

УДК 532.5:517.928.7

© 2006 г. А.Г. ПЕТРОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАЧАЮЩЕЙСЯ ПРУЖИНЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Для исследования нелинейных колебаний качающейся пружины предлагается метод нормальной формы Пуанкаре – Биркгофа. Как известно, этим методом [1, 2] гамильтониан системы представляется в виде квадратичной части, которая называется невозмущенной, и суммой слагаемых степени выше двух. С помощью канонических преобразований гамильтонова система упрощается настолько, что гамильтонова система до членов четвертого порядка и выше становится интегрируемой. Таким образом, получается асимптотическое решение нелинейной задачи. Традиционные методы нормализации для системы с двумя степенями свободы достаточно громоздки и требуют большого числа выкладок [2–6]. Замена переменных ищется с помощью производящих функций, либо с помощью производящего гамильтониана.

В данной работе используется определение инвариантной нормальной формы, данное [7, 8], которое не требует разделения на автономный – неавтономный, резонансный – нерезонансный случаи и осуществляется в рамках единого подхода. Асимптотики нормальной формы получаются путем последовательного вычисления квадратур. В отличие от метода Журавлёва В.Ф. [7, 8] вместо производящего гамильтониана используется параметризованная производящая функция [9–11]. В данной статье дано дальнейшее исследование нелинейных колебаний качающейся пружины для резонансного случая, начатое в [12].

В результате система уравнений движения проинтегрирована при резонансе частот с точностью до членов третьего порядка по амплитуде колебаний. При отклонении маятника от положения равновесия строго по вертикали возникают колебания по вертикали. Колебания неустойчивы по отношению к любому малому возмущению по горизонтали. Неустойчивость приведет к возбуждению колебаний маятника по горизонтали. Этот периодический процесс перекачки энергии от одной моды к другой описан аналитически с высокой точностью при любых начальных отклонениях маятника. Проведено сравнение результатов с результатами других авторов [13–15], а также сравнение данного алгоритма с алгоритмами классического метода нормальной формы [16, 17].

1. Описание алгоритма инвариантной нормализации. Сначала дадим необходимые для алгоритма определения. Функцию $f(t)$, представимую в виде суммы гармоник $f(t) = f_0 + \sum_i (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t)$, назовем квазипериодической функцией.

Введем два линейных оператора $L(f)$ и $L_1(f)$, определенных на множестве квазипериодических функций $f(t)$:

$$L(f(t)) = f_0, \quad L_1(f(t)) = \sum_i \frac{b_i}{\omega_i} \quad (1.1)$$

Пусть дан гамильтониан

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon), \quad F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \varepsilon) = \varepsilon F_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \varepsilon^2 F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \dots$$

который требуется привести к нормальной форме. Тогда согласно [8, 11, 12] для определения нормальной формы

$$\bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \bar{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \varepsilon), \quad \bar{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \varepsilon) = \varepsilon \bar{F}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \varepsilon^2 \bar{F}_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \dots$$

канонической замены переменных и построения асимптотического решения требуется совершить следующие операции.

1. Решить задачу Коши для невозмущенного гамильтониана H_0 и представить его в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{q}(0, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}, \quad \mathbf{p}(0, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \quad (1.2)$$

2. Найти коэффициенты разложения нормальной формы $\bar{F}_i$ и функции Ψ_i :

$$\bar{F}_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = L(R_i(\mathbf{q}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})))$$

$$\bar{\Psi}_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = L_1(R_i(\mathbf{q}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}))) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

где для i -го приближения R_i вычисляются по функциям, найденным в предыдущих приближениях. Формулы первых двух приближений таковы:

$$R_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = F_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad R_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = F_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + (1/2)\{F_1 + \bar{F}_1, \Psi_1\}$$

3. Приведем формулы построения решения после того, как первые два приближения нормальной формы и функции $\Psi = \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2$ найдены.

Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)$ – решение системы с гамильтонианом $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \dot{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{P}_0$$

Тогда по теореме В.Ф. Журавлева подстановкой этого решения в решение (1.2) получим решение системы с гамильтонианом $\bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0), \mathbf{Y}(t, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0)), \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0), \mathbf{Y}(t, \mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0))$$

Решение в исходных переменных получится с помощью канонической замены переменных $\mathbf{Q}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{p}$ в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{x} - (1/2)\Psi_{\mathbf{y}}, & \mathbf{Q} &= \mathbf{x} + (1/2)\Psi_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{y} + (1/2)\Psi_{\mathbf{x}}, & \mathbf{P} &= \mathbf{y} - (1/2)\Psi_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

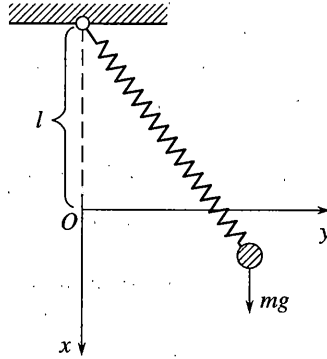
Отсюда ясен смысл функции Ψ : она определяет каноническую замену переменных в параметрическом виде (1.3), приводящую гамильтониан к нормальной форме.

Исключая параметры $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, найдем явный вид преобразования переменных с точностью до малых порядка ε^3

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= \mathbf{Q} - \Psi_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + (1/2)\{\Psi, \Psi_{\mathbf{P}}\} + \dots, \\ \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= \mathbf{P} + \Psi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - (1/2)\{\Psi, \Psi_{\mathbf{Q}}\} + \dots, \quad (\{f, g\} = f_{\mathbf{P}}g_{\mathbf{Q}} - f_{\mathbf{Q}}g_{\mathbf{P}}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Постановка задачи о качающейся пружине. Рассматривается маятник с двумя степенями свободы: тяжелая точка, качающаяся в вертикальной плоскости на пружине (фиг. 1), пружина невесома.

Постановка этой задачи дана, например, в [13–15]. В них приводятся методы ее исследования и различные результаты. Наиболее полный анализ методом Ляпунова–Пуанка-



Фиг. 1

ре для резонансных колебаний дан в [14]. Приведем решение этой задачи методом инвариантной нормализации с помощью параметрической замены переменных. Этим способом будут получены новые, ранее неизвестные результаты.

Обозначим k – жесткость пружины, l – ее длина в положении покоя груза, m – масса груза. Положим еще $\omega = \sqrt{g/l}$ (частота малых колебаний математического маятника длины l) и

$$\mu = \sqrt{k l / (m g) + 1}$$

Введем декартову систему координат с центром в точке O – положении покоя груза – и осями, направленными вдоль вертикали и горизонтали (см. фиг. 1). Обозначим через

lx, ly координаты груза. Длина пружины $lR, R = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}$. Натяжение пружины: $T = k(lR - l_0)/l_0$, где l_0 – длина ненагруженной пружины. С другой стороны, так как l – длина в положении покоя, то $k(l - l_0)/l_0 = mg$. Подставляя $l_0 = kl/(k + mg)$ в T , имеем

$T = (k + mg)R - k$. Отсюда ясно, что $\sqrt{(k + mg)/ml}$ – частота колебаний груза при неотклоненной пружине и μ – отношение этой частоты к ω .

Компоненты силы, действующей на груз $F_x = mg - T(1+x)/R, F_y = -Ty/R$.

Потенциальная E_p и кинетическая E_c энергии системы имеют вид

$$E_p = -mg lx + \frac{k}{2l_0}(lR - l_0)^2 - \frac{k}{2l_0}(l - l_0)^2$$

$$E_c = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt'} \right)^2 \right] = \frac{mgl}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$$

где t' – размерное время, $t = \omega t'$ – безразмерное время.

Вводя безразмерные импульсы $u = \dot{x}$ и $v = \dot{y}$, найдем функцию Гамильтона $H = (E_c + E_p)/(mgl)$:

$$H = (1/2)(u^2 + v^2) + \frac{\mu^2}{2}(R^2 - 1) - (\mu^2 - 1)(R - 1) - x$$

Константа в H выбрана так, что $H(0, 0, 0) = 0$.

Тогда уравнения записываются в виде уравнений Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

Будем изучать движение вблизи положения покоя на больших временах t . Для этого разложим Гамильтониан вблизи положения равновесия

$$H_0 = (1/2)(u^2 + v^2 + \mu^2 x^2 + y^2), \quad F_1 = (1/2)(\mu^2 - 1)xy^2$$

$$F_2 = (1/2)(\mu^2 - 1)(y^4/4 - x^2 y^2)$$

3. Нормальная форма при резонансе. Положим $\mu^2 = 4$. Тогда гамильтониан исходной системы имеет разложение

$$H = H_0 + F_1 + O(r^4), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$H_0 = (1/2)(u^2 + v^2 + 4x^2 + y^2), \quad F_1 = (3/2)xy^2$$

Применяем описанный выше алгоритм. Вначале находим общее решение невозмущенной системы с гамильтонианом H_0 :

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos 2t + (1/2)U \sin 2t, & y(t) &= Y \cos t + V \sin t, \\ u(t) &= U \cos 2t - 2X \sin 2t, & v(t) &= V \cos t - Y \sin t \end{aligned} \quad (3.1)$$

Первое приближение. В функцию $R_1 = F_1 = (3/2)x(t)y(t)^2$ подставляем решение невозмущенной системы. В результате получим квазипериодическую по времени функцию $R_1(t, X, Y, U, V)$ и с помощью операторов L и L_1 найдем нормальную форму и функцию Ψ первого приближения

$$\bar{F}_1 = L(R_1(t, X, Y, U, V)) = (3/8)(-V^2 X + UVY + XY^2) \quad (3.2)$$

$$\Psi_1 = L_1(R_1(t, X, Y, U, V)) = (3/64)(4XYV + 3UV^2 + 5Y^2 U)$$

Интеграл системы. Интегрирование системы удобно провести в переменных Биркгофа

$$z_1 = (1/\sqrt{2})U + \sqrt{2}iX, \quad z_2 = V + iY \quad (3.3)$$

Эти соотношения являются канонической заменой с валентностью $2i$. Нормальная форма первого приближения будет иметь вид $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{F}$:

$$\tilde{H}_0 = i(2z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2), \quad \tilde{F} = -(3\sqrt{2}/16)(Z_1 \bar{Z}_2^2 - \bar{Z}_1 Z_2^2)$$

Система уравнений для невозмущенной части гамильтониана $\dot{z}_1 = 2iz_1$, $\dot{z}_2 = iz_2$ имеет следующее решение:

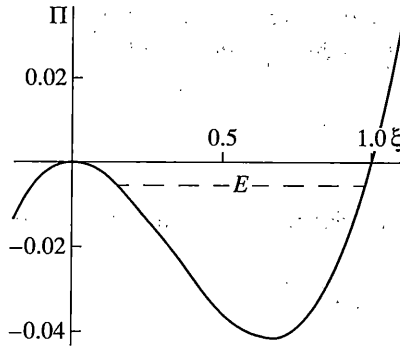
$$z_1 = Z_1 e^{2it}, \quad z_2 = Z_2 e^{it} \quad (3.4)$$

Система уравнений для возмущенной части гамильтониана имеет вид

$$\dot{Z}_1 = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{Z}_1} = \frac{3\sqrt{2}}{16} Z_2^2, \quad \dot{\bar{Z}}_2 = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Z_2} = -\frac{3\sqrt{2}}{8} Z_1 \bar{Z}_2 \quad (3.5)$$

Эта система имеет два интеграла $H_0 = \text{const}$ и $F = \text{const}$. Первый интеграл – закон сохранения энергии

$$2|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = C^2 \quad (3.6)$$



Фиг. 2

где $2|Z_1|^2$ – энергия первой моды (колебания по горизонтали), $|Z_2|^2$ – энергия второй моды (колебания по вертикали).

Чтобы получить уравнение для энергии второй моды продифференцируем ее два раза и подставим производные Z_1 и Z_2 из уравнений (3.5):

$$\frac{d|Z_2|^2}{dt} = \dot{Z}_2 \bar{Z}_2 + \dot{\bar{Z}}_2 Z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{8}(Z_1 \bar{Z}_2^2 + \bar{Z}_1 Z_2^2)$$

$$\frac{d^2|Z_2|^2}{dt^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}(2\dot{Z}_1 \bar{Z}_2^2 + 4\dot{Z}_2 \bar{Z}_1 Z_2) = \frac{9}{32}(-|Z_2|^4 + 4|Z_1|^2|Z_2|^2)$$

С помощью закона сохранения энергии получим уравнение для энергии второй моды

$$\frac{d^2|Z_2|^2}{dt^2} = \frac{9}{32}(-3|Z_2|^4 + 2C^2|Z_2|^2)$$

Для переменной $\xi = |Z_2|^2$ уравнение можно интерпретировать, как движение материальной точки с координатой ξ под действием силы с потенциалом $-\Pi(\xi)$ (движение в потенциальной яме).

Уравнение имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \Pi = E, \quad \Pi = \frac{9}{32}(\xi^3 - C^2\xi^2) \quad (3.7)$$

На фиг. 2 изображен график потенциальной энергии $\Pi(\xi)$ при $C = 1$. Значения энергии второй моды $|z_2|^2$ ограничены двумя точками пересечения сплошной и штриховой линиями. Потенциальная энергия достигает минимума при $\xi = (2/3)C^2$ равного $-(1/24)C^6$.

4. Периодическое решение. В [14] периодическое решение рассматриваемой задачи построено методом Ляпунова. Покажем как его найти из уравнений (3.5) и интегралов (3.6) и (3.7). Периодическое решение соответствует точке минимума $\xi = |Z_2|^2 = (2/3)C^2$, $|Z_1|^2 = (1/6)C^2$. Следовательно решение уравнений (3.5) следует искать в виде

$$Z_1 = \sqrt{(1/6)}Ce^{i\alpha t}, \quad Z_2 = \sqrt{(2/3)}Ce^{i(\beta t + \gamma)} \quad (4.1)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.5), найдем

$$\alpha = \pm(\sqrt{3}/4)C, \quad \beta = \pm(\sqrt{3}/8)C, \quad \gamma = \pm\pi/4$$

Чтобы получить решение для уравнений нормальной формы $H_0 + \tilde{F}$, нужно воспользоваться теоремой Журавлева В.Ф.: подставить (4.1) в решение (3.4). Таким образом, определим семейство периодических решений с точностью до куба амплитуды с двумя произвольными параметрами t_1 и C :

$$z_1 = \frac{C}{\sqrt{6}} \exp[i(2 \pm C\sqrt{3}/4)(t - t_1)], \quad z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} C \exp\{i[(1 \pm C\sqrt{3}/8)(t - t_1) \pm \pi/4]\}$$

В переменных x, y, u, v это решение таково

$$x = (1/\sqrt{12})C \sin(2 \pm C\sqrt{3}/4)(t - t_1), \quad y = \sqrt{2/3}C \sin[(1 \pm C\sqrt{3}/8)(t - t_1) \pm \pi/4] \quad (4.2)$$

Для получения этого решения методом Ляпунова в [14] потребовалось существенно большее количество выкладок. Помимо сказанного предлагаемый метод обладает еще одним очень важным преимуществом перед остальными. Он позволяет без дополнительного исследования сделать вывод об устойчивости полученного периодического решения. Это утверждение вытекает из теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия в точке минимума потенциальной энергии (3.7). Задача устойчивости периодического решения (4.2) ранее не рассматривалась, и это новый результат.

5. Колебания при малом возмущении периодического решения. Поставим задачу, которая ранее также не рассматривалась: найти решение при малом возмущении решения (4.2). Возмущенному решению будут соответствовать линейные колебания функции $\xi(t)$, описываемые уравнением (3.7) при малом отличии энергии E от минимального значения $E = -(1/24)C^6$. Частота этих колебаний $\tilde{\omega}$ и период T_0 таковы

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\Pi''(2C^2/3)} = 3/4C, \quad T_0 = 8\pi/(3C) \quad (5.1)$$

а решение для амплитуд имеет вид

$$\xi = |z_2|^2 = C^2[2/3 + 2\alpha \cos(3/4)C(t - t_2)], \quad |z_1|^2 = C^2[1/6 - \alpha \cos(3/4)C(t - t_2)]$$

Отсюда находим общее решение с четырьмя произвольными постоянными $C, t_1, |\alpha| \ll 1, t_2$:

$$z_1 = \frac{C}{\sqrt{6}} \left(1 - 3\alpha \cos \frac{3}{4}C(t - t_2)\right) e^{i(2 \pm C\sqrt{3}/4)(t - t_1)}$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}C \left(1 + \frac{3}{2}\alpha \cos \frac{3}{4}C(t - t_2)\right) e^{i[(1 \pm C\sqrt{3}/8)(t - t_1) \pm \pi/4]}$$

Отделяя мнимые части у z_1 и z_2 , находим решение для координат x и y :

$$x = (1/\sqrt{12})C(1 - 3\alpha \cos(3/4)C(t - t_2)) \sin(2 \pm C\sqrt{3}/4)(t - t_1)$$

$$y = \sqrt{2/3}C(1 + (3/2)\alpha \cos(3/4)C(t - t_2)) \sin[(1 \pm C\sqrt{3}/8)(t - t_1) \pm \pi/4] \quad (5.2)$$

Найденное решение описывает колебательный процесс с частотами близкими к частотам собственных колебаний 1 и 2 и существенно меньшей частотой модуляций пропорциональной амплитуде колебаний.

Если параметр возмущения $\alpha = 0$, то из решения (5.2) получим периодическое решение (4.2).

6. Колебания при конечном значении энергии. При любом конечном отклонении E от минимума $-(1/24)^6 < E < 0$ можно точно проинтегрировать уравнение (3.7) и найти период колебаний функции $\xi(t)$. Для этого сделаем замены

$$\xi = C^2 \eta(\tau), \quad \tau = \frac{3}{8} Ct, \quad \frac{32}{9C^6} E = \eta_0^3 - \eta_1^2$$

Тогда уравнение (3.7) приведет к виду

$$\frac{1}{4} (d\eta/d\tau)^2 + \eta^3 - \eta^2 = \eta_0^3 - \eta_1^2 \quad (6.1)$$

Его решение представляется в виде следующей квадратуры

$$\tau = \frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{P(\eta)}}, \quad P(\eta) = \eta_0^3 - \eta_1^2 - \eta^3 + \eta^2 = (\eta - \eta_0)(\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2) \quad (6.2)$$

где η_0 , η_1 и η_2 – корни полинома $P(\eta)$:

$$2\eta_1 = 1 - \eta_0 + \sqrt{(1 - \eta_0)(1 + 3\eta_0)}, \quad 2\eta_2 = 1 - \eta_0 - \sqrt{(1 - \eta_0)(1 + 3\eta_0)}$$

Решение можно выразить через эллиптические функции. Период T функции $\xi(t)$ выражается через эллиптический интеграл $K(k)$:

$$T = \frac{8\tau_0}{3C}, \quad \tau_0 = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{P(\eta)}} = \frac{2}{\sqrt{\eta_1 - \eta_2}} K(k), \quad k = \sqrt{\frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 - \eta_2}} \quad (6.3)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

Для функции $K(k)$ известны следующие асимптотические разложения при $k \ll 1$ и $k' = \sqrt{1 - k^2} \ll 1$:

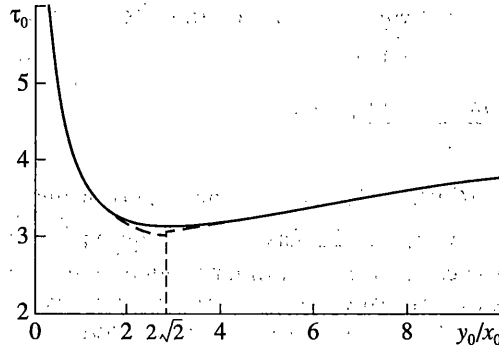
$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + O(k^4) \right), \quad K(k) = \ln(4/k') + \frac{1}{4} (\ln(4/k') - 1) k'^2 + O(k'^4 \ln k') \quad (6.4)$$

В случае, когда колебания начинаются из состояния покоя, начальные условия таковы: $x = x_0$, $u = 0$, $y = y_0$, $v = 0$. Величину τ_0 можно представить в виде функции одного аргумента $\varepsilon = |y_0/x_0|$. Для этого выразим величины, от которых зависит T , через x_0 и y_0 и их отношение ε :

$$C = \sqrt{4x_0^2 + y_0^2}, \quad \eta_0 = \frac{y_0^2}{C^2} = \frac{\varepsilon^2}{4(1 + \varepsilon^2/4)}$$

$$\eta_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{2(1 + \varepsilon^2/4)}, \quad \eta_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{2(1 + \varepsilon^2/4)} \quad (6.5)$$

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon^2}{4\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \quad k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon^2}{4\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$



Фиг. 3

Подставляя эти выражения в (6.2), получим следующую формулу для периода:

$$T = \frac{8\tau_0}{3C}, \quad \tau_0(\epsilon) = 2 \frac{(1 + \epsilon^2/4)^{1/2}}{(1 + \epsilon^2)^{1/4}} K(k) \quad (6.6)$$

Зависимость $\tau_0(\epsilon)$ изображена на фиг. 3 сплошной линией. При изменении аргумента ϵ в интервале $0 < \epsilon \leq 2\sqrt{2}$ аргумент k меняется от 1 до 0. Значению $\epsilon = 2\sqrt{2}$ соответствует значение $k=0$ и минимальное значение $\tau_0 = \pi$. Этому значению соответствует период T_0 в точке минимума потенциальной энергии (5.1).

При дальнейшем увеличении ϵ величина k^2 становится отрицательной и формула (6.6) становится неприменимой. Однако для нее можно найти другую с помощью следующих рассуждений. Из уравнения (6.1) следует, что величина $\eta(\tau)$ меняется между двумя крайними значениями $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$, определяемых из (6.5). Этим значениям соответствует начальное состояние покоя и один и тот же уровень энергии E . Следовательно, двум равным значениям:

$$\eta_0 = \frac{\tilde{\epsilon}^2}{4(1 + \tilde{\epsilon}^2/4)} = \eta_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{2(1 + \epsilon^2/4)} \quad (6.7)$$

соответствуют два разных значения $\epsilon < 2\sqrt{2}$ и $\tilde{\epsilon} > 2\sqrt{2}$, с равными периодами $\tau_0(\epsilon) = \tau_0(\tilde{\epsilon})$.

Разрешая уравнение (6.7) относительно $\tilde{\epsilon}$, получим $\tilde{\epsilon} = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{1 + \epsilon^2})^{3/2}\epsilon^{-2}$. Отсюда для функции $\tau_0(\epsilon)$ имеем следующее тождество

$$\tau_0(\epsilon) = \tau_0(2\sqrt{2}(1 + \sqrt{1 + \epsilon^2})^{3/2}\epsilon^{-2}) \quad (6.8)$$

При $\epsilon > 2\sqrt{2}$ период τ_0 следует вычислять по той же формуле (6.6) с измененным аргументом $\tilde{\epsilon} < 2\sqrt{2}$.

С помощью зависимости (6.5) для $k(\epsilon)$ и асимптотики для $K(k)$ нетрудно получить следующее асимптотическое разложение для периода при $\epsilon = |y_0/x_0| \ll 1$:

$$\tau_0(\epsilon) = \ln(32/\epsilon^2) + (3/8)\epsilon^2 + (3/256)(-17 + 5\ln(32/\epsilon^2))\epsilon^4 + O(\epsilon^6 \ln \epsilon) \quad (6.9)$$

Если же отношение $\varepsilon = y_0/x_0$ велико, то асимптотическое разложение можно получить с помощью подстановки $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon}(\varepsilon)$ в (6.9):

$$\tau_0(\varepsilon) = \ln(4\varepsilon) + \frac{15(\ln(4\varepsilon) - 1)}{4\varepsilon^2} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right) \quad (6.10)$$

Обе асимптотики (6.9) и (6.10) изображены на фиг. 3. штриховыми линиями: первая при $y_0/x_0 < 2\sqrt{2}$, а вторая при $y_0/x_0 > 2\sqrt{2}$. Как видно из фигуры небольшое отличие их от точного выражения имеется лишь в окрестности точки минимума. Главный член разложения (6.9) согласуется с асимптотикой для периода, найденного в работе [14]. Следует отметить, что разложение (6.9) плохо сходится в окрестности точки минимума. Существенно точнее разложение по параметру $k' < 1$ в (6.4). Это разложение при $\varepsilon < 2\sqrt{2}$ и воспроизведено на фиг. 3. штриховой линией.

При стремлении отношения y_0/x_0 к нулю или бесконечности период T стремится к бесконечности. В этом пределе получим неперiodическое решение, соответствующее $E = 0$, которое назовем сепаратрисой. Ниже получены решения для сепаратрисы и периодические решения вблизи сепаратрисы.

7. Процесс срыва вертикальных колебаний. В пределе $E \rightarrow 0$ уравнение (6.1) имеет точное решение $\eta = \text{sech}^2(\tau)$, откуда находим

$$|z_1| = (C/\sqrt{2})\text{th}(\tau), \quad |z_2| = C\text{sech}(\tau), \quad \tau = (3/8)Ct \quad (7.1)$$

Это решение реализуется, если отклонить маятник от положения равновесия строго по вертикали и затем отпустить его. Возникнувшие колебания по вертикали, как показано в [14], будут неустойчивыми по отношению к любому малому возмущению по горизонтали. Неустойчивость приведет к возбуждению колебаний маятника по горизонтали. Это явление в [14] названо процессом срыва вертикальных и исследуется на восьми страницах текста. Предлагаемый метод существенно упрощает решение этой задачи. При малом возмущении по горизонтали будет происходить периодический процесс попеременной перекачки энергии от одной моды к другой и его можно описать с помощью элементарных функций более детально и с большой точностью.

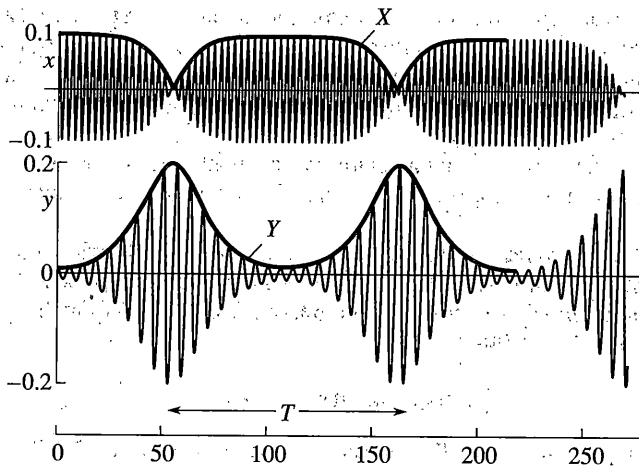
Рассмотрим решение задачи о колебаниях в резонансе при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, причем будем предполагать, что $y_0 \ll x_0$. Тогда решение полных уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + \bar{F}_1$ находится по теореме Журавлева В.Ф. и представляется в виде колебаний с собственными частотами 2 и 1 и медленно меняющимися амплитудами $X(t)$ и $Y(t)$ с периодом T :

$$x = X(t)\cos 2t, \quad y = Y(t)\cos t$$

Огибающие $X(t)$ и $Y(t)$ для колебаний по вертикали $x(t)$ и горизонтали $y(t)$ можно представить суммой солитонов отстоящих друг от друга на период τ_0 :

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0(|\text{th}(\tau - \tau_0/2)| + |\text{th}(\tau - 3\tau_0/2)| - 1) \\ Y(t) &= 2x_0(\text{sech}(\tau - (1/2)\tau_0) + \text{sech}(\tau - (3/2)\tau_0)), \quad \tau = (3/4)x_0t \end{aligned} \quad (7.2)$$

На фиг. 4 представлено сравнение численного решения при $x_0 = 0.1$ и $y_0 = 0.01$ уравнений колебаний маятника с приведенным аналитическим решением. Жирными линиями изображены аналитические функции, рассчитанные по формулам (7.2). Сравнение показывает хорошее согласие аналитических выражений формы модуляции (7.2) и периода попеременной перекачки энергии от одной моды к другой с численными расчетами.



Фиг. 4

С помощью асимптотической формулы (6.9) находим $\tau_0 = 8.075$; $C = 0.20025$; $T = 8\tau_0/(3C) \approx 107.5$. Численные расчеты исходных уравнений, представленные на фиг. 4, дают для периода близкое значение – $T \approx 108$.

Решения (7.1) и (7.2) в [14] отсутствуют и, по-видимому, являются новым результатом, также как и решения вблизи периодического (5.2) и формулы для периода модуляции (6.3), (6.9), (6.10).

Полученное решение описывает также и процесс срыва горизонтальных колебаний маятника. Они также неустойчивы и переходят в колебания по вертикали.

8. О преимуществах метода инвариантной нормализации гамильтонианов. Этот вопрос уже обсуждался автором метода инвариантной нормализации [8], а также в [11]. Ввиду важности осветим его еще раз на примере полученных результатов.

Несмотря на то, что классический метод нормальной формы восходит к работам Пуанкаре и Биркгофа и имеет более чем вековую историю, он не часто используется специалистами по нелинейным колебаниям. Объясняется это большим количеством преобразований, которые требуется найти для построения нормальной формы. При классическом подходе алгоритмы построения нормальной формы, описанные, например, в [16, 17], также требуют достаточно больших усилий для его освоения. Кроме того, классические алгоритмы существенно отличаются для резонансного и нерезонансного случая, автономной и неавтономной систем. При исследовании нелинейных колебаний специалисты вынуждены пользоваться готовым комплексом программ, не вникая в детали, входящих в них алгоритмов, или исследовать нелинейные колебания другими методами. Так зачастую и поступают специалисты при исследовании например, колебаний качающейся пружины [13–15].

В данном подходе такая трудность снимается. Нормальную форму (3.2) можно найти вручную, не пользуясь компьютером. Описанный же выше алгоритм легко программируется в любой системе аналитического программирования, например, “Maple” или “Mathematica” и годится сразу для всех случаев: резонансный, нерезонансный, автономный, неавтономный.

Анализ системы с помощью нормальной формы имеет также неоспоримые преимущества перед другими методами, например методом Ляпунова: нормальная форма сразу имеет 2 первых интеграла, а третий легко находится, что позволяет найти полный инте-

грал системы; с помощью найденных интегралов легко конструируется функция Ляпунова, что значительно облегчает решение задачи устойчивости периодических решений; метод инвариантной нормализации интересен с методической точки зрения. Чтобы объяснить его студентам на курсе теоретической механики, достаточно одной лекции или одного практического занятия.

Все полученные выше решения наглядно показывают все перечисленные преимущества метода инвариантной нормализации перед устоявшимся классическим методом нормальной формы.

Автор выражает благодарность В.Ф. Журавлеву и Ю.Г. Мартыненко за замечания и обсуждение результатов, а также Д.М. Климову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00403).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Избранные труды. В трех томах. Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
2. Биркгоф Д.Д. Динамические системы. М., Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
3. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.; "Эдиториал УРСС", 2000. 408 с.
5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
6. Арнольд В.И., Козлов В.В., Неиштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997, 320 с.
8. Журавлев В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем. // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365.
9. Петров А.Г. Параметрический метод построения отображений Пуанкаре в гидродинамических системах // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 948–967.
10. Петров А.Г. Модификация метода инвариантной нормализации гамильтонианов с помощью параметризации канонических преобразований // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 4. С. 482–486.
11. Петров А.Г. Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 402–413.
12. Заринов М.Н., Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 3. С. 347–352.
13. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. N. Y.: Wiley, 1973. = Найфе А.Х. Методы теории возмущений. М.: Мир, 1976. 535 с.
14. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.
15. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.
16. Mersman W.A. A new algorithm for the lie transformation // Celest. Mech. 1970. V. 3. № 1. P. 81–89.
17. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем: Препринт № 31. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1976. 61 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.06.2005