галилея

$$G_{\mathbf{g}} \circ T_t = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\boldsymbol{\upsilon}} G_{\mathbf{g}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{g}t^2/2, \quad \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{g}t \tag{3.1}$$

$$T_t \circ G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}} V_{\boldsymbol{\upsilon}} \circ T_t R_{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{g}t^2/2, \quad \boldsymbol{\upsilon} = -\mathbf{g}t \tag{3.2}$$

$$G_{\mathbf{g}} R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{g}} \tag{3.3}$$

Таблица 2

	T	R	Θ	V	G
T	(2.1)	(2.2)	(2.5)	(2.10)	(3.1)
R	(2.3)	(2.4)	(2.7)	(2.12)	(3.3)
Θ	(2.6)	(2.8)	(2.9)	(2.14)	(3.5)
V	(2.11)	(2.13)	(2.15)	(2.16)	(3.7)
G	(3.2)	(3.4)	(3.6)	(3.8)	(3.9)

$$R_{\mathbf{r}}G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}}R_{\mathbf{r}} \quad \text{(совпадает с (3.3))} \tag{3.4}$$

$$G_{\mathbf{g}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ G_{\mathbf{g}'}, \quad \mathbf{g}' = e^{-i\boldsymbol{\vartheta}/2} \circ \mathbf{g} \circ e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2} \tag{3.5}$$

$$\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}'} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \quad \text{(следует из (3.5))}, \quad \mathbf{g}' = e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2} \circ \mathbf{g} \circ e^{-i\boldsymbol{\vartheta}/2} \tag{3.6}$$

$$G_{\mathbf{g}}V_{\boldsymbol{\upsilon}} = V_{\boldsymbol{\upsilon}}G_{\mathbf{g}} \tag{3.7}$$

$$V_{\boldsymbol{\upsilon}}G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}}V_{\boldsymbol{\upsilon}} \quad \text{(совпадает с (3.7))} \tag{3.8}$$

$$G_{\mathbf{g}_2}G_{\mathbf{g}_1} = G_{\mathbf{g}}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 \tag{3.9}$$

Для наглядности символ ($\circ$) между сомножителями опускается, если соответствующие преобразования можно переставить без изменения параметров. Например, в правой части формулы (3.1) можно переставить любые два соседних элементарных преобразования, но после этого может потребоваться поставить знак ($\circ$): так, после перестановки T_t и $R_{\mathbf{r}}$ рядом окажутся T_t и $V_{\boldsymbol{\upsilon}}$, которые не коммутируют (см. формулы (2.10)[8] и (2.11) из [15]). Отметим, что, согласно (3.1), при перестановке переноса во времени и $\mathbf{g}$-преобразования появляется не только буст, как это следует уже из вида коммутаторов соответствующих генераторов (см. табл. 1), но и перенос в пространстве.

4. Нерелятивистские уравнения инерциальной навигации. Уточним физический смысл параметра $\mathbf{g}$-преобразования.

Параметр t переноса во времени – это не ненаблюдаемое "абсолютное время", а относительное положение во времени одной системы отсчета (E) относительно другой (I). Аналогично, параметры $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{\upsilon}$ определяют не "местоположение в абсолютном пространстве" [18, с. 127], "абсолютную ориентацию" и "абсолютную скорость" (системы E), а соответствующие наблюдаемые относительные характеристики (системы E относительно I). "Абсолютное гравитационное ускорение" также не является наблюдаемой физической величиной. Дополнительное постоянное (везде и всегда) ускорение свободного падения не повлияло бы на показания приборов. Параметр $\mathbf{g}$-преобразования характеризует относительное гравитационное ускорение (гравитационное ускорение системы E относительно I) или, если угодно, наблюдаемую разность ненаблюдаемых[9] абсолютных гравитационных ускорений (в системах[10] E и I).

[8] Символ ($\circ$) в правой части формулы (2.10) можно опустить.

[9] Обычная практика состоит в том, что рассматривается достаточно удаленная система, в окрестности которой неоднородности гравитационного ускорения несущественны, и там гравитационное ускорение по определению полагается равным нулю (а не какому-либо постоянному вектору).

[10] Естественно, имеются в виду начала отсчета систем E и I.

Рассмотрим теперь задачу бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), исключив из формулировки [15] слова о "заданном гравитационном поле" и добавив в систему, помимо часов, измеряющих собственное время τ (точнее, приращение собственного времени $\delta t = d\tau$), акселерометра, измеряющего кажущееся ускорение $\mathbf{a}$ (точнее, приращение кажущейся скорости $\delta\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{a}d\tau$), и датчика угловой скорости, измеряющего угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ (точнее, приращение вектора ориентации $\delta\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\omega}d\tau$), еще один (инерциальный) навигационный прибор: гравитационный вариометр (градиентометр) [19, с. 488], [20, с. 278], измеряющий скорость изменения $\mathbf{n}$ гравитационного ускорения [21, с. 27][11] (точнее, приращение гравитационного ускорения $\delta\mathbf{g} = \mathbf{n}d\tau$)[12].

Задача такой БИНС состоит в вычислении текущего преобразования $\Lambda_{IE}(\tau)$ по измеряемым в системе E кажущемуся ускорению $\mathbf{a}(\tau)$, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ и скорости изменения гравитационного ускорения $\mathbf{n}(\tau)$ (как функций от измеряемого в системе E времени τ) при известном начальном состоянии $\Lambda_{IE}(\tau_0)$[13].

Процедура вывода уравнений инерциальной навигации (см. [15]) претерпевает лишь минимальные изменения, связанные с появлением в стандартном разложении преобразования общего вида из расширенной группы Галилея элементарного преобразования $G_{\mathbf{g}}$ (место для него определяется требованием сохранения традиционного вида уравнений БИНС):

$$
\begin{aligned}
&T_{t+dt}R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}}V_{\boldsymbol{\upsilon}+d\boldsymbol{\upsilon}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta}} \circ G_{\mathbf{g}+d\mathbf{g}} = \Lambda_{IE(\tau+d\tau)} = \Lambda_{IE(\tau)} \circ \Lambda_{E(\tau)E(\tau+d\tau)} = \\
&= (T_tR_{\mathbf{r}}V_{\boldsymbol{\upsilon}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ G_{\mathbf{g}}) \circ (T_{d\tau}V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}G_{\mathbf{n}d\tau}) = T_tR_{\mathbf{r}}V_{\boldsymbol{\upsilon}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}T_{d\tau} \circ V_{\mathbf{g}d\tau}G_{\mathbf{g}}V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}G_{\mathbf{n}d\tau} = \\
&= T_tR_{\mathbf{r}}V_{\boldsymbol{\upsilon}} \circ T_{d\tau}\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ V_{\mathbf{g}d\tau}V_{\mathbf{a}d\tau}G_{\mathbf{g}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}G_{\mathbf{n}d\tau} = \\
&= T_tR_{\mathbf{r}}T_{d\tau}R_{\boldsymbol{\upsilon}d\tau}V_{\boldsymbol{\upsilon}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ V_{(\mathbf{a}+\mathbf{g})d\tau} \circ \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau} \circ G_{\bar{\mathrm{S}} \circ \mathbf{g} \circ \mathrm{S}}G_{\mathbf{n}d\tau} = \\
&= T_tT_{d\tau}R_{\mathbf{r}}R_{\boldsymbol{\upsilon}d\tau}V_{\boldsymbol{\upsilon}}V_{\mathrm{Q} \circ (\mathbf{a}+\mathbf{g}) \circ \bar{\mathrm{Q}}d\tau} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau} \circ G_{(1-i\boldsymbol{\omega}d\tau/2) \circ \mathbf{g} \circ (1+i\boldsymbol{\omega}d\tau/2)+\mathbf{n}d\tau} = \\
&= T_{t+d\tau}R_{\mathbf{r}+\boldsymbol{\upsilon}d\tau}V_{\boldsymbol{\upsilon}+\mathrm{Q} \circ (\mathbf{a}+\mathbf{g}) \circ \bar{\mathrm{Q}}d\tau} \circ (\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}) \circ G_{\mathbf{g}+\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}d\tau+\mathbf{n}d\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Q} = \exp(i\boldsymbol{\vartheta}/2), \quad \mathrm{S} = \exp(i\boldsymbol{\omega}d\tau/2)
$$

где квадратичными по $d\tau$ параметрами преобразований сразу пренебрегаем, черта над Q или S означает комплексное сопряжение: $i \to -i$. Приравнивая параметры при T, R, V и G в первом и последнем выражении и переходя (как и в [15]) к кватернионному описанию пространственных поворотов, получаем следующую систему нерелятивистских уравнений инерциальной навигации:

$$
\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \boldsymbol{\upsilon}, \quad \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\tau} = \mathrm{Q} \circ (\mathbf{a}+\mathbf{g}) \circ \mathrm{Q}^{-1}
$$

---

[11] Ссылка относится к статье Л.И. Седова "Об основных соотношениях в инерциальной навигации", ранее опубликованной в брошюре: *Седов Л.И.* Очерки, связанные с основами механики и физики. М.: Знание, 1983. 64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Физика"; №10.)

[12] Внутреннее устройство перечисленных приборов здесь не представляет интереса, важна лишь принципиальная возможность измерения указанных физических величин. Требующийся по постановке задачи гравитационный вариометр (градиентометр) отличается от обычно описываемых в литературе приборов [19–20, 22–25], предназначенных для измерения только пространственных неоднородностей гравитационного ускорения; в настоящее время такого прибора нет.

[13] В важном частном случае I и $E(\tau_0)$ совпадают, т.е. $\Lambda_{IE}(\tau_0)$ – тождественное преобразование. Напомним, что I – инерциальная система, в которой инерциальные приборы показывают "нули" (и часы "не идут"), поэтому зависимость от времени текущего преобразования, связывающего системы I и E, обусловлена только изменением системы E: $\Lambda_{IE}(\tau) = \Lambda_{IE(\tau)}$.

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{1}{2}Q \circ i\boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \mathbf{n} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}$$

$$Q = e^{i\vartheta/2}, \quad Q^{-1} = \bar{Q} = \tilde{Q} = e^{-i\vartheta/2}$$

Первое из этих уравнений обычно опускается как несущественное. Следующие три уравнения совпадают с известной системой уравнений БИНС [26, с. 96], если вектор $\mathbf{g}$ считать заданным в системе E гравитационным ускорением. Последнее дифференциальное уравнение (для вектора $\mathbf{g}$) связано с уточнением постановки задачи инерциальной навигации[14].

5. Расширение группы Пуанкаре. В 10-параметрической группе Пуанкаре [27] также выделяют четыре типа физически различных элементарных преобразований, причем переносы во времени и в пространстве и пространственные повороты математически описываются точно так же как и в нерелятивистском случае; только бусты описываются по-другому, и обычно называются преобразованиями Лоренца (что не всегда удобно, поскольку преобразованием Лоренца часто называют преобразование общего вида из группы Лоренца).

Начнем с инфинитезимальных операторов группы Пуанкаре:

(1) перенос во времени:

$$T = \partial_\tau$$

(2) переносы в пространстве (по осям x, y, z):

$$R_x = \partial_x, \quad R_y = \partial_y, \quad R_z = \partial_z$$

(3) повороты:

$$\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad \Theta_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad \Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$$

(4) релятивистские бусты:

$$V_x = \tau\partial_x + x\partial_\tau, \quad V_y = \tau\partial_y + y\partial_\tau, \quad V_z = \tau\partial_z + z\partial_\tau$$

Генераторы релятивистских бустов отличаются от соответствующих генераторов нерелятивистских бустов наличием некоторых "добавок" – вторых слагаемых, которые играют принципиальную роль. Попытка расширить группу Пуанкаре за счет введенного в разделе **3** нерелятивистского $\mathbf{g}$-преобразования оказывается неудачной. При вычислении коммутаторов генераторов группы Пуанкаре с генераторами нерелятивистских $\mathbf{g}$-преобразований получаем бесконечную цепочку инфинитезимальных операторов новых преобразований

$$[\tau\partial_x + x\partial_\tau, 1/2\tau^2\partial_y] = x\tau\partial_y, \quad [\tau\partial_y + y\partial_\tau, 1/2\tau^2\partial_x] = y\tau\partial_x$$

$$[1/2\tau^2\partial_x, x\tau\partial_y] = 1/2\tau^3\partial_y, \; [1/2\tau^3\partial_y, y\tau\partial_x] = 1/2\tau^4\partial_x, \; [1/2\tau^4\partial_x, x\tau\partial_y] = 1/2\tau^5\partial_y, \ldots$$

которые, естественно, не приводят к конечно-параметрической группе (кроме того, среди порожденных операторов будут и генераторы нерелятивистских бустов – см. табл. 1).

[14] Полученное ранее Л.И. Седовым [21, с. 28] уравнение для вектора $\mathbf{g}$ соответствует случаю измерения градиентов вектора $\mathbf{g}$ в неподвижной системе отсчета (вдоль траектории движущегося объекта), а не случаю их измерения *"с помощью специальных бортовых приборов гравиметров"* [21, с. 27]. Пространственные градиенты вектора $\mathbf{g}$, измеренные в движущейся системе отсчета, не требуются при выводе уравнений БИНС, поскольку скорость движущегося объекта равна нулю в связанной с ним системе отсчета.

Таблица 3

$U\backslash V$	T	R_x	R_y	R_z	Θ_x	Θ_y	Θ_z	Γ	V_x	V_y	V_z	W	G_x	G_y	G_z
T	0	0	0	0	0	0	0	T	R_x	R_y	R_z	Γ	V_x	V_y	V_z
R_x	0	0	0	0	0	R_z	$-R_y$	R_x	T	0	0	V_x	Γ	Θ_z	$-\Theta_y$
R_y	0	0	0	0	$-R_z$	0	R_x	R_y	0	T	0	V_y	$-\Theta_z$	Γ	Θ_x
R_z	0	0	0	0	R_y	$-R_x$	0	R_z	0	0	T	V_z	Θ_y	$-\Theta_x$	Γ
Θ_x	0	0	R_z	$-R_y$	0	Θ_z	$-\Theta_y$	0	0	V_z	$-V_y$	0	0	G_z	$-G_y$
Θ_y	0	$-R_z$	0	R_x	$-\Theta_z$	0	Θ_x	0	$-V_z$	0	V_x	0	$-G_z$	0	G_x
Θ_z	0	R_y	$-R_x$	0	Θ_y	$-\Theta_x$	0	0	V_y	$-V_x$	0	0	G_y	$-G_x$	0
Γ	$-T$	$-R_x$	$-R_y$	$-R_z$	0	0	0	0	0	0	0	W	G_x	G_y	G_z
V_x	$-R_x$	$-T$	0	0	0	V_z	$-V_y$	0	0	$-\Theta_z$	Θ_y	G_x	W	0	0
V_y	$-R_y$	0	$-T$	0	$-V_z$	0	V_x	0	Θ_z	0	$-\Theta_x$	G_y	0	W	0
V_z	$-R_z$	0	0	$-T$	V_y	$-V_x$	0	0	$-\Theta_y$	Θ_x	0	G_z	0	0	W
W	$-\Gamma$	$-V_x$	$-V_y$	$-V_z$	0	0	0	$-W$	$-G_x$	$-G_y$	$-G_z$	0	0	0	0
G_x	$-V_x$	$-\Gamma$	Θ_z	$-\Theta_y$	0	G_z	$-G_y$	$-G_x$	$-W$	0	0	0	0	0	0
G_y	$-V_y$	$-\Theta_z$	$-\Gamma$	Θ_x	$-G_z$	0	G_x	$-G_y$	0	$-W$	0	0	0	0	0
G_z	$-V_z$	Θ_y	$-\Theta_x$	$-\Gamma$	G_y	$-G_x$	0	$-G_z$	0	0	$-W$	0	0	0	0

Возникает задача поиска таких “добавок” к генераторам нерелятивистских **g**-преобразований, чтобы получившиеся в результате “релятивистские **g**-преобразования” расширяли бы группу Пуанкаре до конечно-параметрической группы (по возможности, конечно, с минимальным числом параметров).

Решение поставленной задачи (возможно – единственное) дают приводимые ниже генераторы:

(5) релятивистские **g**-преобразования:

$$G_x = 1/2(\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + x(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$$

$$G_y = 1/2(\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2)\partial_y + y(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$$

$$G_z = 1/2(\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2)\partial_z + z(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$$

искомые “добавки” получаются неожиданно сложными, а группа оказывается 15-параметрической [28, с. 186] (выписанные генераторы отличаются от соответствующих инфинитезимальных операторов, приведенных в работе Каратеодори, несущественным множителем 1/2), поэтому приходится вводить еще два генератора:

(6) w-преобразование:

$$W = -1/2(\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2)\partial_\tau + \tau(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$$

(7) масштабное преобразование [29]:

$$\Gamma = \tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$$

которое называют также подобием, гомотетией, дилатацией и растяжением.

Выписывая коммутаторы (см. табл. 3)[15], убеждаемся, что рассматриваемые генераторы действительно порождают 15-параметрическую группу [5, с. 211]. В ней легко

[15] Порядок расположения генераторов в табл. 3 выбран так, чтобы подчеркнуть определенную симметрию между T, R_x, R_y, R_z с одной стороны и W, G_x, G_y, G_z с другой.

выделяется 11-параметрическая подгруппа линейных преобразований – группа Вейля, все преобразования которой имеют устоявшуюся физическую интерпретацию (см. [29][16] и подборку статей [30, 31]). Саму 15-параметрическую группу обычно называют конформной [32, 33].

Приведем теперь выражения для конечных преобразований ($X = \tau + \boldsymbol{\rho} \to X' = \tau' + \boldsymbol{\rho}'$, активная трактовка):

(1) перенос во времени T_t:

$$X' = X + t$$

(2) перенос в пространстве $R_{\mathbf{r}}$:

$$X' = X + \mathbf{r}$$

(3) поворот в пространстве $\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$:

$$X' = e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2} \circ X \circ e^{-i\boldsymbol{\vartheta}/2}$$

(4) релятивистский буст $V_{\boldsymbol{\psi}}$:

$$X' = e^{\boldsymbol{\psi}/2} \circ X \circ e^{\boldsymbol{\psi}/2}$$

(5) релятивистское $\mathbf{g}$-преобразование[17] $G_{\mathbf{g}}$:

$$X' = (X^{-1} - \mathbf{g}/2)^{-1}$$

(6) w-преобразование[18] W_w:

$$X' = (X^{-1} + w/2)^{-1}$$

(7) масштабное преобразование Γ_γ:

$$X' = \gamma X = e^{\alpha} X$$

где наряду с каноническим параметром масштабного преобразования α будем использовать и более традиционный $\gamma = e^{\alpha} > 0$; $\gamma > 1$ – растяжение, $\gamma < 1$ – сжатие.

Рассмотрение определяющих соотношений для расширенной группы Пуанкаре (совпавшей с конформной группой) потребовало бы выписывания тридцати трех новых формул (в дополнение к шестнадцати определяющим соотношениям самой группы Пуанкаре, выписанным в работе [15]), работать с которыми неудобно. Количество определяющих соотношений можно существенно сократить, объединив некоторые элементарные (физически различные) преобразования в "квазиэлементарные", которые объединяют в себе близкие (по математической форме представления) элементарные преобразования.

Введем (объединяя генераторы одинаковых степеней):

R_{R} – перенос (пространства-времени), где параметр преобразования – 4-вектор:

$$X' = X + R, \quad R = r_0 + \mathbf{r} = t + \mathbf{r}$$

[16] См. также: Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: БРЭ, 1992. С. 60.

[17] Приводимые формулы для специальных конформных преобразований (ср. [34, с. 63]) следует рассматривать как единое целое, не раскладывая их на "более элементарные" инверсии ($X' = X^{-1}$) и переносы. Инверсии и отражения не входят в рассматриваемую (односвязную) группу.

[18] Здесь изменен знак параметра (для более симметричной записи последующих формул).

Таблица 4

	R	B	A
R	(5.1)	(5.2)	(5.5)
B	(5.3)	(5.4)	(5.7)
A	(5.6)	(5.8)	(5.9)

B_B – поворотное растяжение [35, с. 101–103] (пространства-времени), где параметр преобразования – бикватернион Гамильтона специального вида:

$$\mathrm{X}' = \mathrm{B} \circ \mathrm{X} \circ \bar{\mathrm{B}}$$

$$\mathrm{B} = e^{\psi/2} e^{\alpha/2} e^{i\vartheta/2} = e^{\alpha/2} e^{\psi/2} \circ e^{i\vartheta/2}, \quad \bar{\mathrm{B}} = e^{-i\vartheta/2} \circ e^{\psi/2} e^{\alpha/2}$$

A_A – гравитационное преобразование (пространства-времени), где параметр преобразования – 4-вектор (не связанный с кажущимся ускорением):

$$\mathrm{X}' = (\mathrm{X}^{-1} + \tilde{\mathrm{A}})^{-1}$$

$$\mathrm{A} = a_0 + \mathbf{a} = 1/2(w + \mathbf{g}), \quad \tilde{\mathrm{A}} = a_0 - \mathbf{a} = 1/2(w - \mathbf{g})$$

Название последнего преобразования отражает придаваемую ему физическую интерпретацию; в литературе его (или их – во множественном числе) называют специальным конформным преобразованием [36, с. 453] или, иногда, преобразованием Мебиуса [37, с. 517]. В развернутой записи оно имеет следующий вид:

$$\tau' + \boldsymbol{\rho}' = \frac{\tau + \boldsymbol{\rho} + (\tau^2 - \boldsymbol{\rho}^2)(a_0 + \mathbf{a})}{1 + 2(a_0\tau - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\rho}) + (\tau^2 - \boldsymbol{\rho}^2)(a_0^2 - \mathbf{a}^2)}$$

Определяющих соотношений конформной группы с использованием введенных преобразований будет всего девять (см. табл. 4):

$$R_{\mathrm{R}_2} R_{\mathrm{R}_1} = R_\mathrm{R}, \quad \mathrm{R} = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 \tag{5.1}$$

$$B_\mathrm{B} \circ R_\mathrm{R} = R_{\mathrm{R}'} \circ B_\mathrm{B}, \quad \mathrm{R}' = \mathrm{B} \circ \mathrm{R} \circ \bar{\mathrm{B}} \tag{5.2}$$

$$R_\mathrm{R} \circ B_\mathrm{B} = B_\mathrm{B} \circ R_{\mathrm{R}'} \text{ (следует из (5.2))}, \quad \mathrm{R}' = \mathrm{B}^{-1} \circ \mathrm{R} \circ \bar{\mathrm{B}}^{-1} \tag{5.3}$$

$$B_{\mathrm{B}_2} \circ B_{\mathrm{B}_1} = B_\mathrm{B}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{B}_2 \circ \mathrm{B}_1 \tag{5.4}$$

$$A_\mathrm{A} \circ R_\mathrm{R} = R_{\mathrm{R}'} \circ B_\mathrm{B} \circ A_{\mathrm{A}'} \tag{5.5}$$

$$\mathrm{R}' = (\mathrm{R}^{-1} + \tilde{\mathrm{A}})^{-1}, \quad \mathrm{A}' = (\mathrm{A}^{-1} + \tilde{\mathrm{R}})^{-1}$$

$$\mathrm{B} = e^{\alpha/2} e^{\psi/2} \circ e^{i\vartheta/2} = \sqrt{\gamma} \frac{1 + \boldsymbol{\Psi}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\Psi}^2}} \circ \frac{1 + i\boldsymbol{\Theta}}{\sqrt{1 - (i\boldsymbol{\Theta})^2}}$$

$$\gamma = e^\alpha = [1 + 2(a_0 r_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + (a_0^2 - \mathbf{a}^2)(r_0^2 - \mathbf{r}^2)]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \operatorname{th}\frac{\boldsymbol{\psi}}{2} = \frac{(r_0\mathbf{a}-a_0\mathbf{r})(1+a_0r_0-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})-(r_0\mathbf{a}-a_0\mathbf{r})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{1+2(a_0r_0-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})+(a_0^2-\mathbf{a}^2)(r_0^2-\mathbf{r}^2)+(r_0\mathbf{a}-a_0\mathbf{r})^2}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \operatorname{tg}\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{2} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{1+a_0r_0-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}$$

$$R_{\mathrm{R}}\circ A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{A'}}\circ B_{\mathrm{B}}\circ R_{\mathrm{R'}} \tag{5.6}$$

$$\mathrm{A'} = (\mathrm{A}^{-1}+\tilde{\mathrm{R}})^{-1}, \quad \mathrm{R'} = (\mathrm{R}^{-1}+\tilde{\mathrm{A}})^{-1}$$

$$\mathrm{B} = e^{\alpha/2}e^{\boldsymbol{\psi}/2}\circ e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2} = \sqrt{\gamma}\frac{1+\boldsymbol{\Psi}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\Psi}^2}}\circ\frac{1+i\boldsymbol{\Theta}}{\sqrt{1-(i\boldsymbol{\Theta})^2}}$$

$$\gamma = e^{\alpha} = 1+2(r_0a_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})+(r_0^2-\mathbf{r}^2)(a_0^2-\mathbf{a}^2)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \operatorname{th}\frac{\boldsymbol{\psi}}{2} = \frac{(a_0\mathbf{r}-r_0\mathbf{a})(1+r_0a_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})-(a_0\mathbf{r}-r_0\mathbf{a})\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})}{1+2(r_0a_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})+(r_0^2-\mathbf{r}^2)(a_0^2-\mathbf{a}^2)+(a_0\mathbf{r}-r_0\mathbf{a})^2}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \operatorname{tg}\frac{\boldsymbol{\vartheta}}{2} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{a}}{1+r_0a_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}$$

$$A_{\mathrm{A}}\circ B_{\mathrm{B}} = B_{\mathrm{B}}\circ A_{\mathrm{A'}}, \quad \mathrm{A'} = \tilde{\mathrm{B}}\circ\mathrm{A}\circ\tilde{\tilde{\mathrm{B}}} \tag{5.7}$$

$$B_{\mathrm{B}}\circ A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{A'}}\circ B_{\mathrm{B}} \text{ (следует из (5.7))}, \quad \mathrm{A'} = \tilde{\mathrm{B}}^{-1}\circ\mathrm{A}\circ\tilde{\tilde{\mathrm{B}}}^{-1} \tag{5.8}$$

$$A_{\mathrm{A}_2}A_{\mathrm{A}_1} = A_{\mathrm{A}}, \quad \mathrm{A} = \mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2 \tag{5.9}$$

Громоздкие соотношения (5.5) и (5.6) проверялись с использованием компьютерного пакета программ символьных вычислений [38]; γ, $\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\Theta}$ в этих соотношениях могут быть выражены через 4-векторы R и A с использованием операции векторного сопряжения, но без явного обращения к скалярным и векторным составляющим, а также к скалярному и векторному произведениям векторов

$$r_0^2-\mathbf{r}^2 = \mathrm{R}\tilde{\mathrm{R}} = \tilde{\mathrm{R}}\mathrm{R}, \quad a_0^2-\mathbf{a}^2 = \mathrm{A}\tilde{\mathrm{A}} = \tilde{\mathrm{A}}\mathrm{A}$$

$$a_0r_0-\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = \frac{\mathrm{A}\circ\tilde{\mathrm{R}}+\mathrm{R}\circ\tilde{\mathrm{A}}}{2} = \frac{\tilde{\mathrm{A}}\circ\mathrm{R}+\tilde{\mathrm{R}}\circ\mathrm{A}}{2} = r_0a_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$$

$$r_0\mathbf{a}-a_0\mathbf{r} = \frac{\mathrm{A}\circ\tilde{\mathrm{R}}-\tilde{\mathrm{A}}\circ\mathrm{R}}{2} = \frac{\tilde{\mathrm{R}}\circ\mathrm{A}-\mathrm{R}\circ\tilde{\mathrm{A}}}{2} = -(a_0\mathbf{r}-r_0\mathbf{a})$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r} = \frac{\mathrm{R}\circ\mathrm{A}-\mathrm{A}\circ\mathrm{R}}{2i} = \frac{\tilde{\mathrm{R}}\circ\tilde{\mathrm{A}}-\tilde{\mathrm{A}}\circ\tilde{\mathrm{R}}}{2i} = -(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$$

Однако, формулы при этом проще не становятся.

Если хотя бы одно из исходных преобразований бесконечно малое (а только такие случаи встречаются при выводе уравнений инерциальной навигации), то особенности, имеющиеся в соотношениях (5.5) и (5.6), становятся несущественными. Напомним, что, например, соотношению (5.5) соответствует формула

$$[(X+R)^{-1}+\tilde{A}]^{-1} = B \circ (X^{-1}+\tilde{A}')^{-1} \circ \bar{B} + R'$$

Упомянутые особенности соответствуют невозможности для некоторых R и A подобрать такие R', A' и B, которые бы обеспечивали выполнение выписанного равенства[19] для любых X.

6. Релятивистские уравнения инерциальной навигации. Уточним физический смысл параметров элементарных преобразований, появившихся при расширении группы Пуанкаре, т.е. параметров специальных конформных и масштабного преобразований.

Интерпретация параметра **g**-преобразования остается той же, что и в нерелятивистском случае (см. начало раздела 4; в отличие от бустов здесь при переходе к релятивистскому описанию менять параметр не требуется, так как допустимы[20] любые значения параметра **g**). Собственно говоря, это хорошо известная "равноускоренная" интерпретация "пространственной части" специальных конформных преобразований [32, с. 200–202; 33, с. 6] с тем принципиальным уточнением, что имеется в виду относительное гравитационное ускорение, а не обычное, измеряемое в абсолютном смысле кажущееся ускорение [39].

Гравитационная интерпретация трех генераторов специальных конформных преобразований G_x, G_y, G_z, соответствующих векторному преобразованию $G_{\mathbf{g}}$, приводит и к естественной физической интерпретации четвертого генератора нелинейного преобразования W, соответствующего (с учетом изменения знака параметра) конечному скалярному преобразованию W_w ("временно́й части" специальных конформных преобразований). Дело в том, что под "заданным гравитационным полем" не всегда понимают заданный вектор **g**, часто используют скалярную функцию, называемую гравитационным потенциалом[21]. Эта функция также задается с некоторым произволом (например, традиционно полагается равной нулю на бесконечности), а компоненты вектора **g** связаны с частными производными от гравитационного потенциала по координатам. Поскольку гравитационный потенциал в общем случае задается как функция, зависящая не только от пространственных координат, но и от времени [21, с. 28], то параметр w, очевидно, связан с частной производной от гравитационного потенциала по времени. Как и **g**, параметр w, входящий в преобразование Λ_{IE}, может интерпретироваться только как разность соответствующих частных производных от гравитационного потенциала в системах E и I.

Также и в отношении масштабного преобразования подчеркнем, что включение его в фундаментальную группу преобразований означает отказ от "абсолютного масштаба", параметр γ может характеризовать только отношение масштабов систем E и I.

При очередном уточнении постановки задачи БИНС естественно[22] добавить в систему приборы, позволяющие измерять (в системе E) скорость изменения ν параметра w

---

[19] Из этого же равенства вытекает и связь параметров в соотношении (5.6), так как оно получается после взятия обратных величин от правой и левой частей формулы, соответствующей соотношению (5.6), с последующей заменой $A \to \tilde{R}$, $R \to \tilde{A}$, $A' \to \tilde{R}'$, $R' \to \tilde{A}'$, $B \to \bar{B}^{-1}$, $X \to X^{-1}$.

[20] Здесь существенно, что физическая интерпретация вспомогательного 4-вектора X не требуется, так как при любом $\mathbf{g} \neq 0$ существует такой $X = g^{-1}(1 + \mathbf{g}/g)$, что $X' = (X^{-1} - \mathbf{g}/2)^{-1}$ уходит на бесконечность.

[21] Распространены два варианта выбора знака этой функции, ср. [4, с. 290] и [40, с. 188].

[22] Еще при обсуждении работы [15] Ю.Н. Челноков (в частном сообщении от 3.09.2002) указал на то, что в рамках выбранного автором метода вывода уравнений инерциальной навигации логичнее включать в бесконечно малое преобразование $\Lambda(d\tau)$ операторы бесконечно малых приращений всех элементарных преобразований, в том числе и бесконечно малый пространственный перенос. Последнее, однако, физически означает отсутствие жесткой связи систем $E(\tau)$ и $E(\tau + d\tau)$, т.е. отсутствие закрепления инерциальных приборов в движущемся объекте. Автор считает целесообразным сразу не включать бесконечно малый пространственный перенос в $\Lambda(d\tau)$ при выводе уравнений инерциальной навигации. В данном случае $\Lambda(d\tau) = T_{\delta t} V_{\delta\psi} \Gamma_{\delta\gamma} \Theta_{\delta\vartheta} G_{\delta\mathbf{g}} W_{\delta w}$.

(точнее, приращение этого параметра $\delta w = \nu d\tau$) и скорость изменения μ параметра масштабного преобразования (точнее, приращение этого параметра $\delta\alpha = \mu d\tau \approx \delta\gamma$). Место для элементарных преобразований W_w и Γ_γ практически однозначно определяется тем, что W_w естественно поставить рядом с $G_{\mathbf{g}}$ (справа или слева – все равно), а Γ_γ естественно поставить рядом с V_ψ и Θ_ϑ (справа, слева или между – все равно). Выводим уравнения инерциальной навигации

$$T_{t+dt}R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \circ V_{\psi+d\psi}\Gamma_{\gamma+d\gamma}\Theta_{\vartheta+d\vartheta} \circ G_{\mathbf{g}+d\mathbf{g}}W_{w+dw} =$$

$$= \Lambda_{IE(\tau+d\tau)} = \Lambda_{IE(\tau)} \circ \Lambda_{E(\tau)E(\tau+d\tau)} =$$

$$= (T_tR_{\mathbf{r}} \circ V_\psi\Gamma_\gamma\Theta_\vartheta \circ G_{\mathbf{g}}W_w) \circ (T_{d\tau}V_{\mathbf{a}d\tau}\Gamma_{\mu d\tau}\Theta_{\omega d\tau}G_{\mathbf{n}d\tau}W_{\nu d\tau})$$

Воспользуемся введенными в предыдущем разделе "квазиэлементарными" преобразованиями и перестановочными соотношениями для них (сразу пренебрегая членами выше первого порядка по $d\tau$):

$$R_{\mathrm{R}+d\mathrm{R}} \circ B_{\mathrm{B}+d\mathrm{B}} \circ A_{\mathrm{A}+d\mathrm{A}} = (R_{\mathrm{R}} \circ B_{\mathrm{B}} \circ A_{\mathrm{A}}) \circ (R_{d\tau}B_{1+1/2(\mu+\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})d\tau}A_{1/2(\nu+\mathbf{n})d\tau}) =$$

$$= R_{\mathrm{R}} \circ B_{\mathrm{B}} \circ A_{\mathrm{A}} \circ R_{d\tau}B_{1+1/2\mathrm{M}d\tau}A_{1/2(\nu+\mathbf{n})d\tau} =$$

$$= R_{\mathrm{R}} \circ B_{\mathrm{B}} \circ R_{d\tau} \circ B_{1-\tilde{\mathrm{A}}d\tau} \circ A_{\mathrm{A}-\mathrm{A}^2d\tau} \circ B_{1+1/2\mathrm{M}d\tau}A_{1/2(\nu+\mathbf{n})d\tau} =$$

$$= R_{\mathrm{R}}R_{\mathrm{B}\circ\bar{\mathrm{B}}d\tau} \circ B_{\mathrm{B}} \circ B_{1-\tilde{\mathrm{A}}d\tau} \circ B_{1+1/2\mathrm{M}d\tau} \circ A_{(1+1/2\tilde{\mathrm{M}}d\tau)\circ(\mathrm{A}-\mathrm{A}^2d\tau)\circ(1+1/2\hat{\mathrm{M}}d\tau)}A_{1/2(\nu+\mathbf{n})d\tau} =$$

$$= R_{\mathrm{R}+\mathrm{B}\circ\bar{\mathrm{B}}d\tau} \circ B_{\mathrm{B}\circ(1-\tilde{\mathrm{A}}d\tau)\circ(1+1/2\mathrm{M}d\tau)} \circ A_{1/2(\nu+\mathbf{n})d\tau+\mathrm{A}-\mathrm{A}^2d\tau+1/2(\tilde{\mathrm{M}}\circ\mathrm{A}+\mathrm{A}\circ\hat{\mathrm{M}})d\tau} =$$

$$= R_{\mathrm{R}+\mathrm{B}\circ\bar{\mathrm{B}}d\tau} \circ B_{\mathrm{B}+\mathrm{B}\circ(1/2\mathrm{M}-\tilde{\mathrm{A}})d\tau} \circ A_{\mathrm{A}+[1/2(\nu+\mathbf{n})-\mathrm{A}^2+1/2(\tilde{\mathrm{M}}\circ\mathrm{A}+\mathrm{A}\circ\hat{\mathrm{M}})]d\tau}$$

$$\mathrm{M} = \mu+\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega}, \quad \bar{\mathrm{M}} = \mu+\mathbf{a}-i\boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\mathrm{M}} = \mu-\mathbf{a}-i\boldsymbol{\omega}, \quad \hat{\mathrm{M}} = \tilde{\bar{\mathrm{M}}} = \mu-\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega}$$

Выпишем уравнения для R, B, A:

$$d\mathrm{R}/d\tau = \mathrm{B}\circ\bar{\mathrm{B}}, \quad d\mathrm{B}/d\tau = 1/2\mathrm{B}\circ(\mu+\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega}-2\tilde{\mathrm{A}})$$

$$d\mathrm{A}/d\tau = 1/2(\nu+\mathbf{n})-\mathrm{A}^2+1/2[(\mu-\mathbf{a}-i\boldsymbol{\omega})\circ\mathrm{A}+\mathrm{A}\circ(\mu-\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})]$$

$$\mathrm{R} = t+\mathbf{r}, \quad \mathrm{B} = \sqrt{\gamma}e^{\boldsymbol{\psi}/2}\circ e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2}, \quad \mathrm{A} = 1/2(w+\mathbf{g})$$

Полученные уравнения инерциальной навигации могут быть явно разрешены относительно производных от параметров t, $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ (или Q), $\mathbf{g}$, w, γ:

$$dt/d\tau = \gamma\,\mathrm{ch}\psi, \quad d\mathbf{r}/d\tau = \gamma\,\mathrm{sh}\boldsymbol{\psi}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\tau} = \mathrm{Q}\circ\mathbf{a}'\circ\mathrm{Q}^{-1} + \frac{\boldsymbol{\psi}\times[\boldsymbol{\psi}\times(\mathrm{Q}\circ\mathbf{a}'\circ\mathrm{Q}^{-1})]}{\psi^2}\left(1-\frac{\psi}{\mathrm{sh}\psi}\right)$$

$$d\mathrm{Q}/d\tau = 1/2\mathrm{Q}\circ i\boldsymbol{\omega}', \quad d\mathbf{g}/d\tau = \mathbf{n}+\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}+\mu\mathbf{g}-w\mathbf{a}'$$

$$dw/d\tau = \nu-1/2(w^2-\mathbf{g}^2)+\mu w-\mathbf{g}\cdot\mathbf{a}', \quad d\gamma/d\tau = \gamma(\mu-w)$$

$$\mathrm{Q} = e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}+\mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}+\mathbf{a}'\times[\mathrm{Q}^{-1}\circ\mathrm{th}(\boldsymbol{\psi}/2)\circ\mathrm{Q}]$$

Если вместо γ использовать канонический параметр масштабного преобразования α, то γ в правых частях первых двух уравнений надо заменить на e^{α}, а дифференциальное уравнение для γ заменить дифференциальным уравнением для α:

$$d\alpha/d\tau = \mu - w$$

Из последнего уравнения вытекает вторая, не зависящая явно от понятия "гравитационный потенциал", физическая интерпретация параметра w: это гравитационная часть (с учетом знака) полной скорости изменения канонического параметра масштабного преобразования (так же как $\mathbf{g}$ – гравитационная часть полного ускорения $\mathbf{a}'$).

Видно также, что есть возможность несколько упростить уравнения инерциальной навигации, поддерживая масштабный множитель равным единице ($\gamma = 1$, при этом $\alpha = 0$), если он был таким в начальный момент, но при этом необходимо подстраивать[23] бортовой эталон единицы измерения времени (расстояния) для компенсации гравитационного изменения масштаба (проявляющегося как эффект замедления времени в гравитационном поле [41; 42, с. 102, 118–119]).

При отсутствии гравитации ($\mathbf{g} = 0$, $w = 0$) и $\gamma = 1$ полученные уравнения совпадают с выведенными в [15] в рамках специальной теории относительности уравнениями инерциальной навигации. С другой стороны, при неизменном ($\mu = 0$) и совпадающем с базовым ($\gamma = 1$) бортовом эталоне измерения времени (расстояния) и пренебрежении гравитационным изменением масштабов ($w = 0$), при малых скоростях ($\psi \to 0$) с точностью до поправок более высокого порядка по малому параметру $\psi \approx \upsilon$ выписанные уравнения совпадают с нерелятивистскими уравнениями инерциальной навигации, полученными в разделе **4**.

Возвращаясь к более традиционной (но, как показано выше, непоследовательной с точки зрения теоретико-группового подхода) постановке задачи инерциальной навигации, будем считать, что w и $\mathbf{g}$ (параметры, определяющие "гравитационное поле") известны (заданы)[24]. Тогда дифференциальные уравнения для $\mathbf{g}$ и w не нужны; оставшиеся уравнения[25] могут быть записаны в виде одного уравнения в комплексно-дуальных кватернионах

$$d\Lambda/d\tau = 1/2\Lambda \circ [(\mu - w) + (\mathbf{a} + \mathbf{g}) + i\boldsymbol{\omega} + \varepsilon i\tilde{\Lambda} \circ \Lambda]$$

$$\Lambda = e^{\varepsilon i(t + \mathbf{r})/2} \circ e^{(\alpha + \psi)/2} \circ e^{i\vartheta/2}, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad i^2 = -1$$

---

[23] Изменения должны быть плавными по постановке задачи; в противном случае преобразование, связывающее $E(\tau)$ и $E(\tau + d\tau)$, не будет бесконечно малым.

[24] При этом предполагается, что в начале отсчета базовой системы I гравитационное поле отсутствует. Если задан гравитационный потенциал $\Phi = \Phi(\tau, x, y, z)$, где τ, x, y, z – время и координаты в системе E, причем знак этой функции выбран (в соответствии с [40, с. 188]) так, что $\mathbf{g} = -\nabla\Phi = -(\mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y + \mathbf{e}_z\partial_z)\Phi$, то $w = \partial_\tau\Phi$ (все частные производные от Φ берутся в начале отсчета системы E).

[25] Автор не обладает достаточной квалификацией для сравнения этих уравнений с известными уравнениями инерциальной навигации, полученными Л.И. Седовым в рамках общей теории относительности [43]. Однако, не лишним будет напомнить, что так называемая общая теория относительности построена на отказе от принципа относительности [4, с. 471–473; 27, с. 60; 37, с. 17]. Обратим также внимание читателей МТТ на уникальный эксперимент по измерению влияния релятивистских эффектов на дрейф гироскопа [44], на важность инерциальной навигации для современной космонавтики [45] и на необходимость логического анализа физических теорий, в том числе и классической механики [46, 47], см. также: *Журавлев В.Ф.* Основания механики. Методические аспекты. Препринт № 251. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1985. 48 с.; *Чуб В.* О некоторых следствиях формальной логики // Международный научный конгресс студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодежь и наука – третье тысячелетие" YSTM'96. Сб. трудов. Т. 1. / Под ред. И.Б. Федорова, К.С. Колесникова, А.О. Карпова. М.: НТА "Актуальные проблемы фундаментальных наук", 1997. С. III-22 (тезисы доклада).

7. Заключение. 13-параметрическая расширенная группа Галилея (с соответствующей физической интерпретацией) и есть то отсутствовавшее промежуточное звено, которое позволяет перевести 15-параметрическую конформную группу со ступени (*a*) на уровень (*b*) (по Ф. Клейну, см. [32, с. 203–205; 48, с. 116–117, 123]).

Автор признателен В.Ф. Журавлеву.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Визгин В.П.* "Эрлангенская программа" и физика. М.: Наука, 1975. 112 с.
2. Российская академия образования. Институт информатизации образования. Ученые записки. Вып. 2. М., 1998. 80 с.
3. *Любарский Г.Я.* Теория групп и физика. М.: Наука, 1986. 224 с.
4. *Тоннела М.-А.* Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 483 с.
5. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.
6. *Голубятников А.Н.* Симметрии сплошных сред // Успехи механики. 2003. Т. 2. № 1. С. 126–183.
7. *Мархашов Л.М.* О групповой концепции Клейна в механике материальной точки // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 563–569.
8. *Ишлинский А.Ю.* Механика: идеи, задачи, приложения. М.: Наука. 1985. 623 с.
9. *Андреев В.Д., Девянин Е.А.* Автономные инерциальные навигационные системы // Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973. С. 307–321.
10. Научный совет по проблемам навигации и автоматического управления. Совещание по проблемам разработки бесплатформенных инерциальных систем (8–9 июля 1969 г., Москва) // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 1. С. 168–173.
11. *Блюмин И.Д.* Глава 6. Теория инерциальных навигационных систем // Развитие общей механики в России и Украине в 20–80-е годы XX века. М.: Наука; Киев: Феникс, 1998. С. 148–181.
12. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 279 с.
13. *Бежко А.П., Бранец В.Н., Захаров Ю.М., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в теории конечного поворота твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 1. С. 123–134.
14. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
15. *Чуб В.Ф.* О возможности применения одной системы гиперкомплексных чисел в инерциальной навигации // Изв. АН. МТТ. 2002. № 6. С. 3–23.
16. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
17. *Ткачев Л.И.* Системы инерциальной ориентировки. Ч. 1. Основные положения теории. М.: МЭИ, 1973. 213 с.
18. *Грязнов А.Ю.* Абсолютное пространство как идея чистого разума // Вопросы философии. 2004. № 2. С. 127–147.
19. Физический энциклопедический словарь. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1960. 664 с.
20. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии. М.: Наука, 1983. 351 с.
21. *Седов Л.И.* Об основных моделях в механике. М.: Изд-во МГУ, 1992. 151 с.
22. Inertial Technology for the Future // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1984. Vol. AES-20. № 4. P. 414–444.
23. *Буравлев А.П., Мумин О.Л., Романенко С.Г., Степанов О.С.* Криогенный гравитационный градиентометр с активными обратными связями // Гироскопия и навигация. 1993. № 1. С. 64–67.
24. *Цай Тицзин.* О некоторых задачах канонического гравитационного градиентометра // Проблемы современной механики / Под ред. С.С. Григоряна. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 293–297.
25. *Цай Тицзин.* Бесплатформенная инерциальная навигационная система на основе канонического гравитационного градиентометра // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 884–887.

26. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наук. думка, 1983. 208 с.
27. *Логунов А.А.* Анри Пуанкаре и теория относительности. М.: Наука, 2004. 256 с.
28. *Каратеодори К.* К аксиоматике специальной теории относительности // Развитие современной физики / Отв. ред. Б.Г. Кузнецов. М.: Наука, 1964. С. 167–187.
29. Масштабное преобразование // Математическая физика. Энциклопедия. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998. С. 352.
30. *Джэкив Р.* Знакомьтесь с масштабной симметрией // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109. Вып. 4. С. 743–755.
31. *Дубовик В.М.* О приложении масштабной инвариантности в физике элементарных частиц // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109. Вып. 4. С. 756–760.
32. *Визгин В.П.* Из истории конформной симметрии в физике (о некоторых особенностях взаимосвязи физики и математики в XX веке) // Историко-математические исследования. Вып. 19. М.: Наука, 1974. С. 188–219.
33. *Мархашов Л.М.* О конформно-инвариантных движениях материальной точки // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 4–13.
34. *Поляков А.М.* Конформная симметрия критических флуктуаций // Инстантоны, струны и конформная теория поля / Под ред. А.А. Белавина. М.: Физматлит, 2002. С. 63–66.
35. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987. 431 с.
36. Физическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1990. 703 с.
37. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961. 563 с.
38. *Говорухин В., Цибулин В.* Компьютер в математическом исследовании. СПб.: Питер, 2001. 619 с.
39. *Чуб В.Ф.* О равноускоренном движении // Физическое образование в вузах. 2005. Т. 11. № 3. С. 127–130.
40. Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998. 757 с.
41. *Окунь Л.Б., Селиванов К.Г., Телегди В.Л.* Гравитация, фотоны, часы // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169. № 10. С. 1141–1147.
42. *Шебшаевич В.С.* Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971. 295 с.
43. *Седов Л.И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 6. С. 1311–1314.
44. *Лисов И.* Так прав ли был Эйнштейн? Через 45 лет после рождения идеи Gravity Probe-B выведен на орбиту // Новости космонавтики. 2004. Т. 14. № 6. С. 30–33.
45. *Драгныш Т.* БИНСы Бранца (к 70-летию ученого) // Российский космос. 2006. № 2. С. 92.
46. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. Киев: Наук. думка, 1995. 407 с.
47. *Чуб В.Ф.* Незамкнутость элементарных преобразований пространства-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 153–160.
48. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 239 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.05.2004