

УДК 531.38

© 2006 г. М.Ю. ГАРНИХИНА, Е.П. КУБЫШКИН

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С НАСЛЕДСТВЕННО ВЯЗКОУПРУГИМ СТЕРЖНЕМ**

Рассмотрены две задачи оптимального управления поворотом твердого тела и жестко связанного с ним гибкого стержня, материал которого моделируется реологическим уравнением наследственно вязкоупругого тела [1]. Это задача перевода системы из начального состояния в конечное с минимумом квадратичного функционала по управлению и задача быстродействия. Метод построения оптимальных управлений, предложенный в [2], обобщен на рассматриваемую механическую систему. При этом оптимальные управления строятся с использованием лишь геометрических характеристик рассматриваемой системы и комплексного модуля упругости материала стержня, который снимается экспериментально.

1. Постановка задачи. Изучается механическая система, состоящая из твердого тела и жестко связанного с ним гибкого стержня постоянного сечения и равномерно распределенной по длине массы. Материал стержня моделируется реологической моделью наследственно вязкоупругого тела [1]

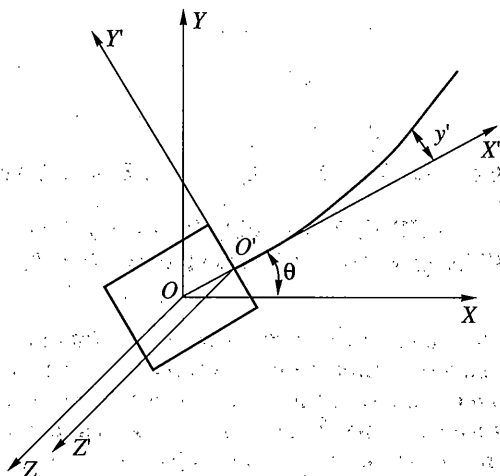
$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^0 R'(\tau) \varepsilon(t + \tau) d\tau \right)$$

где $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ – соответственно напряжение и относительная деформация, E – модуль Юнга, $R'(\tau)$ – функция релаксации. Относительно $R'(\tau)$ ($-\infty < \tau < 0$) считаем выполненными следующие условия:

$$R'(\tau) > 0, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} R'(\tau) > 0, \quad \int_{-\infty}^0 R'(\tau) d\tau < 1 \tag{1.1}$$

$$R'(\tau) < M_0(\exp(\gamma_0 \tau)) \quad (\tau \rightarrow -\infty; \quad M_0, \gamma_0 > 0)$$

Поместим в центр масс твердого тела систему координат $OXYZ$ инерциального пространства, расположив ее таким образом, чтобы центральная ось стержня находилась в плоскости OXY . Механическая система может совершать вращательные движения вокруг оси OZ , относительно которой приложен момент $M'(t)$ управляющих сил. Свяжем с твердым телом систему координат $O'X'Y'Z'$, поместив ее в точку заделки упругого стержня, задав направление оси X' вдоль касательной к нейтральной оси стержня в точке заделки, а направление оси Z' параллельно оси Z . Положение механической системы может быть охарактеризовано углом поворота $\theta(t')$ (между осями X' и X) и величиной $y'(x', t')$ поперечной деформации стержня в точке x' в момент времени t' (фиг. 1).



Фиг. 1

Математической моделью рассматриваемой механической системы является следующая система дифференциальных уравнений, естественным образом обобщающая на рассматриваемый случай соответствующие уравнения [2, 3]:

$$J\ddot{\theta} + \int_0^l (x+a)y_{tt}(x,t)dx = M(t) \quad (1.2)$$

$$y_{tt} + (I - \Gamma^*)y_{xxxx} = -(x+a)\ddot{\theta} \quad (1.3)$$

$$x = x'/l, \quad y(x,t) = y'(x',t')/l, \quad t = bt', \quad b^2 = EI/(ml^4)$$

$$a = a'/l, \quad J = J'/(ml^3), \quad M(t) = M'(t)/(ml^3b^2)$$

$$(I - \Gamma^*)\varepsilon(t) \equiv \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^0 R(\tau)\varepsilon(t+\tau)d\tau, \quad \tau = bt', \quad R(\tau) = R'(\tau')/b$$

$$J = J'_1 + m \int_0^l (x'+a')^2 dx'$$

с граничными условиями

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, \quad y_{xx}(l,t) = y_{xxx}(l,t) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь l, EI, m – соответственно длина стержня, его жесткость и погонная масса; a' – расстояние от центра масс твердого тела до точки заделки стержня; J'_1 – момент инерции твердого тела относительно оси Z , (ниже $J_1 = J'_1/(ml^3)$).

Отметим, что вторая часть граничных условий (1.4) в силу ограничений (1.1) эквивалентна $(I - \Gamma^*)y_{xx}(l,t) = (I - \Gamma^*)y_{xx}(l,t) = 0$, что соответствует отсутствию изгибающе-

го момента и перерезающей силы на конце стержня для рассматриваемой модели материала.

Система уравнений (1.2)–(1.4) является системой уравнений с бесконечным запаздыванием аргумента. Остановимся на постановке начально-краевой задачи для (1.2)–(1.4).

В дальнейшем $L_2(0,1)$ и $W_2^4(0,1)$ – соответственно гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций и пространство Соболева соответствующего порядка, скалярные произведения и нормы в которых введены естественным образом. Положим $\bar{W}_2^4(0, T) = \{v|v(s) \in W_2^4(0, T), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$ и введем в рассмотрение оператор $B^2 v \equiv v^{(IV)}$, действующий в $L_2(0, 1)$ с областью определения $D(B^2) = \bar{W}_2^4(0, T)$. Оператор B^2 является, очевидным образом, самосопряженным и положительно определенным. Ниже B – положительный корень из оператора B^2 , имеющий область определения $D(B)$. Обозначим через D_γ ($0 < \gamma < \gamma_0$) пространство кусочно-непрерывных по τ функций (т.е. имеющих не более конечного числа точек разрыва первого рода на любом конечном множестве изменений τ) вида

$$\{u(x, \tau) | 0 \leq x \leq 1, -\infty < \tau \leq 0, u(x, \tau) \in D(B^2), \\ \|u(x, \tau)\|_D = \sup_{-\infty < \tau \leq 0} (\exp(\gamma\tau) \|u(x, \tau)\|_{W_2^4(0,1)}) < \infty\}$$

Под решением краевой задачи (1.2)–(1.4) будем понимать совокупность функций $\theta(t), y(x, t + \tau)$ ($-\infty < \tau \leq 0$), удовлетворяющих (1.2)–(1.4) и начальным условиям:

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, y(x, t + \tau)|_{t=0} = y_0(x, \tau) \in D_\gamma, y_t(x, 0) = \dot{y}_0(x) \in D(B) \quad (1.5)$$

Ниже решение начально-краевой задачи (1.2)–(1.5) будет построено в явном виде, из которого будет следовать корректность постановки.

Введем в рассмотрение подпространство функций $\bar{D}_\gamma = \{u(x, \tau) | u(x, \tau) \in D_\gamma, u(x, \tau) \equiv 0, -\infty < \tau < 0\}$ – начальных условий, принимающих ненулевые значения лишь при $\tau = 0$.

Рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить момент управления $M^*(t) \in L_2(0, T)$, переводящий систему (1.2)–(1.4) из начального положения

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, y(x, \tau) = y_0(x, \tau) \in \bar{D}_\gamma, y_t(x, 0) = \dot{y}_0(x) \in D(B) \quad (1.6)$$

в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, y(x, T) = y_T(x, T) \in D(B^2), y_t(x, T) = \dot{y}_T(x) \in D(B) \quad (1.7)$$

в заданный момент времени T и минимизирующий функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \quad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем начальный момент времени без ограничения общности считается равным нулю.

В (1.6) начальное условие для $y(x, t + \tau)$ ($-\infty < \tau \leq 0$) выбирается принадлежащим пространству функций \bar{D}_γ , т.е. тождественно равным нулю при ($-\infty < \tau < 0$). С механической точки зрения это означает, что в материале стержня в начальный момент времени отсутствует остаточное напряжение. Такая постановка задачи является весьма

осмысленной. Отметим, что излагаемая в работе методика построения оптимального управления допускает использование в качестве начального и конечного условий произвольных функций принадлежащих D_p , однако априорное задание величины остаточных напряжений в материале стержня является с практической точки зрения весьма проблематичным.

Задача 2. Определить момент управления $M^*(t) \in L_2(0, T)$, $\Phi(M^*) \leq L < \infty$, переводящий систему (1.2)–(1.4) из (1.6) в (1.7) за минимальное время T^* .

2. Построение решения краевой задачи (1.2)–(1.5). Выразим из (1.3) y_{tt} и подставим в (1.2). В результате имеем

$$\left(J - \int_0^1 (x+a)^2 dx \right) \ddot{\theta} - (I - \Gamma^*) \int_0^1 (x+a) y_{xxxx}(x, t) dx = M(t)$$

что с учетом (1.4) эквивалентно уравнению

$$J_1 \ddot{\theta} + (I - \Gamma^*) (a y_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = M(t)$$

В итоге для определения $y(x, t)$ имеем уравнение

$$y_{tt} + (I - \Gamma^*) [y_{xxxx} - J_1^{-1} (x+a) (a y_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t))] = -J_1^{-1} (x+a) M(t) \quad (2.1)$$

Построим теперь решение уравнения (2.1) с граничными и начальными условиями (1.4), (1.5) методом Фурье. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$y_{tt} + (I - \Gamma^*) [y_{xxxx} - J_1^{-1} (x+a) (a y_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t))] = 0 \quad (2.2)$$

Определяя решение (2.2) в виде $y(x, t) = v(x)s(t)$, получим для $v(x)$ следующую спектральную краевую задачу

$$v'''' - J_1^{-1} (x+a) (a v'''(0) - v''(0)) = \lambda v \quad (2.3)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad v''(1) = v'''(1) = 0 \quad (2.4)$$

а для $s(t)$ – следующее уравнение:

$$\ddot{s}(t) + \lambda (I - \Gamma^*) s(t) = 0$$

Спектральная краевая задача (2.3), (2.4) подробно изучалась в [4], где была построена полная система собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ и соответствующих собственных функций $v_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$). При этом $\lambda_n = \beta_n^4$, где β_n – n -й положительный корень характеристического уравнения

$$\operatorname{ch} \beta \cos \beta + 1 + J_1^{-1} \{ 2a\beta^{-2} \operatorname{sh} \beta \sin \beta + \beta^{-3} [(a^2 \beta^2 + 1) \operatorname{ch} \beta \sin \beta + (a^2 \beta^2 - 1) \operatorname{sh} \beta \cos \beta] \} = 0$$

$$v_n(x) = v_n^*(x) / \langle v_n^*(x), v_n^*(x) \rangle$$

$$v_n^*(x) = A_n \operatorname{ch}(\beta_n x) + B_n \operatorname{sh}(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) + (J_1 \beta_n^2)^{-1} (x+a) (A_n - a \beta_n B_n - C_n + a \beta_n D_n)$$

$$A_n = \operatorname{sh} \beta_n + [1 - 2a (J_1 \beta_n^2)^{-1}] \sin \beta_n - 2a^2 (J_1 \beta_n)^{-1} \cos \beta_n$$

$$B_n = -\operatorname{ch} \beta_n - [1 + 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \cos \beta_n - 2(J_1 \beta_n^3)^{-1} \sin \beta_n$$

$$C_n = -\sin \beta_n - [1 + 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \operatorname{sh} \beta_n - 2a^2 (J_1 \beta_n)^{-1} \operatorname{ch} \beta_n$$

$$D_n = \cos \beta_n + [1 - 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \operatorname{ch} \beta_n - 2a^2 (J_1 \beta_n^3)^{-1} \operatorname{sh} \beta_n$$

где скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет вид

$$\langle v(x), w(x) \rangle = (v(x), w(x))_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v(x))_{L_2(0,1)}(x+a, w(x))_{L_2(0,1)}$$

Между функциями $v_n(x)$ выполнены следующие условия ортогональности $\langle v_n(x), v_m(x) \rangle = \delta_{nm}$, где δ_{nm} – символ Кронекера.

Построим при $t > 0$ решение уравнения

$$\ddot{s}_n(t) + \omega_n^2(I - \Gamma^*)s_n(t) = f_n(t) \tag{2.5}$$

$$\omega_n = \beta_n^2, \quad f_n(t) = -J^{-1}c_n M(t), \quad c_n = (x+a, v_n(x))_{L_2(0,1)}$$

с начальными условиями

$$s_n(t+\tau)|_{t=0} = a_n(\tau), \quad \dot{s}_n(0) = b_{n0}$$

$$a_n(\tau) = \langle y_0(x, \tau), v_n(x) \rangle, \quad b_{n0} = \langle \dot{y}_0(x), v_n(x) \rangle \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Здесь использовано разложение

$$x+a = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad d_n = \langle x+a, v_n(x) \rangle = J_1 J^{-1} c_n$$

Введем в рассмотрение функцию Коши $k_n(t)$, как решение уравнения $\dot{k}_n(t) + \omega_n^2(I - \Gamma^*)k_n(t) = 0$ с начальными условиями $k_n(0, \tau) \equiv 0, \dot{k}_n(0) = 1$.

Непосредственно имеем

$$k_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} H_n^{-1}(p) e^{pt} dp \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{2.6}$$

$$H_n(p) = p^2 + \omega_n^2 \left(1 - \int_{-\infty}^0 R(\tau) e^{p\tau} d\tau \right)$$

где β выбрано таким образом, чтобы вещественные части корней уравнений $H_n(p) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) были меньше β .

Отметим, что согласно (1.1) β может быть выбрано равным нулю. В этом случае

$$H_n(p) = H_n(i\omega) = -\omega^2 + \omega_n^2(1 - R_c(\omega) + iR_s(\omega))$$

$$R_c(\omega) = \int_0^{\infty} R(-\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad R_s(\omega) = \int_0^{\infty} R(-\tau) \sin(\omega\tau) d\tau$$

где R_c, R_s – нормированные составляющие комплексного модуля упругости материала стержня, который определяется экспериментально [1], и (2.6) превращается в обратное преобразование Фурье.

Применим к уравнению (2.5) преобразование Лапласа. В результате получим

$$S_n(p) = H_n^{-1}(p) \left[p a_n(0) + b_{n0} + \omega_n^2 \int_{-\infty}^0 R(\tau) e^{p\tau} \int_{\tau}^0 a_n(t_1) e^{-pt_1} dt_1 d\tau + F_n(p) \right] \quad (2.7)$$

$$S_n(p) \doteq s_n(t), \quad F_n(p) \doteq f_n(t)$$

С учетом (2.6) и свойств изображения свертки функций имеем

$$H_n^{-1}(p) e^{p\tau} \int_{\tau}^0 a_n(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = \int_{\tau}^0 k_n(t + \tau - t_1) a_n(t_1) dt_1$$

В результате на основании (2.6), (2.7) получаем

$$s_n(t) = k_n(t) a_n(0) + k_n(t) b_{n0} + \omega_n^2 \int_{-\infty}^0 R(\tau) \int_{\tau}^0 k_n(t + \tau - t_1) a_n(t_1) dt_1 d\tau + \int_0^t k_n(t - \tau) f_n(\tau) d\tau$$

В соответствии с изложенным решение уравнения (2.1) $y_*(x, t)$ с начальными условиями (1.6) и граничными условиями (1.4) имеет вид

$$y_*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \left(k_n(t) a_n(0) + k_n(t) b_{n0} - J^{-1} c_n \int_0^t k_n(t - t_1) M(t_1) dt_1 \right) \quad (2.8)$$

Подставив теперь (2.8) в уравнение (1.2), получим для определения $\theta(t)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$J\ddot{\theta}(t) = qM(t) + \int_0^t G(t - t_1) M(t_1) dt_1 + f(t) \quad (2.9)$$

$$q = 1 + J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad G(t) = J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \ddot{k}_n(t), \quad f(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (a_n(0) \ddot{k}_n(t) + b_{n0} \ddot{k}_n(t))$$

Интегрируя теперь (2.9) при учете начальных условий (1.6), имеем искомое решение

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + J^{-1} \int_0^t (t - t_1) \left[qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t_1 - t_2) M(t_2) dt_2 + f(t_1) \right] dt_1$$

3. Решение задач управления. Результаты п. 2 позволяют переформулировать задачу управления как гладкую экстремальную задачу с ограничениями типа равенств следующим образом: найти минимум функционала (1.8) при ограничениях

$$\theta_T = \theta_0 + J^{-1} \int_0^T \left[qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t_1 - t_2) M(t_2) dt_2 + f(t_1) \right] dt_1 \quad (3.1)$$

$$\theta_T = \theta_0 + \dot{\theta}_0 T + J^{-1} \int_0^T (T-t_1) \left[qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t_1-t_2)M(t_2)dt_2 + f(t_1) \right] dt_1 \quad (3.2)$$

$$a_{nT} = a_n(0)\dot{k}_n(T) + b_{n0}k_n(T) - J^{-1}c_n \int_0^T k_n(T-t_1)M(t_1)dt_1 \quad (3.3)$$

$$b_{nT} = a_n(0)\ddot{k}_n(T) + b_{n0}\dot{k}_n(T) - J^{-1}c_n \int_0^T \dot{k}_n(T-t_1)M(t_1)dt_1 \quad (3.4)$$

$$a_{nT} = \langle y_T(x), v_n(x) \rangle, \quad b_{nT} = \langle \dot{y}_T(x), v_n(x) \rangle \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Обозначим через $M_2(0, T)$ множество функций $M(t) \in L_2(0, T)$, удовлетворяющих условиям (3.1)–(3.4); $M_2(0, T)$ – замкнутое выпуклое множество, а $\Phi(M)$ – выпуклый функционал.

Согласно теореме Куна–Таккера [5, с. 76], существует единственная функция $M^*(t) \in M_2(0, T)$, доставляющая минимум функционалу (1.8).

Остановимся на практическом способе вычисления $M^*(t)$. Преобразуем предварительно соотношения (3.1), (3.2) с учетом (2.9) и (3.3), (3.4). Рассматривая $T > 0$ как параметр, применим к (3.1) и (3.4) преобразование Лапласа. В результате имеем

$$(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0)p^{-1} = J^{-1} \left\{ q\bar{M}(p) + J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (p^2 K_n(p) - 1) \bar{M}(p) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(p^3 K_n(p) - p)a_n(0) + (p^2 K_n(p) - 1)b_{n0}] \right\} p^{-1}$$

$$b_{nT} p^{-1} = (p^2 K_n(p) - 1)a_n(0) + p K_n(p) b_{n0} - J^{-1} c_n p K_n(p) \bar{M}(p)$$

$$\bar{M}(p) \doteq M(t), \quad K_n(p) \doteq k_n(t)$$

Отсюда следует

$$(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0)p^{-1} = J^{-1} \left\{ q\bar{M}(p) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(p^3 K_n(p) - p)a_n(0) + p^2 K_n(p) b_{n0} - b_{nT}] - \sum_{n=1}^{\infty} c_n [(p^3 K_n(p) - p)a_n(0) + (p^2 K_n(p) - 1)b_{n0}] \right\} p^{-1} = \quad (3.5)$$

$$= J^{-1} \left[\bar{M}(p) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (b_{nT} - b_{n0}) \right] p^{-1}$$

Соотношение (3.5) определяет равенство

$$\int_0^T M(t)dt = (1, M(t))_{L_2(0, T)} = A_0(T) = J(\theta_T - \dot{\theta}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (b_{nT} - b_{n0}) \quad (3.6)$$

Аналогично преобразуется равенство (3.2). В результате имеем

$$\int_0^T (T-t)M(t)dt = (T-t, M(t))_{L_2(0, T)} = A_1(T) =$$

$$= J(\theta_T - \theta_0 - \dot{\theta}_0 T) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(a_{nT} - a_n(0) - b_{n0}T) \quad (3.7)$$

Из (3.3), (3.4) соответственно получим

$$(\dot{k}_n(T-t), M(t))_{L_2(0, T)} = A_{2n}(T) = Jc_n^{-1}(a_n(0)\dot{k}_n(T) + b_{n0}\dot{k}_n(T) - b_{nT}) \quad (3.8)$$

$$(k_n(T-t), M(t))_{L_2(0, T)} = A_{2n+1}(T) = Jc_n^{-1}(a_n(0)k_n(T) + b_{n0}k_n(T) - a_{nT}) \quad (3.9)$$

Отметим, что свойства функций $y_0(x, \tau)$, $y_0(x)$, $y_T(x, \tau)$, $y_T(x)$, фигурирующих в (1.6), (1.7), обеспечивают выполнение условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(T) < \infty \quad (3.10)$$

Введем в рассмотрение систему функций:

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \quad \varphi_1(t) = T-t, \quad \varphi_{2j}(t) = \dot{k}_j(T-t), \quad \varphi_{2j+1}(t) = k_j(T-t), \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

Обозначим через $H_2(0, T)$ подпространство $L_2(0, T)$, являющееся замкнутой линейной оболочкой системы функций (3.11).

Система функций (3.11) не является ортогональной в $L_2(0, T)$. Построим по (3.11) ортонормированную в $L_2(0, T)$ систему функций $\psi_n(t)$, используя для этого ортогонализацию Шмидта [6, с. 78]. Положим

$$\bar{\psi}_0(t) = \varphi_0(t), \quad \psi_0(t) = \bar{\psi}_0(t)/v_0$$

$$\bar{\psi}_1(t) = \varphi_1(t) - \alpha_{10}\psi_0(t), \quad \psi_1(t) = \bar{\psi}_1(t)/v_1$$

.....

$$(3.12)$$

$$\bar{\psi}_n(t) = \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), \quad \psi_n(t) = \bar{\psi}_n(t)/v_n$$

$$\alpha_{nj} = (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0, T)}, \quad v_n = \|\bar{\psi}_n(t)\|_{L_2(0, T)}$$

Наряду с (3.12) определим величины $\beta_n(T)$ следующим образом:

$$\beta_0(T) = A_0(T)/v_0, \quad \beta_1(T) = (A_1(T) - \alpha_{10}\beta_0(T))/v_1, \dots$$

$$\beta_n(T) = \left(A_n(T) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\beta_j(T) \right) / v_n \quad (3.13)$$

Функции $\psi_n(t)$ образуют в $H_2(0, T)$ ортонормированный базис. Отсюда и из (3.12), (3.13) следует, что равенства (3.6)–(3.9) эквивалентны равенствам

$$(M(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = \beta_n(T) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Утверждение 1. Решение задачи 1 дается формулой

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T) \psi_n(t) \quad (3.14)$$

Доказательство повторяет доказательство аналогичного утверждения из [2]. Представим пространство $L_2(0, T)$ в виде прямой суммы $L_2(0, T) = H_2(0, T) \oplus Q_2(0, T)$, где $Q_2(0, T)$ – ортогональное дополнение к $H_2(0, T)$. Тогда $M(t) \in M_2(0, T)$ можно представить в виде $M(t) = M^*(t) + Q(t)$, где $M^*(t) \in H_2(0, T)$, $Q(t) \in Q_2(0, T)$. Но так как $(M(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = (M^*(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} + (Q(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = \beta_n(T)$ и $(Q(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = 0$, то $M^*(t)$ задается формулой (3.14). Отсюда следует

$$\inf_{M \in M_2(0, T)} \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \inf_{Q \in Q_2(0, T)} \|Q(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0, T)}^2$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим решение задачи 2. Согласно (3.10), структуры (3.13):

$$\Theta(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty, \quad \lim_{T \rightarrow 0} \Theta(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \Theta(T) = 0 \quad (3.15)$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $\Theta(T) = L$. Существование такого корня следует из (3.15).

Утверждение 2. Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ дается формулой (3.14) при $T = T^*$.

Пример. Рассмотрим следующую механическую систему: твердое тело – куб со стороной $h = 1.5 \cdot 10^{-1}$ м; стержень наследственно вязкоупругий, имеет длину $l = 7.5 \cdot 10^{-1}$ м и квадратное сечение со стороной $h_1 = 10^{-2}$ м; параметры материала выберем $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² (сталь). Наследственные свойства моделируются обобщенным ядром Абеля [1, с. 27]

$$R'(\tau) = \mu(\beta/\pi)^{1/2} |\tau|^{-1/2} e^{b\tau} \quad (\beta = 2.25 \cdot 10^1 \text{ с}^{-1})$$

В результате имеем (см. также [7, с. 446]):

$$\int_{-\infty}^0 R'(\tau) d\tau = \mu, \quad J_1 = 3 \cdot 10^{-1}, \quad J = 7.331 \cdot 10^{-1}, \quad b = 2.55 \cdot 10^1 \text{ с}^{-1}$$

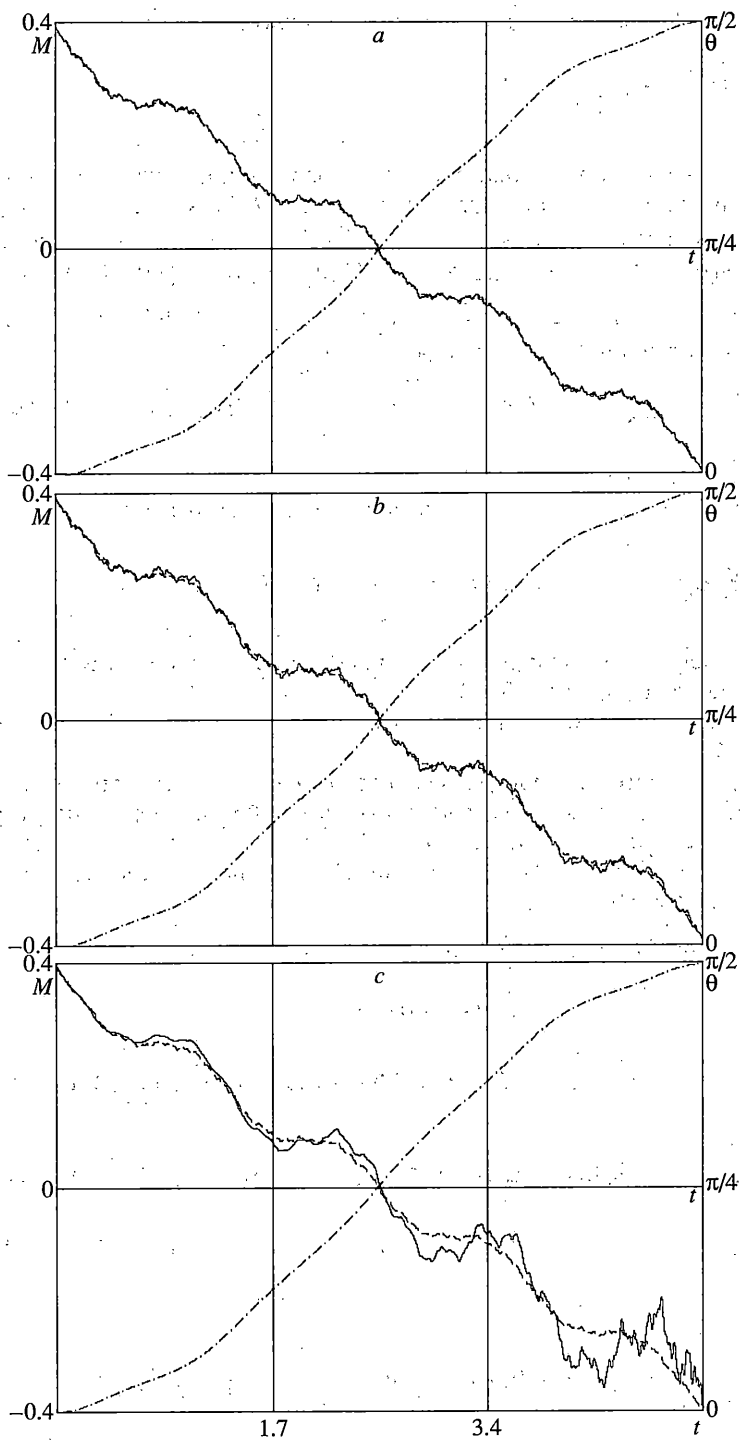
$$\beta_1 = 2.306, \quad \beta_2 = 4.764, \quad \beta_3 = 7.877, \quad \beta_4 = 1.101 \cdot 10^1, \quad \beta_5 = 1.414 \cdot 10^1$$

$$c_1 = 9.759 \cdot 10^{-1}, \quad c_2 = 3.255 \cdot 10^{-1}, \quad c_3 = 1.431 \cdot 10^{-1}, \quad c_4 = 8.021 \cdot 10^{-2},$$

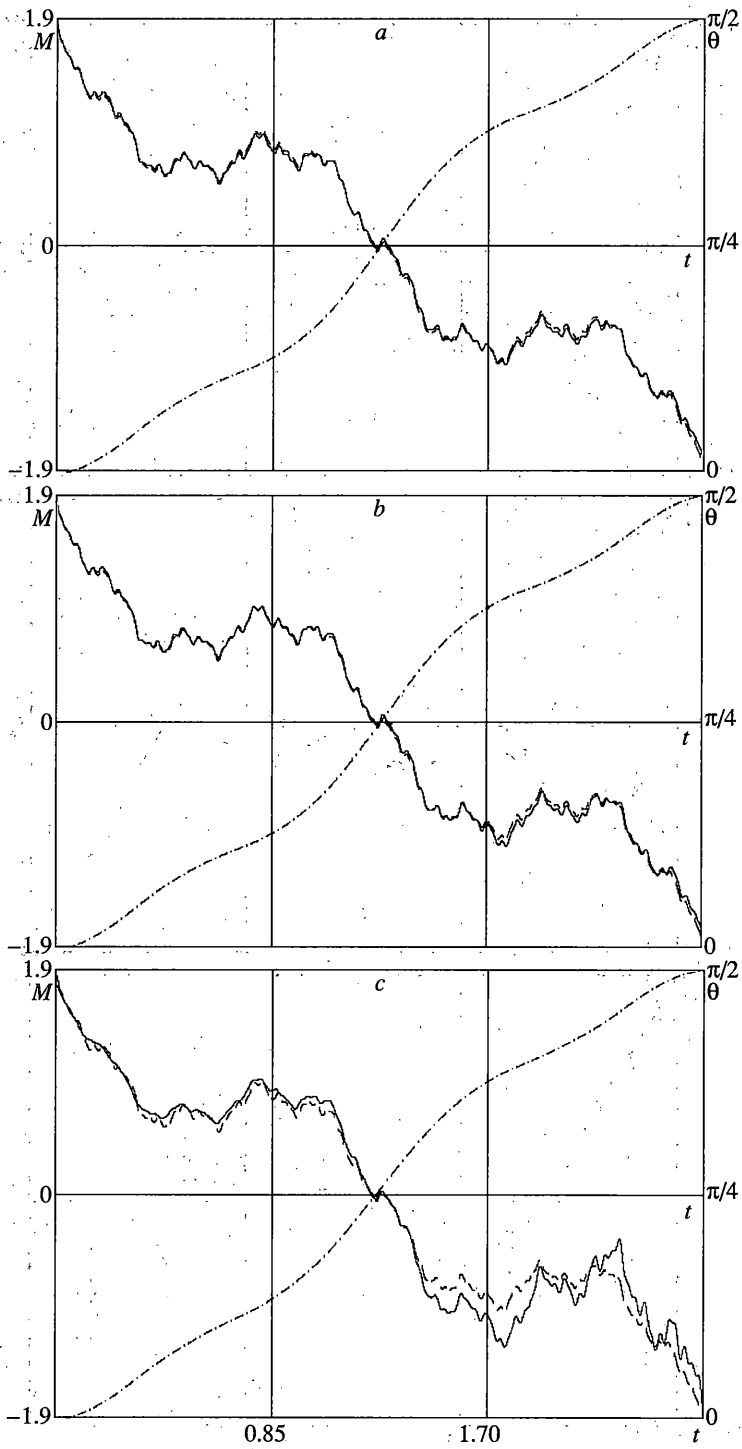
$$c_5 = 6.064 \cdot 10^{-2}$$

$$R_c(\omega) = \frac{\mu}{(1 + \omega^2)^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctg \omega\right), \quad R_s(\omega) = \frac{\mu}{(1 + \omega^2)^{1/4}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctg \omega\right)$$

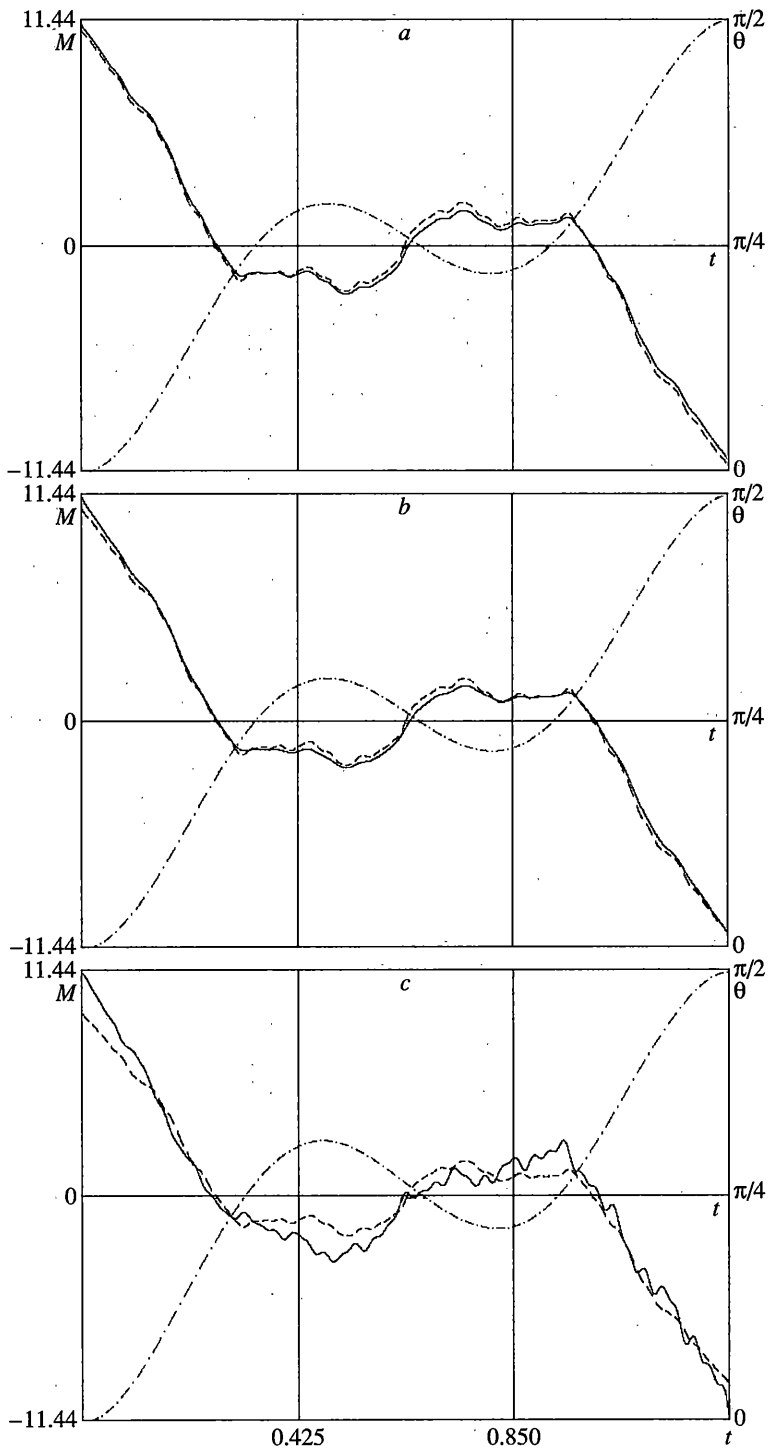
На фиг. 2, $a, b, c, 3, a, b, c, 4, a, b, c$ приведены графики функций $M^*(t)$, дающих решение задачи 1 и фазовой переменной $\theta(t)$ (штрихпунктирная линия) в случае поворота тела из положения равновесия на угол $\theta_T = \pi/2$ с полным гашением колебаний



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

стержня соответственно для $T = 0.2$ с, 0.1 с, 0.05 с и $\mu = 3.125 \cdot 10^{-2}$, $6.25 \cdot 10^{-2}$, $2.5 \cdot 10^{-1}$. Штриховой линией представлен график функции $M^*(t)$ соответствующий случаю $\mu = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. *Кубышкин Е.П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 240–249.
3. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
4. *Злочевский С.И., Кубышкин Е.П.* О стабилизации спутника с гибкими стержнями. I // Космические исследования. 1989. Т. 27. Вып. 5. С. 643–651.
5. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.Н.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

Ярославль

Поступила в редакцию
6.04.2004