МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 629.195.1

© 2006 г. И.И. КОСЕНКО, С.Я. СТЕПАНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ СВЯЗКИ С УЧЕТОМ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ. НЕОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА

Полностью решается пространственная задача об устойчивости положений относительного равновесия орбитальной связки. Задача рассматривается в неограниченной постановке. Материальные точки, составляющие связку, считаются соединенными гибким невесовым нерастяжимым тросом и независимо совершающими каждая кеплеровское движение, прерываемое время от времени выходом на связь. Связью является гибкий нерастяжимый невесомый трос постоянной длины.

Применяется редукция по Раусу и вычисляются положения относительного равновесия, соответствующие радиальному расположению троса. Проверяется условие натянутости связи, а также условия теоремы А.П. Иванова об устойчивости положения равновесия лангранжевой механической системы с неудерживающими связями.

1. Постановка задачи. Рассматривается свободный полет двух материальных точек M_0 (станция) и M_1 (субспутник) в поле сил гравитации неподвижного центра P (планета). Массы точек обозначим символами m_0 и m_1 соответственно. Точки M_0 и M_1 соединены гибким нерастяжимым невесомым тросом. Поэтому свободный полет время от времени может прерываться выходом на связь.

Для представления динамики механической системы воспользуемся описанием в рамках лагранжевой механики [1]. Фиксируем оси xyz, параллельные направлениям в инерциальной системе отсчета (“на неподвижные звезды”). Так что орбитальное движение связки точнее ее центра масс С будет описываться в системе координат $Pxyz$. Относительное же движение ОТС (орбитальной тросовой системы) будем описывать в системе координат M_0xyz, имеющей начало на станции. По теореме Кенига кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(m_0+m_1)V^2 + \frac{1}{2}\frac{m_0m_1}{m_0+m_1}v^2$$

$$V = \left|\frac{dPC}{dt}\right|, \quad v = \left|\frac{dM_0M_1}{dt}\right|$$

где V, v – скорости центра масс ОТС относительно $Pxyz$ и субспутника относительно M_0xyz.

Силовая функция имеет выражение

$$U = \frac{GMm_0}{\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma}} + \frac{GMm_1}{\sqrt{R^2+r_1^2+2Rr_1\cos\gamma}}$$

где γ – угол между векторами PC и M_0M_1 и $r_0 = |CM_0|$, $r_1 = |CM_1|$, $R = |PC|$, G – гравитационная постоянная, M – масса планеты. Выберем единицы измерения времени и массы так, чтобы выполнялись равенства $GM = 1$, $m_0 + m_1 = 1$. Единицы длины выберем позднее, в связи с вычислением положения относительного равновесия.

Вводя обозначения

$$\alpha = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \beta = \frac{m_0}{m_0 + m_1}$$

получим новые выражения для кинетической энергии и силовой функции

$$T = 1/2V^2 + 1/2\alpha\beta v^2$$

$$U = \frac{\beta}{\sqrt{R^2 + \alpha^2 r^2 - 2R\alpha r\cos\gamma}} + \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 + \beta^2 r^2 + 2R\beta r\cos\gamma}}$$

$$r = |M_0 M_1|$$

2. Вычисление положений относительного равновесия. Используем в дальнейшем инвариантность силовой функции U относительно всевозможных пространственных поворотов треугольника PM_0M_1 как твердого тела с неподвижной точкой P (инвариантность относительно группы SO (3)).

Будем предполагать выполнимость естественного для ОТС условия: суммарный вектор кинетического момента отличен от нуля. Направим инерциальную ось z вдоль этого вектора. Легко проверить, что он сохраняется во все время движения.

Используем инвариантность функции U относительно поворотов пространства вокруг оси Pz – подгруппы SO (3). Для этого введем сферические координаты при описании положения точки C в системе координат $Pxyz$ и точки M_1 – в M_0xyz. Именно, пусть Λ, Φ – долгота и широта центра масс C; λ, φ – долгота и широта субспутника такие, что справедливы формулы перехода

$$X = R\cos\Phi\cos\Lambda, \quad x = r\cos\varphi\cos\lambda,$$

$$Y = R\cos\Phi\sin\Lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda,$$

$$Z = R\sin\Phi, \quad z = r\sin\varphi,$$

$$PC = (X, Y, Z)^T, \quad M_0M_1 = (x, y, z)^T$$

Эти формулы сразу позволяют получить выражение для величины

$$\cos\gamma = \frac{(PC, M_0M_1)}{Rr} = \sin\Phi\sin\varphi + \cos\Phi\cos\varphi\cos(\lambda - \Lambda)$$

Так что силовая функция зависит от долгот λ и Λ только в виде разности и, значит, не изменится, если эти два угла изменить одновременно на одну и ту же величину.

Скорости в сферических координатах имеют известное представление

$$V^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 + (R^2\cos^2\Phi)\dot{\Lambda}^2, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + (r^2\cos^2\varphi)\dot{\lambda}^2$$

Для реализации редукции выполним замену обобщенных координат $(\Lambda, \lambda) \mapsto (\xi, \eta)$ по формулам $\xi = \lambda - \Lambda$, $\eta = \lambda/2 + \Lambda/2$. Аналогичные формулы свяжут обобщенные скорости. Остальные обобщенные координаты оставляем без изменения. Итак, функция Лагранжа задачи

$$L = T + U$$

не зависит от координаты η. Поэтому имеет место циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\eta} \equiv R^2\cos^2\Phi\left(\dot\eta-\frac{1}{2}\dot\xi\right)+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi\left(\dot\eta+\frac{1}{2}\dot\xi\right) = c$$

Исключим при помощи этого уравнения обобщенную скорость $\dot\eta$. Получим выражение

$$\dot\eta = \frac{c}{R^2\cos^2\Phi+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}\frac{R^2\cos^2\Phi-\alpha\beta r^2\cos^2\varphi}{R^2\cos^2\Phi+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi}\dot\xi$$

Теперь можно вычислить функцию Лагранжа для приведенной системы (функцию Рауса) по известной формуле [2]: $\Gamma = L - c\dot\eta$ так, что новое выражение для "новой" кинетической энергии $T - c\dot\eta$ будет содержать члены Θ_2 второй, Θ_1 первой и Θ_0 нулевой степени относительно обобщенных скоростей. Именно

$$T - c\dot\eta = \Theta_2+\Theta_1+\Theta_0$$

Функцию Рауса можно представить в традиционном для лагранжевой механики виде

$$\Gamma = \Theta+\Pi,\quad \Theta = \Theta_2+\Theta_1,\quad \Pi = \Theta_0+U$$

где функция П называется приведенным потенциалом.

Простое вычисление показывает, что

$$\Theta_0 = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{R^2\cos^2\Phi+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi}$$

Поэтому приведенный потенциал записывается в используемом всюду далее виде

$$\Pi = \frac{\beta}{\sqrt{R^2+\alpha^2r^2-2R\alpha r\cos\gamma}}+\frac{\alpha}{\sqrt{R^2+\beta^2r^2+2R\beta r\cos\gamma}}-\frac{1}{2}\frac{c^2}{R^2\cos^2\Phi+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi}$$

Имея в виду в дальнейшем применение теоремы А.П. Иванова [3] об устойчивости положения равновесия механической системы с односторонними связями (в данном случае вида $r \le l$) при проверке условий теоремы сначала будем полагать, что связь напряжена (трос натянут) и найдем положение равновесия по переменным R, Φ, φ, ξ в предположении постоянства величины r. Затем вычислим частную производную $\partial\Pi/\partial r$. Если эта величина положительна, то наложенная связь будет натянута и положение равновесия окажется физически реализуемым. Итак, считаем временно, что $r \equiv \mathrm{const}$.

Вычислим частные производные от приведенного потенциала

$$\frac{\partial\Pi}{\partial R} = -\frac{\beta(R-\alpha r\cos\gamma)}{(R^2+\alpha^2r^2-2R\alpha r\cos\gamma)^{3/2}}-\frac{\alpha(R+\beta r\cos\gamma)}{(R^2+\beta^2r^2+2R\beta r\cos\gamma)^{3/2}}+$$
$$+\frac{c^2R\cos^2\Phi}{(R^2\cos^2\Phi+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi)^2}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\Phi} = \alpha\beta RrA(R, r, \cos\gamma)\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\Phi}-\frac{c^2R^2\cos\Phi\sin\Phi}{(R^2\cos^2\Phi+\alpha\beta r^2\cos^2\varphi)^2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \alpha\beta RrA(R, r, \cos\gamma)\frac{\partial \cos\gamma}{\partial \varphi} - \frac{c^2\alpha\beta r^2\cos\varphi\sin\varphi}{(R^2\cos^2\Phi + \alpha\beta r^2\cos^2\varphi)^2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \alpha\beta RrA(R, r, \cos\gamma)\frac{\partial \cos\gamma}{\partial \xi}$$

$$A(R, r, \cos\gamma) = \frac{1}{(R^2 + \alpha^2 r^2 - 2R\alpha r\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 + \beta^2 r^2 + 2R\beta r\cos\gamma)^{3/2}}$$

Положение относительного равновесия вычисляется из системы уравнений

$$\partial\Pi/\partial R = \partial\Pi/\partial\Phi = \partial\Pi/\partial\varphi = \partial\Pi/\partial\xi = 0 \tag{2.1}$$

Обсудим прежде всего проблему реализуемости пространственной равновесной конфигурации ОТС. Сначала заметим, что в положении относительного равновесия центр масс C и материальные точки M_0, M_1 должны описывать круговые орбиты, лежащие в параллельных плоскостях и имеющие центры, лежащие на оси Pz.

Далее, конструкция ОТС такова, что не позволяет соединительному тросу не быть параллельным плоскости Pxy. В самом деле, в таком случае по крайней мере наиболее удаленная от этой плоскости точка не может находиться в относительном равновесии. Действительно, тогда главный вектор действующих на эту точку сил (гравитации и натяжения) будет иметь ненулевую z-составляющую, направленную в сторону плоскости Pxy, что противоречит предположению о круговом характере движения рассматриваемой точки в плоскости, параллельной Pxy.

Так что в состоянии относительного равновесия точки C, M_0 и M_1 описывают окружности, расположенные в одной плоскости, параллельной Pxy. Но тогда эта плоскость обязана совпасть с Pxy, поскольку z-составляющая главного вектора внешних для ОТС сил (только гравитации) не будет равна нулю и будет направлена к Pxy, что снова противоречит круговому движению точки C вне Pxy.

Из проведенного обсуждения сразу следует, что в положении относительного равновесия ОТС широтные углы – нулевые

$$\Phi = \varphi = 0 \tag{2.2}$$

Заметим, что в работе [4] построены положения относительного равновесия протяженного спутника, состоящего из двух материальных точек, соединенных прямолинейной пружиной, такие, что центр масс лежит вне плоскости Pxy. При этом, однако, пружина должна сопротивляться сжатию, что, конечно же, не соответствует случаю ОТС.

Из равенств (2.2) выводим тождественную выполнимость условий равновесия $\Pi_\Phi = \Pi_\varphi = 0$. Таким образом, последнее из условий (2.1) можно переписать в упрощенном виде

$$A(R, r, \cos\xi)\sin\xi = 0$$

Здесь считаем, что в общем положении $0 < \alpha \le 1/2$. Если $\alpha > 1/2$, то станцию и субспутник можно поменять ролями. Итак, при $\sin\xi = 0$ имеем два варианта (радиального) расположения троса $\xi = 0, \pi$.

Еще один случай последнего условия равновесия ($A(R, r, \cos\xi) = 0$) дает уравнение

$$R^2 + \alpha^2 r^2 - 2R\alpha r\cos\xi = R^2 + \beta^2 r^2 + 2R\beta r\cos\xi$$

Упрощая, получим условие

$$\cos\xi = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{r}{R}$$

из которого, считая что выполнено условие

$$-1 < -\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{r}{R} \le 0$$

получаем два решения

$$\xi = \pm\arccos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{r}{R}\right)$$

Заметим, что, как станет ясно ниже, в пределе, когда $(1/2 - \alpha)r/R \to 1$, субспутник должен оказаться со станцией по разные стороны от планеты. Этот случай, как нереализуемый, рассматриваться не будет.

В итоге получено семейство равновесных конфигураций ОТС, расположенных трансверсально в плоскости орбиты центра масс. Эти решения также рассматриваться не будут, так как известно [5, 6], что они неустойчивы. По крайней мере в предельном случае, соответствующем нулевому значению параметра α – безразмерной массе субспутника.

Легко понять характер движения M_0, M_1 и природу неустойчивости и схода со связи. В этом деле, условие $A(R, r, \cos\xi) = 0$ эквивалентно условию $R_0 = R_1$, означающему, что станция и субспутник движутся по одной круговой орбите вдогонку друг за другом. Эти орбиты являются кеплеровыми. Поэтому натяжение троса отсутствует. В возмущенном движении субспутник или станция могут начать кеплеров "дрейф" с опережением или отставанием от невозмущенного (равновесного) движения. Например, когда субспутник движется "впереди" M_0, его слабое смещение во внешнюю к исходной орбите сторону (в плоскости этой орбиты) может привести к "отставанию" (по крайней мере по долготе) от невозмущенного движения и сближению с M_0, что означает сход ОТС со связи.

Осталось найти радиус равновесной орбиты. Это можно сделать из уравнения $\partial\Pi/\partial R = 0$, которое с учетом полученных результатов имеет вид

$$\frac{\beta}{(R \mp \alpha r)^2} + \frac{\alpha}{(R \pm \beta r)^2} - \frac{c^2 R}{(R^2 + \alpha\beta r^2)^2} = 0$$

Фиксируя любое допустимое значение параметра $\varepsilon = r/R$, характеризующего относительную длину троса, последнее уравнение можно преобразовать к форме

$$\frac{\beta}{(1 \mp \alpha\varepsilon)^2} + \frac{\alpha}{(1 \pm \beta\varepsilon)^2} = \frac{c^2}{R}\frac{1}{(1 + \alpha\beta\varepsilon^2)^2}$$

из которой видно, что при любом фиксированном c имеется единственный R, удовлетворяющий условию равновесия. Однако с вычислительной точки зрения в качестве независимого параметра удобнее задать радиус равновесной орбиты, а соответствующее значение интеграла c вычислять из условия стационарности.

Теперь наступил момент выбора подходящей единицы измерения длины. Сделаем это так, чтобы на стационарной орбите выполнялось условие $R = 1$. Тогда значение циклического интеграла вычисляется по формуле

$$c = (1 + \alpha\beta r^2)\left[\frac{\beta}{(1 \mp \alpha r)^2} + \frac{\alpha}{(1 \pm \beta r)^2}\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

где теперь длина связки r является независимым параметром задачи (вместо прежнего параметра ε). Видно, что для двух различных вертикальных конфигураций значения интеграла площадей различны.

Из предыдущего следует, что найденные решения

$$(R, \Phi, \varphi, \xi) = \left(1, 0, 0, \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix}\right)$$

являются изолированными положениями относительного равновесия ОТС при натянутом тросе.

Для придания смысла дальнейшему исследованию устойчивости проверим реализуемость найденных радиальных положений относительного равновесия с учетом одностороннего характера тросовой связи. Для этого нужно вычислить силу натяжения по формуле

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \pm\alpha\beta\left[\frac{1 \pm \beta r}{(1 \mp \alpha r)^2} - \frac{1 \mp \alpha r}{(1 \pm \beta r)^2}\right]$$

При обоих вариантах комбинаций знаков получившаяся величина положительна. Следовательно, при всех допустимых длинах троса соответствующая односторонняя связь в рассматриваемых положениях равновесия будет напряжена.

3. Устойчивость. При применении теоремы А.П. Иванова нужно убедиться в наличии локального максимума приведенного потенциала Π по обобщенным координатам при фиксированной достаточно малой величине r. Это дает достаточное условие устойчивости положения равновесия. Для решения задачи следует вычислить в найденной точке матрицу Гесса от функции Π по переменным R, Φ, φ, ξ.

Ранее найденные формулы для частных производных первого порядка от Π позволяют убедиться, что в точке равновесия смешанные производные

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial R} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi \partial R} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Phi \partial \xi} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \xi} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Phi \partial R} = 0$$

кроме одной

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \Phi} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Phi \partial \varphi} = \alpha\beta R r A(R, r, \cos\xi)$$

С учетом полученного ранее выражения (2.3) для величины c вычислим другие вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2} = -\left[\alpha\frac{1 \pm 3\beta r - 3\alpha\beta r^2 \mp \alpha\beta^2 r^3}{(1 \pm \beta r)^3(1 + \alpha\beta r^2)} + \beta\frac{1 \mp 3\alpha r - 3\alpha\beta r^2 \pm \alpha^2\beta r^3}{(1 \mp \alpha r)^3(1 + \alpha\beta r^2)}\right]$$

Далее

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Phi^2} = -\left[\frac{\alpha}{(1 \pm \beta r)^3} + \frac{\beta}{(1 \mp \alpha r)^3}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \mp\alpha\beta r\left[\frac{1}{(1 \mp \alpha r)^3} - \frac{1}{(1 \pm \beta r)^3}\right] - \alpha\beta r^2\left[\frac{\alpha}{(1 \pm \beta r)^2} + \frac{\beta}{(1 \mp \alpha r)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} = \mp\alpha\beta r\left[\frac{1}{(1 \mp \alpha r)^3} - \frac{1}{(1 \pm \beta r)^3}\right]$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi\partial\Phi} = \alpha\beta r\left[\frac{1}{(1\mp\alpha r)^3} - \frac{1}{(1\pm\beta r)^3}\right]$$

Для исследования условий отрицательной определенности матрицы Гесса функции П с аналитической точки зрения удобнее перейти к новому параметру $r \in \mathbf{R}$. Тогда все вычисленные производные можно выразить через этот параметр, учитывая, что $1 + \beta r$ задает положение субспутника в радиальной конфигурации относительного равновесия, а $1 - \alpha r$ – станции. Заметим, что случаю $\xi = 0$ соответствует случай $r > 0$, а случаю $\xi = \pi$ – случай $r < 0$.

Итак, имеем выражения для ненулевых элементов матрицы Гесса в положении радиального равновесия

$$\begin{aligned}
\Pi_{RR} &= -\frac{1}{1+\alpha\beta r^2}\left\{1 - \alpha\beta r^2\left[\frac{3+\beta r}{(1+\beta r)^3} + \frac{3-\alpha r}{(1-\alpha r)^3}\right]\right\}\\
\Pi_{\Phi\Phi} &= -\left[\frac{\alpha}{(1+\beta r)^3} + \frac{\beta}{(1-\alpha r)^3}\right]\\
\Pi_{\varphi\varphi} &= \alpha\beta r\left[\frac{1}{(1+\beta r)^3} - \frac{1}{(1-\alpha r)^3}\right] - \alpha\beta r^2\left[\frac{\alpha}{(1+\beta r)^2} + \frac{\beta}{(1-\alpha r)^2}\right]\\
\Pi_{\xi\xi} &= \alpha\beta r\left[\frac{1}{(1+\beta r)^3} - \frac{1}{(1-\alpha r)^3}\right]\\
\Pi_{\varphi\Phi} &= -\alpha\beta r\left[\frac{1}{(1+\beta r)^3} - \frac{1}{(1-\alpha r)^3}\right]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Из последних формул видно, что допустимым диапазоном изменения переменной r будет интервал

$$r \in (r_{\min}, r_{\max}), \quad r_{\min} = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{1-\alpha}, \quad r_{\max} = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \tag{3.2}$$

Сначала исследуем поведение функции $\Pi_{RR}(r)$. Она будет отрицательна, если выражение в фигурных скобках положительно. Это возможно в точности тогда, когда выполнено неравенство

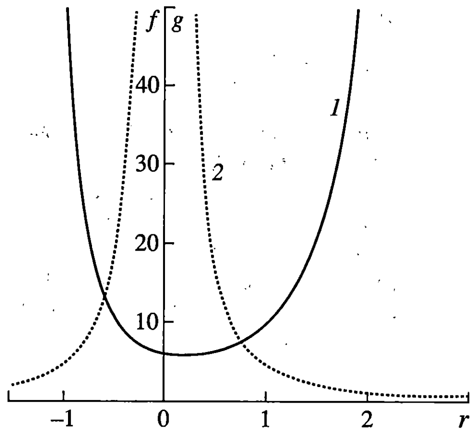
$$\frac{3+\beta r}{(1+\beta r)^3} + \frac{3-\alpha r}{(1-\alpha r)^3} < \frac{1}{\alpha\beta r^2} \tag{3.3}$$

Функции

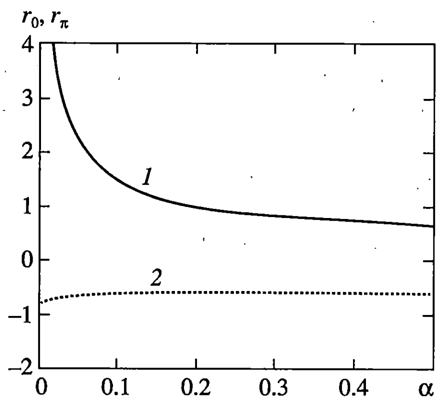
$$\begin{aligned}
\frac{3+\beta r}{(1+\beta r)^3} &= \frac{2}{(1+\beta r)^3} + \frac{1}{(1+\beta r)^2},\\
\frac{3-\alpha r}{(1-\alpha r)^3} &= \frac{2}{(1-\alpha r)^3} + \frac{1}{(1-\alpha r)^2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

выпуклы, поскольку каждое слагаемое здесь является выпуклой на интервале (3.2) функцией. Таким образом, левая и правая части неравенства (3.3) являются выпуклыми функциями от r. Используем для краткости временные обозначения

$$f(r) = \frac{3+\beta r}{(1+\beta r)^3} + \frac{3-\alpha r}{(1-\alpha r)^3}, \quad g(r) = \frac{1}{\alpha\beta r^2}.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Графики этих функций для случая $\alpha = 1/3$, соответствующего общему положению, показаны на фиг. 1 (кривые *1*, *2*). В окрестности точки $r = 0$ неравенство (3.3), очевидно, выполняется. В силу свойств выпуклости уравнение

$$f(r) = g(r) \tag{3.5}$$

имеет в точности два очевидных корня $r_0 \in (0, r_{max})$ и $r_\pi \in (r_{min}, 0)$, отвечающим равновесным значениям $\xi = 0, \pi$ соответственно. Корни $r_0(\alpha)$, $r_\pi(\alpha)$ построены численно при $\alpha \in (0, 1/2)$. Результаты показаны на фиг. 2 (кривые *1*, *2*).

В случае равных масс $\alpha = \beta = 1/2$ уравнение (3.5) после приведения дробей к общему знаменателю преобразуется к кубическому уравнению вида

$$y^3 - 9y^2 - 9y + 1 = 0$$

относительно величины $y = x^2$, где $x = r/2$. Прямой проверкой можно убедиться, что это уравнение имеет корень $y = 5 - 2\sqrt{6}$, что соответствует величинам

$$x = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \quad r_0 = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \quad r_\pi = -2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Это же значение

$$r_0 = -r_\pi = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2\sqrt{5-\sqrt{24}} = 0.63567449\ldots$$

согласующееся с результатами работы [7], дает числовой подсчет при $\alpha = 1/2$. Его полные результаты при $\alpha \in [0, 1/2]$ показаны на фиг. 2.

Нетрудно, далее, убедиться, что при $\alpha \to 0$, корни $r_0(\alpha) \to +\infty$, $r_\pi(\alpha) \to -1$. Действительно, рассматривая поведение функций (укажем явно зависимость также от параметра α) $f(r) = f(r, \alpha)$, $g(r) = g(r, \alpha)$ при фиксированном r из допустимого интервала, замечаем, что $g(r, \alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to 0$. Одновременно из разложений (3.4) очевидно, что в этой же точке r значения $f(r, \alpha)$ ограничены. Именно, в пределе получим

$$f(r,\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \frac{3+r}{(1+r)^3}+3$$

В то же время, поскольку $f(r, \alpha)$ по переменной r терпит разрыв второго рода при $r = -(1-\alpha)^{-1}$, α^{-1} (см. фиг. 1), то финально корень $r_0(\alpha)$ будет неограниченно удаляться вправо, а $r_\pi(\alpha)$ – сдвигаться влево, неограниченно сближаясь с левой точкой разрыва. Но в последнем случае из-за того, что точка $-(1-\alpha)^{-1} \to -1$ при $\alpha \to 0$, то и значение $r_\pi(\alpha) \to -1$.

Для проверки отрицательной определенности матрицы Гесса силовой функции П в соответствии с критерием Сильвестра необходимо еще убедиться в выполнимости неравенства

$$\Delta(r) = \Pi_{\Phi\Phi}\Pi_{\varphi\varphi}-\Pi^2_{\varphi\Phi}>0$$

С этой целью сначала проведем аналитические упрощения в формулах (3.1). Поскольку

$$\begin{aligned}&\alpha\beta r\left[\frac{1}{(1+\beta r)^3}-\frac{1}{(1-\alpha r)^3}\right] = \\ &= \left[\frac{\alpha}{(1+\beta r)^2}+\frac{\beta}{(1-\alpha r)^2}\right]-\left[\frac{\alpha}{(1+\beta r)^3}+\frac{\beta}{(1-\alpha r)^3}\right]\end{aligned} \tag{3.6}$$

то вводя для краткости временные обозначения

$$f(r) = \left[\frac{\alpha}{(1+\beta r)^3}+\frac{\beta}{(1-\alpha r)^3}\right], \quad g(r) = \left[\frac{\alpha}{(1+\beta r)^2}+\frac{\beta}{(1-\alpha r)^2}\right]$$

получим выражения для вторых производных

$$\Pi_{\Phi\Phi} = -f(r), \quad \Pi_{\varphi\varphi} = (1+\alpha\beta r^2)g(r)-f(r), \quad \Pi_{\varphi\Phi} = f(r)-g(r)$$

Так что рассматриваемый минор $\Delta(r)$ будет иметь вид

$$\Delta(r) = g(r)[(1+\alpha\beta r^2)f(r)-g(r)]$$

Поэтому для выполнения требуемой проверки знака достаточно проверить знак выражения в квадратных скобках. Проведем его дальнейшие преобразования с использованием тождества (3.6):

$$\begin{aligned}&(1+\alpha\beta r^2)f(r)-g(r) = \alpha\beta r^2 f(r)+[f(r)-g(r)] = \\ &= \alpha\beta r^2 f(r)+\alpha\beta r\left[\frac{1}{(1-\alpha r)^3}-\frac{1}{(1+\beta r)^3}\right]\end{aligned}$$

Легко проверить, что это выражение при любых допустимых значениях r положительно. Нетрудно также убедиться, что величины $\Pi_{\Phi\Phi}$, $\Pi_{\xi\xi}$ в (3.1) всегда отрицательны. В итоге заключаем, что в силу критерия Сильвестра при $r < r_0(\alpha)$ на решениях, вытянутых наружу от орбиты центра центра масс ОТС, и при $r > r_\pi(\alpha)$ на решениях, вытянутых внутрь, матрица Гесса приведенного потенциала отрицательно определена.

Итак, связь напряжена и приведенный потенциал в окрестности точек

$$(R, \Phi, \varphi, \xi, r, l) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, l), & l < r_0 \\ (1, 0, 0, \pi, l), & l < r_\pi \end{cases}$$

имеет строгий максимум по всем переменным. По теореме А.П. Иванова [3] имеет место устойчивость положения относительного равновесия с учетом ударных взаимодействий в неограниченной постановке.

Вследствие существования интеграла (между ударами) $\Theta_2 - \Pi = h$ устойчивость также сохранится, если коэффициент восстановления при ударе будет меньше единицы. В этом случае амплитуда "подскоков" над связью будет затухать, а величина h будет уменьшаться от удара к удару. Предельное движение ОТС должно проходить при напряженной связи.

Похожий анализ устойчивости, но только для плоского движения гантелеобразного спутника проведен в работе [7]. Схожесть упомянутой работы с данной состоит в том, что при натянутом тросе связка может считаться частным случаем гантели: две точечные массы, соединенные невесомым стержнем. Отличие заключается в том, что изначально здесь отправляемся от динамики свободного полета двух материальных точек, а положения относительного равновесия вычисляются в неограниченной пространственной задаче при помощи редукции по Раусу, заключающейся в исключении одной циклической координаты. Эта операция напоминает то, что в небесной механике называется исключением узла. Еще одним существенным отличием является, конечно, учет ударных взаимодействий в динамике ОТС.

Редукция по Раусу применялась в уже упоминавшейся работе [4]. Однако в отличие от публикуемой работы там точки были соединены при помощи упругой пружины, сопротивляющейся сжатию, образуя гантель с упругими свойствами. Устойчивость радиальных конфигураций проверяется при помощи свойств положительной определенности, аналогичных рассмотренным. Соответствующие условия зависят от упругих свойств соединительной пружины. Однако выводы об устойчивости в предельном жестком случае гантели не соответствуют результатам работы [7] о нарушении устойчивости при достаточно большой длине гантели.

Метод энергии-момента применялся также в [8]. Здесь для случая равных масс при увеличении длины троса в полном согласовании с результатами [7] обнаружена потеря устойчивости. Положения относительного равновесия вычислялись при помощи редукции из пространственного случая. С другой стороны, в рассматриваемой в данной статье задаче "опускание" на плоскость, перпендикулярную вектору кинетического момента, удается получить из простых механических соображений, что в дальнейших действиях позволяет применить аналитическую технику метода Рауса.

Метод Рауса применялся также в близкой к публикуемой по тематике работе [9], в которой рассматривалось плоское движение системы, состоящей из трех точек, две из которых взаимодействуют при помощи сил неньютоновской природы. Для перехода к рассмотренной в данной работе модели здесь надо использовать так называемый генетический подход [10] в механике систем с односторонними связями (когда соединительная "пружина" становится неограниченно жесткой при растяжении).

Теорема А.П. Иванова с применением генетического подхода была воспроизведена также А.А. Буровым [11]. Здесь использован бескоординатный метод доказательства, позволяющий применять теорему при наложении нескольких связей одновременно.

Авторы благодарят А.А. Бурова и В.С. Сергеева за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-08-65470, 05-01-00454, НШ-6667.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.
2. *Уиттекер Э.Т.* Аналитическая динамика. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999. 588 с.
3. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.
4. *Li-Sheng Wang, Shyh-Feng Cheng*. Dynamics of two spring-connected masses in orbit // Celest. Mech. and Dynam. Astronomy. 1996. V. 63. № 3–4. P. 289–312.
5. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977. 432 с.
6. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
7. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космич. исслед. 1990. Т. 28. Вып. 5. С. 664–675.
8. *Krupa M., Steindl A., Troger H.* Stability of relative equilibria. Pt 2. Dumbell satellites // Meccanica. 2000. V. 35. № 4. P. 353–371.
9. *Степанов С.Я.* Условия вековой и гироскопической устойчивости стационарных решений в обобщенной плоской задаче трех тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 33–44.
10. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
11. *Burov A.A.* On the Routh method for mechanical systems subjected unilateral constraints // Progr. Nonlinear Science: Proc. Intern. Conf. Dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov. V. I. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics. Nizhny Novgorod: Inst. Appl. Phys. RAS: Univ. Nizhny Novgorod, 2002. P. 196–201.

Москва

Поступила в редакцию 3.08.2004