МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 531.381

© 2006 г. А.К. АЛЁХИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку в однородном поле тяжести. Предполагается, что эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения.

Исследуется орбитальная устойчивость плоских периодических движений тела. В невозмущенном движении тело совершает колебания или вращения вокруг оси динамической симметрии, занимающей неизменное горизонтальное положение. Амплитуда колебаний или частота вращений тела произвольны.

Показано, что задача зависит от двух параметров: отношения неравных главных моментов инерции и константы энергии в невозмущенном движении, которая определяет амплитуду колебаний или частоту вращений.

В плоскости этих параметров построены области орбитальной устойчивости и неустойчивости в первом (линейном) приближении. В областях устойчивости в первом приближении и на их границах произведен также нелинейный анализ орбитальной устойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, ось Z направлена вертикально вверх. С телом связана система координат $Oxyz$, образованная главными осями инерции тела для точки O. Так как предполагается, что эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, положим, что моменты инерции тела относительно осей x, y равны A, а относительно оси z – C. Пусть mg – масса тела, l, 0, 0 – координаты центра масс тела в связанной системе координат $Oxyz$.

Функция Лагранжа, описывающая движение твердого тела в углах Эйлера ψ, θ, ϕ, имеет вид

$$L = A(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)/2 + C(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi)^2/2 - mgl\sin\theta\sin\phi \tag{1.1}$$

Существует частное решение, при котором $\psi = 0$, $\theta = \pi/2$. Проекция кинетического момента на вертикаль при этом будет равна нулю, ось динамической симметрии тела z неподвижна и занимает горизонтальное положение, угол собственного вращения ϕ, описывающий положение тела относительно этой оси, меняется по закону математического маятника. Таким образом, тело совершает "плоские" маятникообразные движения – вращения или колебания вокруг оси динамической симметрии. Все точки тела движутся в параллельных плоскостях.

Далее в статье решается задача об орбитальной устойчивости указанных движений в зависимости от начальных условий и распределения масс в теле. Проекция кинетического момента на вертикаль при этом считается невозмущаемой и равной нулю.

2. Функция Гамильтона. Пусть p_ψ, p_θ, p_ϕ – обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера. Заметим, что координата ψ – циклическая, поэтому импульс $p_\psi = 0$, согласно предположению о равенстве нулю проекции кинетического момента на вертикаль. Положим

$$\phi = 3\pi/2 + q_1, \quad \theta = \pi/2 + q_2, \quad p_\phi = \sqrt{mglC}p_1, \quad p_\theta = \sqrt{mglC}p_2 \tag{2.1}$$

и введем новое безразмерное время $\tau = \sqrt{mgl/C}\,t$. В новых переменных гамильтониан будет зависеть лишь от одного параметра $\alpha = C/A$, который по физическим соображениям удовлетворяет условию $0 \le \alpha \le 2$:

$$2H = p_1^2 - 2\cos q_1 \cos q_2 + \alpha p_2^2 + \alpha p_1^2 \operatorname{tg}^2 q_2 \tag{2.2}$$

В невозмущенном плоском движении $q_2 = p_2 = 0$, а q_1, p_1 изменяются в соответствии с гамильтонианом

$$H^{(0)} = p_1^2/2 - \cos q_1 \tag{2.3}$$

при этом имеет место интеграл $H^{(0)} = h = \text{const}$. При $h = -1$ тело находится в устойчивом положении равновесия, центр тяжести лежит на вертикали OZ ниже неподвижной точки O. Величина константы энергии в интервале $-1 < h < 1$ означает плоские колебания, тело отклоняется от устойчивого положения то в одну, то в другую сторону с тем большей амплитудой, чем больше h. Случай $h = 1$ означает неустойчивое положение равновесия, а $h > 1$ – плоское вращение тела, при этом чем больше h, тем выше частота вращения.

Таким образом, имеем два параметра α и h, от которых зависит качественное поведение системы. Целью дальнейших исследований является построение областей устойчивости и неустойчивости в линейном приближении в плоскости параметров α, h, а также нелинейное исследование внутри областей устойчивости в первом приближении и на их границах. Нелинейный анализ осуществляется с использованием сохраняющих площадь отображений [1, 2], построению этих отображений посвящены следующие три раздела.

3. Функция Гамильтона возмущенного движения в случае колебаний. Для удобства дальнейшего изложения перейдем от переменных q_1, p_1 к переменным действие-угол I, w. Пусть в невозмущенном движении тело совершает колебания с амплитудой β, $0 < \beta < \pi$, что соответствует уровню энергии $h = -\cos\beta$. Положим $k_1 = \sin(\beta/2)$, каноническая унивалентная замена переменных осуществляется по формулам

$$q_1 = 2\arcsin\left[k_1 \operatorname{sn}\left(\frac{2K(k_1)}{\pi}w, k_1\right)\right], \quad p_1 = 2\operatorname{cn}\left(\frac{2K(k_1)}{\pi}w, k_1\right) \tag{3.1}$$

Гамильтониан возмущенного движения при этом получается подстановкой (3.1) в (2.2). Здесь $k_1 = k_1(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{8}{\pi}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)], \quad \frac{\partial k_1}{\partial I} = \frac{\pi}{8k_1 K(k_1)} \tag{3.2}$$

Гамильтониан невозмущенного движения примет вид

$$H^{(0)} = 2k_1^2 - 1 \tag{3.3}$$

Он не зависит от угла w, а только неявно от действия $I = I_0 = \text{const}$; угол w меняется по закону $w = \omega_1\tau + w(0)$, где ω_1 – частота колебаний, $\omega_1 = \pi/(2K(k_1))$. Обозначим возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$, теперь задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным q_2, p_2, r_1.

Разложим гамильтониан возмущенного движения в ряд по переменным $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ до четвертой степени включительно. Величины q_2, p_2 имеют первый порядок малости, а r_1 – второй порядок. Так как зависимость от r_1 – неявная, приведем формулу разложения по r_1:

$$H = H|_{I=I_0} + \left[\frac{\partial H}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial I}\right]\Bigg|_{I=I_0} r_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial k_1^2}\left(\frac{\partial k_1}{\partial I}\right)^2 + \frac{\partial H}{\partial k_1}\frac{\partial^2 k_1}{\partial I^2}\right]\Bigg|_{I=I_0} r_1^2 + O(r_1^3) \tag{3.4}$$

Отбросив несущественную постоянную $(2k_1^2 - 1)|_{I=I_0}$, получим из (2.2), (3.1), (3.2) и используя (3.4) такое разложение гамильтониана возмущенного движения по степеням q_2, p_2, r_1:

$$H^{(1)} = \omega_1 r_1 + h_{200}^{(1)} q_2^2 + h_{020}^{(1)} p_2^2 + h_{004}^{(1)} r_1^2 + h_{202}^{(1)} r_1 q_2^2 + h_{400}^{(1)} q_2^4 + O_6 \tag{3.5}$$

$$h_{200}^{(1)} = \frac{1}{2}[2(2\alpha+1)\mathrm{dn}^2 u + 4\alpha(k_1^2 - 1) - 1], \quad h_{020}^{(1)} = \frac{\alpha}{2}$$

$$h_{004}^{(1)} = -\frac{\pi^2}{32}\frac{E(k_1) - (1-k_1)^2 K(k_1)}{k_1^2(1-k_1^2)K^3(k_1)}$$

$$h_{202}^{(1)} = \frac{\pi}{4K(k_1)}\left[2\alpha + \frac{(2\alpha+1)}{(1-k_1^2)}\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u(\mathrm{cn}u\,\mathrm{zn}u - \mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u)\right]$$

$$h_{400}^{(1)} = \frac{1}{24}[32\alpha(k_1^2 - 1) + 1 + 2(16\alpha - 1)\mathrm{dn}^2 u]$$

где $k_1 = k_1(I_0)$ соответствует невозмущенному движению, а переменная u введена для краткости записи, $u = 2K(k_1)w/\pi$. Вторым аргументом эллиптических функций здесь является величина k_1.

4. Функция Гамильтона возмущенного движения в случае вращений. В случае вращений положим $k_2^2 = 2(1+h)^{-1}$. Переменные I, w вводятся по формулам

$$q_1 = 2\mathrm{am}\left(\frac{K(k_2)}{\pi}w, k_2\right), \quad p_1 = \frac{2}{k_2}\mathrm{dn}\left(\frac{K(k_2)}{\pi}w, k_2\right) \tag{4.1}$$

где $k_2 = k_2(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{4}{\pi k_2}E(k_2), \quad \frac{\partial k_2}{\partial I} = -\frac{\pi k_2^2}{4K(k_2)} \tag{4.2}$$

Частота вращений $\omega_2 = \pi/(k_2 K(k_2))$. В невозмущенном движении функция Гамильтона будет такой: $H^{(0)} = 2k_2^{-2} - 1$, действие $I = I_0 = \mathrm{const}$, угол $w = \omega_2\tau + w(0)$. Пусть $r_2 = I - I_0$ – возмущение действия. Проведя выкладки, аналогичные п. 3, выпишем разложение гамильтониана возмущенного движения по переменным $q_2, p_2, |r_2|^{1/2}$:

$$H^{(2)} = \omega_2 r_2 + h_{200}^{(2)} q_2^2 + h_{020}^{(2)} p_2^2 + h_{400}^{(2)} q_2^4 + h_{202}^{(2)} q_2^2 r_2 + h_{004}^{(2)} r_2^2 + O_6$$

$$h_{200}^{(2)} = \frac{\text{cn}^2 u - \text{sn}^2 u}{2} + \frac{2\alpha \text{dn}^2 u}{k_2^2}, \quad h_{020}^{(2)} = \frac{\alpha}{2}$$
$$h_{400}^{(2)} = \frac{\text{sn}^2 u - \text{cn}^2 u}{24} + \frac{4\alpha \text{dn}^2 u}{3k_2^2}, \quad h_{004}^{(2)} = \frac{\pi^2}{8}\frac{E(k_2)}{(1-k_2^2)K^3(k_2)} \tag{4.3}$$
$$h_{202}^{(2)} = \frac{\pi k_2}{2K(k_2)(1-k_2^2)}(2\alpha+1)\text{sn}u\text{cn}u(k_2^2\text{sn}u\text{cn}u - \text{dn}u\text{zn}u) + \frac{\pi\alpha}{k_2 K(k_2)}$$

5. Построение сохраняющего площадь отображения. Рассматриваемая задача об орбитальной устойчивости эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к переменным q_2, p_2 на изоэнергетическом уровне $H = 0$, где под H будем подразумевать $H^{(1)}$ в случае колебаний и $H^{(2)}$ в случае вращений. Воспользуемся уравнениями Уиттекера. Из $H = 0$ находим, что $r_1 = -K_2(q_2, p_2, w) - K_4(q_2, p_2, w) - \ldots$

$$K_2 = k_{20}q_2^2 + k_{02}p_2^2, \quad K_4 = k_{40}q_2^4 + k_{22}q_2^2p_2^2 + k_{04}p_2^4 \tag{5.1}$$

$$k_{20} = h_{200}/\omega_1, \quad k_{02} = h_{020}/\omega_1, \quad k_{40} = [h_{004}k_{20}^2 - k_{202}k_{20} + h_{400}]/\omega_1$$
$$k_{22} = [2h_{004}k_{20}k_{02} - h_{202}k_{20}]/\omega_1, \quad k_{02} = h_{004}k_{20}^2/\omega_1 \tag{5.2}$$

где $h_{ijk} = h_{ijk}^{(1)}$ в случае колебаний и $h_{ijk} = h_{ijk}^{(2)}$ в случае вращений. Редуцированная система уравнений возмущенного движения примет вид

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial K}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad K = K_2 + K_4 + \ldots \tag{5.3}$$

Выпишем линеаризованную систему уравнений

$$dq_2/dw = 2k_{02}p_2, \quad dp_2/dw = -2k_{20}q_2 \tag{5.4}$$

и ее матрицу фундаментальных решений:

$$X(w) = \left\| \begin{matrix} x_{11}(w) & x_{12}(w) \\ x_{21}(w) & x_{22}(w) \end{matrix} \right\| \tag{5.5}$$

Функции $x_{ij}(w)$ $(i, j = 1\ldots2)$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_{11}}{dw} = 2k_{02}x_{21}, \quad \frac{dx_{12}}{dw} = 2k_{02}x_{22}, \quad \frac{dx_{21}}{dw} = -2k_{20}x_{11}, \quad \frac{dx_{22}}{dw} = -2k_{20}x_{12}$$
$$x_{11}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = 0, \quad x_{21}(0) = 0, \quad x_{22}(0) = 1 \tag{5.6}$$

В системе (5.3) сделаем унивалентную, каноническую замену переменных

$$q_2 = x_{11}(w)\xi + x_{12}(w)\eta, \quad p_2 = x_{21}(w)\xi + x_{22}(w)\eta \tag{5.7}$$

В новом гамильтониане $\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \ldots$ будут отсутствовать члены второй степени Γ_2:

$$\Gamma = \Gamma_4 + \ldots = \gamma_{40}\xi^4 + \gamma_{31}\xi^3\eta + \gamma_{22}\xi^2\eta^2 + \gamma_{13}\xi\eta^3 + \gamma_{04}\eta^4 + \ldots \tag{5.8}$$

$$\Gamma_4 = k_{40}(x_{11}\xi + x_{12}\eta)^4 + k_{22}(x_{11}\xi + x_{12}\eta)^2(x_{21}\xi + x_{22}\eta)^2 + k_{04}(x_{21}\xi + x_{22}\eta)^4 \tag{5.9}$$

Отображение за период изменения угла w от 0 до 2π $(\xi^0, \eta^0) \to (\xi, \eta)$ зададим при помощи производящей функции $S = S(\xi, \eta^0, w)$, вычисленной при $w = 2\pi$. Отметим, что $\xi^0 = \overset{0}{q_2}$, $\eta^0 = \overset{0}{p_2}$. Будем искать S в таком виде:

$$S = \xi\eta^0 + S_4(\xi, \eta^0, w) = \xi\eta^0 + s_{40}\xi^4 + s_{31}\xi^3\eta^0 + s_{22}\xi^2\eta^{0^2} + s_{13}\xi\eta^{0^3} + s_{04}\eta^{0^4} \tag{5.10}$$

$$\xi^0 = \frac{\partial S}{\partial \eta^0} = \xi + \frac{\partial S_4}{\partial \eta^0}, \quad \eta = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \eta^0 + \frac{\partial S_4}{\partial \xi} \tag{5.11}$$

Отсюда следует

$$\xi = \xi^0 - \frac{\partial S_4(\xi^0, \eta^0, w)}{\partial \eta^0} + O(\xi^{0^2} + \eta^{0^2}), \quad \eta = \eta^0 + \frac{\partial S_4(\xi^0, \eta^0, w)}{\partial \xi^0} + O(\xi^{0^2} + \varphi^{0^2}) \tag{5.12}$$

Найдем коэффициенты s_{ij} $(i + j = 4)$. Согласно уравнению Гамильтона – Якоби $\partial S/\partial w + \Gamma(\xi, \partial S/\partial \xi, w) = 0$ получаем

$$\partial S_4/\partial w + \Gamma_4(\xi, \eta^0, w) = 0 \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered} \frac{ds_{40}}{dw} = -\gamma_{40}, \quad \frac{ds_{31}}{dw} = -\gamma_{31}, \quad \frac{ds_{22}}{dw} = -\gamma_{22}, \quad \frac{ds_{13}}{dw} = -\gamma_{13}, \quad \frac{ds_{04}}{dw} = -\gamma_{04} \\ s_{40}(0) = s_{31}(0) = s_{22}(0) = s_{13}(0) = s_{04}(0) = 0 \end{gathered} \tag{5.14}$$

Для получения отображения $(q_2, p_2)|_{w=0} \to (q_2, p_2)|_{w=2\pi}$ проинтегрируем систему (5.14) совместно с (5.6) и воспользуемся формулой

$$\begin{Vmatrix} q_2(2\pi) \\ p_2(2\pi) \end{Vmatrix} = X(2\pi) \begin{Vmatrix} \overset{0}{q_2} - \partial S_4(\overset{0}{q_2}, \overset{0}{p_2}, 2\pi)/\partial \overset{0}{p_2} - \ldots \\ \overset{0}{p_2} + \partial S_4(\overset{0}{q_2}, \overset{0}{p_2}, 2\pi)/\partial \overset{0}{q_2} + \ldots \end{Vmatrix} \tag{5.15}$$

6. Анализ устойчивости с использованием сохраняющего площадь отображения. Для анализа устойчивости сохраняющего площадь отображения применим алгоритм, изложенный в [1, 2]. Запишем (5.15) в обозначениях: $(q, p) \to (Q, P)$:

$$\begin{aligned} Q &= aq + bp + \sum_{i+j=3} g_{ij} q^i p^j + \ldots \\ P &= cq + dp + \sum_{i+j=3} h_{ij} q^i p^j + \ldots \end{aligned} \tag{6.1}$$

Заметим, что в нашем отображении (6.1) отсутствуют члены 2-го порядка по q, p. Условие сохранения площади означает, что имеет место тождество

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{6.2}$$

Характеристическое уравнение линеаризованного отображения

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \; (2A = a + d) \tag{6.3}$$

В зависимости от величины A матрица нормализованной линейной части отображения (6.1) может принять различный вид, и заключение об устойчивости дается для нескольких различных случаев. Далее рассмотрим их более подробно. Будем предполагать, что после нормализации линейной части наше отображение записано в виде:

$$\begin{Vmatrix} Q \\ P \end{Vmatrix} = M \begin{Vmatrix} q \\ p \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \sum\limits_{i+j=3} a_{ij} q^i p^j + \ldots \\ \sum\limits_{i+j=3} b_{ij} q^i p^j + \ldots \end{Vmatrix} \tag{6.4}$$

1. $|A| > 1$ – область неустойчивости. Матрица нормализованной линейной части M имеет вид

$$M = \begin{Vmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{Vmatrix}, \quad \rho \neq \pm 1 \tag{6.5}$$

2. $|A| = 1$ – граница области устойчивости в линейном приближении. При $b_{30} < 0$ имеет место устойчивость, а при $b_{30} > 0$ – неустойчивость

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ при } A = 1; \quad M = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \text{ при } A = -1 \tag{6.6}$$

3. $|A| < 1, A \neq 0$ – область устойчивости в линейном приближении (отсутствие резонанса 4 порядка):

$$M = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \tag{6.7}$$

Устойчивость имеет место при $(3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03})^2 + (-3b_{30} - b_{12} + a_{21} + 3a_{03})^2 \neq 0$. Это условие не выполняется при значении параметров $\alpha = 0.05128$, $h = 0.5143$.

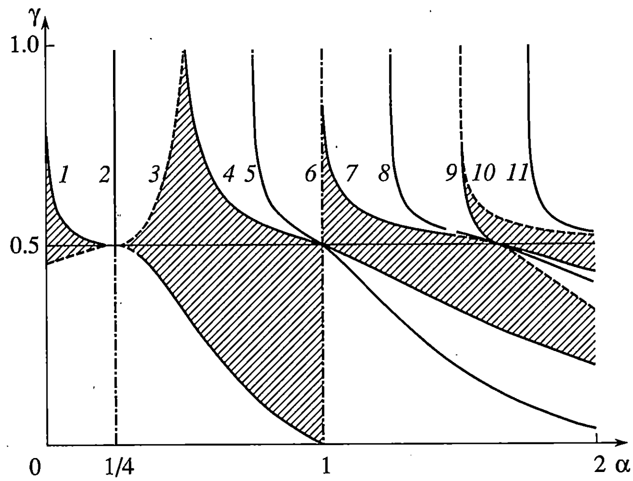
4. $|A| = 0$ – резонанс 4-го порядка внутри области устойчивости в линейном приближении

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{6.8}$$

Устойчивость имеет место при $\mu_{21}^2 - \mu_{03}^2 - \nu_{03}^2 > 0$, а неустойчивость при выполнении этого неравенства с противоположным знаком. Здесь

$$\mu_{21} = 3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}, \quad \mu_{03} = a_{30} - a_{12} - b_{21} + b_{03}, \quad \nu_{03} = -b_{30} + b_{12} - a_{21} + a_{03}$$

На фигуре изображены области устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров α, γ, где $\gamma = (h + 1)/(h + 3)$. Области неустойчивости в линейном приближении заштрихованы. Границы областей неустойчивости и резонансные кривые 4-го порядка пронумерованы и обозначены сплошной линией там, где наблюдается устойчивость полной системы, штриховой линией при неустойчивости полной системы, и штрих-пунктирной линией там, где для суждения об устойчивости недостаточно 3-го порядка в разложении сохраняющего площадь отображения (при $\alpha = 1/4$, $\gamma < 0$). На границе $\alpha = 1$ задача об устойчивости не имеет смысла.



На некоторых границах и резонансных кривых имеются небольшие отрезки, где устойчивость нарушается. Приведем координаты концов этих отрезков: на границе 7 неустойчивость при $\alpha > 3/2$ и устойчивость при $\alpha < 3/2$; на резонансной кривой 8 устойчивость везде кроме $1.41264 < \alpha < 1.48153$; на границе 10 неустойчивость везде кроме $1.87084 < \alpha < 1.93694$.

В случае Ковалевской $\alpha = 1/2$, устойчивость имеет место при $h \leq 0$, а при $h > 0$ – неустойчивость. Этот вывод был ранее получен в статье [3]. В случае Горячева – Чаплыгина $\alpha = 1/4$, вращения тела ($h \geq 1$) орбитально устойчивы. Это утверждение получено в [4]. В этой же статье показано, что в случае Горячева – Чаплыгина плоские колебания ($-1 < h < 1$) неустойчивы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
2. *Маркеев А. П.* Об одном способе исследования устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 6. С. 3–12.
3. *Маркеев А. П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
4. *Маркеев А. П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева – Чаплыгина // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 282–293.

Москва

Поступила в редакцию
10.08.2004