

УДК 539.375

© 2006 г. В.В. ГЛАГОЛЕВ, А.А. МАРКИН

ОЦЕНКА ТОЛЩИНЫ СЛОЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАК УНИВЕРСАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА МАТЕРИАЛА

Рассматривается модель процесса разрушения, основанная на концепции слоя взаимодействия [1]. Приводятся системы уравнений, позволяющие по непосредственным измерениям значений критической силы и перемещения в экспериментах на ДКБ-образцах с учетом пластических свойств слоя взаимодействия определить его толщину δ_0 . В отсутствие прямых экспериментальных данных по испытаниям ДКБ-образцов получена оценка δ_0 через вязкость разрушения K_{IC} [2] и известные характеристики материала.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двухконсольную балку (ДКБ-образец) с физическим разрезом равным толщине слоя взаимодействия δ_0 (фиг. 1). Начало неподвижной декартовой системы координат поместим в конце разреза. Берега разреза нагружены сосредоточенной силой P на расстоянии a от начала координат.

Необходимо определить критическое значение расклинивающего усилия P_k , соответствующее началу образования новых поверхностей и эпюры напряжений, отражающие взаимодействие между берегами слоя и консолями в критическом состоянии. В силу того, что учет стадии разупрочнения не существенно влияет на значение расклинивающего усилия [1] считаем, что в момент образования новых поверхностей материал слоя взаимодействия $O'K'K'O''$ (фиг. 1) деформируется устойчиво в смысле Дракера. Вне слоя взаимодействия среда полагается упругой, а перемещения точек K' и K'' считаются нулевыми.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю консоль ($x_1 \geq \delta_0/2$), а ее взаимодействие со слоем заменим искомой нагрузкой $q(x_2)$ (фиг. 2).

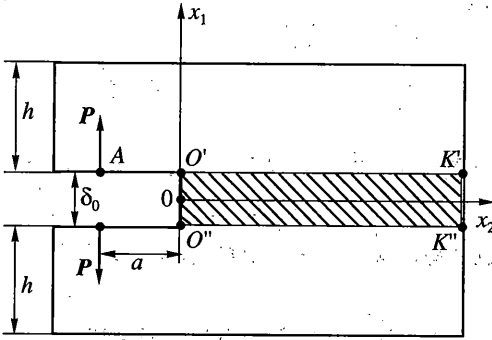
При дальнейшем изложении ограничимся случаем малых деформаций, обусловленных малостью компонент тензора-градиента вектора перемещения. В этом случае вектор внешней нагрузки на участке консоли, граничащим со слоем взаимодействия, равен

$$q(x_2) = n \cdot S \quad (1.1)$$

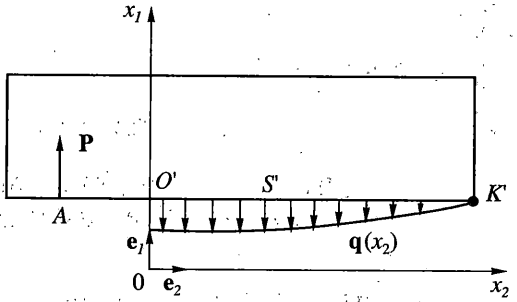
где S – тензор напряжений, $n = -e_1$ – вектор внешней нормали к поверхности консоли. С учетом напряженного состояния слоя взаимодействия [1] из (1.1) получим

$$q(x_2) = -S_1 e_1 \quad (1.2)$$

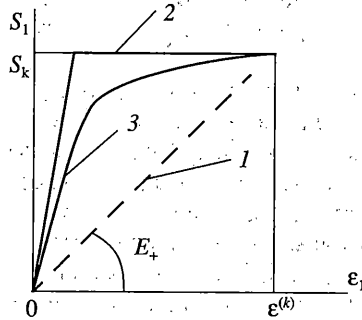
Поведение материала слоя взаимодействия рассмотрим в рамках линейной аппроксимации, полагая $S = E_+ \epsilon$, где $E_+ = S_k/\epsilon^{(k)}$ (кривая 1, фиг. 3), так и в рамках идеально упругопластической модели [3] (кривая 2, фиг. 3). Реальные свойства материала при растяжении представлены кривой 3 (фиг. 3). При использовании концепции постоянного секущего модуля принимаем $E_+ = S_k/\epsilon^{(k)}$ (фиг. 3).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В силу малости деформаций и однородности деформируемого состояния слоя взаимодействия запишем выражение компоненты линейного тензора деформаций.

$$\varepsilon_1 = 2u_1(x_1)/\delta_0 \quad (1.3)$$

где $u_1(x_2)$ – перемещение границы слоя взаимодействия ($x_1 = \delta_0/2$) в направлении оси Ox_1 .

Из определяющих соотношений [1] и (1.3) запишем связь между внешней нагрузкой и компонентой перемещения для модели с линейным поведением:

$$q(x) = -\frac{2E_+}{\delta_0}u(x), \quad O' \leq x \leq K' \quad (1.4)$$

и идеально упругопластической модели

$$q(x) = \begin{cases} q^I(x) = -\frac{2E}{\delta_0}u(x), & S' \leq x \leq K' \\ q^{II}(x) = -S_k, & O' \leq x \leq S' \end{cases} \quad (1.5)$$

где E – модуль Юнга материала, S_k – предел текучести, $[O'S'] = l_p$ – длина участка пластического деформирования (фиг. 2), здесь и далее $x \equiv x_2$, $u(x) \equiv u_1(x)$.

Поведение каждой консоли вне слоя взаимодействия будем описывать соотношениями теории Кирхгоффа – Лява. Уравнения изгиба для каждого из участков с учетом (1.4) в случае линейной модели имеют вид

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= P(a+x) \quad \text{для } AO' \\ D \frac{d^4 u(x)}{dx^4} &= -\frac{2E_+}{\delta_0} u(x) \quad \text{для } O'K' \end{aligned} \quad (1.6)$$

В рамках идеальной упругопластической модели, с учетом (1.5) получаем

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= P(a+x) \quad \text{для } AO' \\ D \frac{d^4 u(x)}{dx^4} &= -S_k \quad \text{для } O'S' \\ D \frac{d^4 u(x)}{dx^4} &= -\frac{2E}{\delta_0} u(x) \quad \text{для } S'K' \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $D = E \cdot h^3/12$ – жесткость полосы единичной толщины, E – модуль Юнга материала консоли.

Интегрируя уравнения (1.6) и (1.7) с учетом условия затухания перемещений в точке K' , получаем выражения для поля перемещений в рамках линейной модели:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{P}{6D}(a+x)^3 + k_1 x + k_2 \quad \text{для } AO' \\ u(x) &= e^{-Rx}(L_1 \cos(Rx) + L_2 \sin(Rx)) \quad \text{для } O'K' \end{aligned} \quad (1.8)$$

и в рамках идеальной упругопластической модели:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{P}{6D}(a+x)^3 + k_1 x + k_2 \quad \text{для } AO' \\ u(x) &= \frac{-S_k x^4}{24D} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad \text{для } O'S' \\ u(x) &= e^{-R_1 x}(L_1 \cos(R_1 x) + L_2 \sin(R_1 x)) \quad \text{для } O'K' \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{E_+}{2D\delta_0}}, \quad R_1 = \sqrt[4]{\frac{E}{2D\delta_0}}$$

2. Анализ решения в рамках линейной модели. Рассмотрим момент образования новых поверхностей, когда перемещение в вершине разреза на границе консоли принимает значение $u_k = \varepsilon^{(k)}\delta_0/2$, в точке приложения сосредоточенной силы u_k^A , а расклинивающее усилие P_k . Пусть из эксперимента известно значение u_k^A и соответствующее ему P_k . В системе (1.8) для определения постоянных интегрирования k_1, k_2, L_1, L_2 , и значения толщины слоя взаимодействия δ_0 запишем условия непрерывности перемещения $u(x)$, угла поворота $u'(x)$, изгибающего момента $Du''(x)$ и перерезывающей силы $Du'''(x)$ в точке O' ($x=0$). Учитывая, что при достижении расклинивающей силой P сво-

его критического значения P_k перемещение в точке A достигнет значения u_k^A , получаем систему пяти нелинейных относительно k_1, k_2, L_1, L_2 и $R(\delta_0)$ уравнений:

$$\begin{aligned} P_k a^3 / (6D) + k_2 &= L_1 \\ P_k a^2 / (2D) + k_1 &= R(L_2 - L_1) \\ P_k a / D &= -2R^2 L_2 \\ P_k / D &= 2R^3 (L_1 + L_2) \\ -k_1 a + k_2 &= u_k^A \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим возможные оценки толщины слоя взаимодействия путем использования зависимости между критическими значениями силы P_k и перемещением точки ее приложения. Из линейности описания следует, что эта зависимость имеет вид

$$\Delta_A^k = \lambda P_k$$

где λ – податливость образца.

Для определения податливости в рамках модели секущего модуля изменим систему (2.1), записав последнее уравнение для величины критического перемещения в точке O' :

$$\begin{aligned} P_k a^3 / (6D) + k_2 &= L_1 \\ P_k a^2 / (2D) + k_1 &= R(L_2 - L_1) \\ P_k a / D &= -2R^2 L_2 \\ P_k / D &= 2R^3 (L_1 + L_2) \\ P_k a^3 / (6D) + k_2 &= u_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система линейна относительно постоянных интегрирования k_1, k_2, L_1, L_2 и критической силы P_k . Решая (2.2), находим

$$k_1 = -R(Ra + 1)u_k, \quad k_2 = -\frac{u_k}{3} \left(\frac{R^3 a^3 - 3Ra - 3}{Ra + 1} \right) \quad (2.3)$$

$$L_1 = u_k, \quad L_2 = -\frac{Ra}{Ra + 1} u_k \quad (2.4)$$

$$P_k = \frac{2R^3 D}{Ra + 1} u_k \quad (2.5)$$

Исходя из полученного решения, определим податливость λ рассматриваемой модели. Согласно решению (1.8), (2.3) полное смещение представим в виде

$$\Delta_A^k = 2u_A = 2 \left(\frac{a^3}{3D} + \frac{a^2}{RD} + \frac{a}{R^2 D} + \frac{1}{2R^3 D} \right) P_k \quad (2.6)$$

Таким образом, получим

$$\lambda = 2 \left(\frac{a^3}{3D} + \frac{a^2}{RD} + \frac{a}{R^2 D} + \frac{1}{2R^3 D} \right) \quad (2.7)$$

Из выражения (2.7) следует, что податливость ДКБ-образца зависит через параметр R от толщины слоя взаимодействия δ_0 .

Пусть для известного значения плеча a известна податливость образца $\lambda(a)$. Тогда выражение (2.7) можно непосредственно использовать для определения толщины слоя взаимодействия из уравнения относительно δ_0 , получаемого из (2.7):

$$\lambda(a)D = 2\left(a^3/3 + a^2\mu + a\mu^2 + \frac{\mu^3}{2}\right) \quad (2.8)$$

где параметр $\mu = R^{-1} = \sqrt[4]{h^3 \delta_0 E / (6E_+)}$ имеет размерность длины.

Запишем (2.8) в безразмерном виде, отнеся величины с размерностью длины к высоте h :

$$\frac{\lambda(a)E}{24} = \left(\frac{\tilde{a}^3}{3} + \tilde{a}^2\tilde{\mu} + \tilde{a}\tilde{\mu}^2 + \frac{\tilde{\mu}^3}{2}\right) \quad (2.9)$$

где $\tilde{\mu} = \sqrt[4]{\frac{\delta_0 E}{6E_+}}$, $\tilde{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{h}$ – безразмерная толщина слоя взаимодействия.

Из (2.9) по известным значениям λ , E , E_+ , h , a определяется параметр $\tilde{\mu}$, а затем δ_0 .

Рассмотрим возможность косвенной оценки толщины слоя, исходя из того, что известна вязкость разрушения материала ДКБ-образца K_{IC} .

Поток энергии G в вершину трещины (формула податливости Ирвина) может быть определен в форме [4]:

$$G = \frac{1}{2}P^2 \frac{d\lambda}{da} \quad (2.10)$$

Из (2.7) и (2.10) находим

$$G = \frac{P^2(1+aR)^2}{R^2D} \quad (2.11)$$

Будем предполагать, что поток энергии в виде (2.11) эквивалентен потоку упругой энергии в вершину трещины модели линейной механики разрушения [2], который связан с коэффициентом интенсивности напряжений соотношением

$$K = \sqrt{EG} \quad (2.12)$$

Для данной схемы нагружения из (2.11) и (2.12) имеем

$$K = \frac{P(1+aR)}{R} \sqrt{\frac{E}{D}} \quad (2.13)$$

Отметим, что при выполнении условия $aR \gg 1$ (что соответствует $a \gg h$ при $E_+ \approx E$) формула (2.13) совпадает с коэффициентом интенсивности напряжений ДКБ-образца [4]:

$$K = \frac{2\sqrt{3}Pa}{h^{3/2}}$$

Для критического состояния из (2.5) с учетом (2.13) запишем

$$u_k = \frac{(Ra+1)P_k}{2R^3D} = \frac{K_{IC}\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{2EE_+}} \quad (2.14)$$

С учетом $u_k = 0.5\delta_0\epsilon^{(k)}$, $S_k = E_+\epsilon^{(k)}$ из (2.14) получаем оценку для толщины слоя взаимодействия

$$\delta_0 = \frac{2K_{IC}^2}{S_k E \epsilon^{(k)}} \quad (2.15)$$

где S_k – напряжение разрушения, $\epsilon^{(k)}$ – соответствующая S_k деформация, E – модуль Юнга.

К аналогичному результату можно прийти, если рассмотреть физическую сущность слоя взаимодействия – как слоя свободная энергия которого, пройдя стадию разупрочнения, переходит в поверхностную [5]. Пусть разрез получил бесконечно малое приращение α . Свободную энергию W на данном объеме можно определить как работу сил $q(x)dx$ (1.4), действующих на слой взаимодействия, на перемещениях $u(x)$:

$$W = \int_0^\alpha \frac{2E_+}{\delta_0} u^2(x) dx \quad (2.16)$$

Так как энергия (2.16) перейдет в поверхностную, запишем следующее равенство:

$$2\gamma\alpha = W$$

где γ – удельная (отнесенная к единице образуемой поверхности) поверхностная энергия, откуда, устремляя α к нулю, получим

$$2\gamma = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{2E_+}{\delta_0} u^2(x) dx \quad (2.17)$$

Подстановка решения (1.8) для участка $O'K'$ в (2.17) приводит к определению следующих выражений:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{2E_+}{\delta_0} L_1^2 e^{-2Rx} \cos^2(Rx) dx = \frac{2E_+ L_1^2}{\delta_0} \quad (2.18)$$

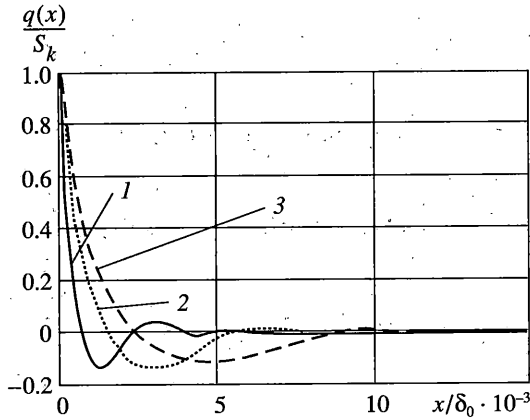
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{4E_+}{\delta_0} L_1 L_2 e^{-2Rx} \cos(Rx) \sin(Rx) dx = 0 \quad (2.19)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{2E_+}{\delta_0} L_2^2 e^{-2Rx} \sin^2(Rx) dx = 0 \quad (2.20)$$

Полагая $2\gamma = G$ с использованием (2.4), (2.12) из (2.17)–(2.20) приходим к выражению (2.15).

Основываясь на результатах работы [6] в таблице приведем механические характеристики ряда сталей и соответствующие им значения толщины слоя взаимодействия δ_0 , получаемые по формуле (2.17), в рамках модели секущего модуля.

Для анализа количественных результатов был проведен расчет со следующими значениями геометрических и физических параметров материала: $\delta_0 = 10^{-6}$ м, $a = 10^5 \delta_0$, $h = 10^4 \delta_0$, $S_k = 600$ МПа, $E = E_+ = 200000$ МПа. На фиг. 4 произведено сравнение эпюр напряжения, получаемых для разных значений секущего модуля (соответственно разных $\epsilon^{(k)}$ при постоянном S_k). При уменьшении модуля E_+ зависимости $u(x)$ и $q(x)$ имеют



Фиг. 4

менее выраженную амплитуду относительно оси Ox , а падение поля перемещений и напряжений при этом происходит быстрее для более хрупких материалов. График (1) на фиг. 4 соответствует $E_+ = E$, графики (2) и (3) определены следующими модулями: $E_+ = E/10$ и $E_+ = E/100$.

3. Анализ решения в рамках идеально упругопластической модели. Для системы (1.8) в критическом состоянии запишем условия непрерывности перемещения $u(x)$, угла поворота $u'(x)$, изгибающего момента $Du''(x)$ и перерезывающей силы $Du'''(x)$ в точках O' ($x = 0$) и S' ($x = l_p$). При достижении расклинивающей силой критического значения P_k перемещение в точке O' достигнет значения $u_k = \epsilon^{(k)}\delta_0/2$, в S' — $u_0 = \epsilon^{(0)}\delta_0/2$, где $\epsilon^{(0)}$ — предел упругости по деформациям, а перемещение в точке A примет значение u_k^A .

Если известны экспериментальные данные критического состояния u_k^A и P_k , то решение следующей нелинейной системы уравнений:

$$\frac{P_k}{6D}a^3 + k_2 = C_4, \quad \frac{P_k}{2D}a^2 + k_1 = C_3$$

$$P_k a/D = 2C_2, \quad P_k/D = 6C_1$$

$$\frac{-S_k l_p^4}{24D} + C_1 l_p^3 + C_2 l_p^2 + C_3 l_p + C_4 = L_1 e^{-Rl_p} \cos Rl_p + S_2 e^{-Rl_p} \sin Rl_p$$

Марка стали	S_k , МПа	E , МПа	$\epsilon^{(k)}$	K_{IC} , МПа $\sqrt{м}$	δ_0 , 10^{-4} м
Ст. 3	900	210000	0.33	81	1
15Х2МФА	1500	220000	0.22	171.05	4
15Х2МНФА	1320	220000	0.22	163.27	4

$$\frac{-S_k l_p^3}{6D} + 3C_1 l_p^2 + 2C_2 l_p + C_3 = R e^{-Rl_p} [-L_1(\cos Rl_p + \sin Rl_p) + L_2(\cos Rl_p - \sin Rl_p)] \quad (3.1)$$

$$\frac{-S_k l_p^2}{2D} + 6C_1 l_p + 2C_2 = 2R^2 e^{-Rl_p} [L_1 \sin Rl_p - L_2 \cos Rl_p]$$

$$\frac{-S_k l_p}{D} + 6C_1 = 2R^3 e^{-Rl_p} [L_1(\cos Rl_p - \sin Rl_p) + L_2(\cos Rl_p + \sin Rl_p)]$$

$$\frac{-S_k l_p^4}{24D} + C_1 l_p^3 + C_2 l_p^2 + C_3 l_p + C_4 = \varepsilon^{(0)} \delta_0 / 2$$

$$k_2 - k_1 a = u_k^A$$

позволит определить наряду с постоянными интегрирования $k_1, k_2, L_1, L_2, C_1 - C_4$ толщину слоя взаимодействия δ_0 и длину зоны пластического деформирования l_p .

При заданной толщине слоя взаимодействия заменив в системе (3.1) последнее уравнение условием достижения критического перемещения в точке O $u_k = \varepsilon^{(k)} \delta_0 / 2$, получаем систему нелинейных уравнений для определения длины пластической зоны l_p , критического усилия P_k , а также постоянных интегрирования $k_1, k_2, L_1, L_2, C_1 - C_4$:

$$\frac{P_k a^3}{6D} + k_2 = C_4, \quad \frac{P_k a^2}{2D} + k_1 = C_3$$

$$P_k a / D = 2C_2, \quad P_k / D = 6C_1$$

$$\frac{-S_k l_p^4}{24D} + C_1 l_p^3 + C_2 l_p^2 + C_3 l_p + C_4 = L_1 e^{-Rl_p} \cos Rl_p + L_2 e^{-Rl_p} \sin Rl_p$$

$$\frac{-S_k l_p^3}{6D} + 3C_1 l_p^2 + 2C_2 l_p + C_3 = R e^{-Rl_p} [-L_1(\cos Rl_p + \sin Rl_p) + L_2(\cos Rl_p - \sin Rl_p)] \quad (3.2)$$

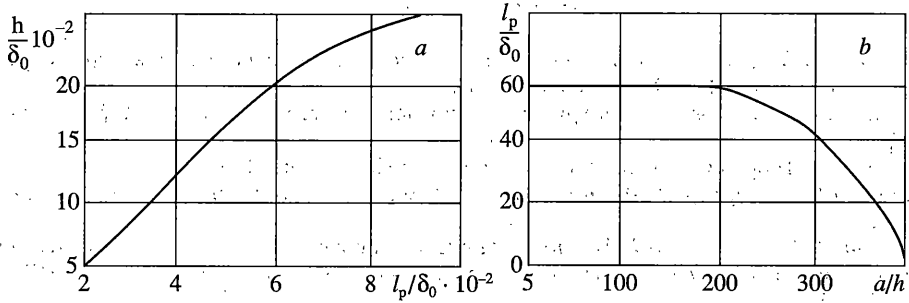
$$\frac{-S_k l_p^2}{2D} + 6C_1 l_p + 2C_2 = 2R^2 e^{-Rl_p} [L_1 \sin Rl_p - L_2 \cos Rl_p]$$

$$\frac{-S_k l_p}{D} + 6C_1 = 2R^3 e^{-Rl_p} [L_1(\cos Rl_p - \sin Rl_p) + L_2(\cos Rl_p + \sin Rl_p)]$$

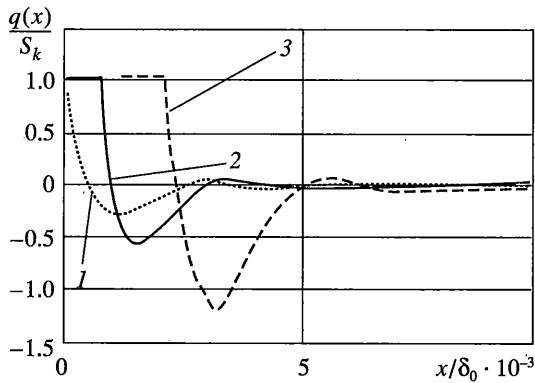
$$\frac{-S_k l_p^4}{24D} + C_1 l_p^3 + C_2 l_p^2 + C_3 l_p + C_4 = \varepsilon^{(0)} \delta_0 / 2$$

$$\frac{P_k a^3}{6D} + k_2 = \varepsilon^{(k)} \delta_0 / 2$$

На фиг. 5 для стали Ст. 3 рассмотрим влияние геометрических характеристик: высоты консоли и плеча сосредоточенной силы на расчетное значение длины пластической зоны l_p в рамках решения идеальной упругопластической модели. График на фиг. 5, а строился при следующем соотношении: $a = 10h$, а на фиг. 5, б – при $h = 100\delta_0$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Из анализа графиков видно, что высота консоли существенно влияет на длину пластической зоны взаимодействия, в случае варьирования плеча существует широкий диапазон, при котором l_p не меняется.

Сравнение эпюр напряжений, построенных при разных длинах площадки текучести, показывает, что при учете пластических свойств материала в виде (1.5) падение напряжения за пределом зоны пластичности происходит быстрее в менее жестких материалах (фиг. 6). График 1 на фиг. 6 соответствует $\epsilon^{(k)} = \epsilon^{(0)}$, $2 - \epsilon^{(k)} = 10\epsilon^{(0)}$, $3 - \epsilon^{(k)} = 100\epsilon^{(0)}$ для следующих геометрических и физических параметров материала: $\delta_0 = 10^{-6}$ м, $a = 10^5\delta_0$, $h = 10^4\delta_0$, $S_k = 600$ МПа, $E = 200000$ МПа, $\epsilon^{(0)} = 10^{-3}$.

В заключении, обратим внимание на то, что в рамках модели поведения слоя взаимодействия с постоянным секущим модулем получено выражение толщины слоя, в рамках балочного подхода к разрушению [6], через механические характеристики материала. Таким образом, толщина слоя в рассматриваемом подходе к разрушению, является механической характеристикой. Для более точного определения толщины слоя необходимо учитывать прямые экспериментальные данные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 04-01-96011 и № 06-01-00047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глаголев В.В., Кузнецов К.А., Маркин А.А.* Модель процесса разделения деформируемого тела // Изв. РАН. МТТ. № 6. 2003. С. 61–68.
2. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 415 с.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
5. *Маркин А.А., Глаголев В.В.* К выбору критерия направленного разделения упругопластических материалов // В кн.: Проблемы механики. Сб. статей. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 546–554.
6. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г.* Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций // Пробл. прочности. 1983. № 2. С. 6–10.

Тула

Поступила в редакцию
24.02.2004