МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 531.383

 В.Ф. ЖУРАВЛЁВ

# К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА

Изучается дрейф идеального сферического гироскопа в отсутствии внешних моментов. Причиной дрейфа гироскопа в таких условиях являются тепловые колебания его кристаллической решетки.

Подобный дрейф изучался в [1], где для связи полной энергии колебаний элементарных частиц с абсолютной температурой использовался закон Дюлонга и Пти, справедливый для комнатных температур.

В окрестности абсолютного нуля этот закон должен быть заменен законом Дебая.

Полученные ниже результаты справедливы без ограничения на температуры.

Рассмотрим гироскоп, представляющий собой идеальный однородный шар, центр которого неподвижен в инерциальном пространстве. Наличие закрепленной точки в реальных гироскопах, относящихся к типу "неконтактных гироскопов", обеспечивается управляемыми электрическими, или магнитными полями (электростатические, или электромагнитные гироскопы) [2], или постоянным магнитным полем (криогенные гироскопы).

Во всех таких гироскопах строго неподвижной точки реализовать не удается, однако, для упрощения анализа мы будем пользоваться моделью неподвижной точки, тем более что учет жесткости крепления в задаче о вычислении ухода с точностью до порядка значения не имеет.

Для дальнейшего важно предположение, что поддерживающее гироскоп поле никаких моментов вокруг точки подвеса не создает.

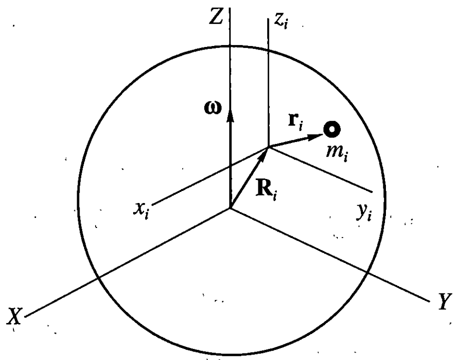
Будем полагать, что шар вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В указанных условиях и в рамках модели абсолютно твердого тела такой гироскоп не может иметь ухода. Если же, следуя представлениям физики твердого тела, иметь в виду, что атомы в узлах кристаллической решетки совершают хаотические колебания, определяющие температуру тела, то уход гироскопа уже будет иметь место. Он будет вызываться тем обстоятельством, что внутренние движения атомов приводят к тому, что оказывается не равной нулю реакция в точке опоры. Не будет равным нулю и момент этой реакции относительно центра масс.

Пусть гироскоп имеет температуру $T$°K.

Для того чтобы описать движение гироскопа, представляющего собой ансамбль связанных друг с другом элементарных частиц, введем в рассмотрение абсолютно твердое тело, являющееся результатом усреднения положений всех таких частиц.

С этим абстрактным твердым телом, в его исходном положении, можно связать ортогональный триэдр $XYZ$ с началом в центре масс и с осью $Z$, направленной по вектору угловой скорости (фигура), изменение ориентации которого в инерциальном пространстве и изучается ниже.

Положение гироскопа в пространстве можно задать тремя углами Крылова – Булгакова $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ [3]. Углы $\alpha$ и $\beta$ определяют положение полусвязанной, или стереонодальной




системы координат относительно системы $XYZ$, угол $\gamma$ определяет вращение относительно этой системы уже самого ротора.

Рассмотрим элементарную частицу массы $m_i$, находящуюся в узле кристаллической решетки, задаваемом радиус-вектором $\mathbf{R}_i$. Этот же узел определяет и среднее положение этой частицы в теле гироскопа. В узле $\mathbf{R}_i$ расположим начало поступательно перемещающейся системы отсчета $x_i y_i z_i$, оси которой параллельны осям $X$, $Y$, $Z$.

Возмущенное положение этой частицы описывается в системе $x_i y_i z_i$ радиус-вектором $\mathbf{r}_i$.

Тепловые колебания частицы будем представлять стационарной гауссовской случайной функцией времени $\mathbf{r}_i(t)$. Будем полагать эту функцию эргодической (ее среднее значение по времени равно ее среднему значению по ансамблю) и будем считать это среднее равным нулю. Центр масс гироскопа расположен в начале координат, т.е. $\sum_i m_i \mathbf{R}_i = 0$.

Вычислим момент количеств движения $\mathbf{G}$ гироскопа относительно начала координат

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum_i m_i (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}_i) \times (\dot{\mathbf{R}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i) = \\ &= \sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку момент внешних сил относительно этой же точки равен нулю, то $\dot{\mathbf{G}} = 0$. Учитывая также, что $\sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i = I\boldsymbol{\omega}$, где $I$ – момент инерции шара, получим

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i \tag{2}$$

Из формулы (2) видно, что отношение последнего члена в правой части к первому ее члену имеет порядок $r_i/R_i$, т.е. порядок отношения амплитуды колебаний атомов к размеру гироскопа, чем, очевидно, уместно пренебречь. В дальнейшем выяснится, что и второй член на несколько порядков меньше первого, однако до выяснения этого факта его придется учитывать.

Имея в виду сказанное, исходим дальше из уравнения

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\sum_i m_i \mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_i]]$$

Ограничим это уравнение его прецессионной частью. В проекциях на оси $x$ и $y$ оно запишется

$$
\begin{aligned}
H\dot{\beta} &= -\sum_i m_i(Y_i\ddot{z}_i - Z_i\ddot{y}_i) - \omega^2\sum_i m_i z_i Y_i \\
-H\dot{\alpha} &= -\sum_i m_i(Z_i\ddot{x}_i - X_i\ddot{z}_i) + \omega^2\sum_i m_i z_i X_i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $H = I\omega$ – собственный кинетический момент ротора.

Предполагается, что корреляционная функция каждой из компонент скорости колебаний атомов имеет вид [4, 5]:

$$
K[\dot{x}_i] = K[\dot{y}_i] = K[\dot{z}_i] = V^2\exp\{-|t-t'|/\tau\}
\tag{4}
$$

где $V$ – среднеквадратическое значение любой компоненты скорости колебаний атома, $\tau$ – время корреляции.

Вычислим корреляционные функции правой и левой частей первого уравнения системы (3):

$$
K[H\dot{\beta}] = K\left[\sum_i m_i(Y_i\ddot{z}_i - Z_i\ddot{y}_i)\right] + K\left[\omega^2\sum_i m_i(z_iY_i)\right] =
$$

$$
= \sum_i m_i^2(Y_i^2 + Z_i^2)K[\ddot{z}_i] + \omega^4\sum_i m_i^2Y_i^2K[z_i]
$$

Учитывая, что

$$
\sum_i m_i(Y_i^2 + Z_i^2) = I, \quad \sum_i m_iY_i^2 = I/2
$$

а также, что

$$
m_iK[\ddot{z}_i] = (m_iV^2/\tau^2)\exp\{-|t-t'|/\tau\}, \quad m_iK[z_i] = (\tau^2m_iV^2)\exp\{-|t-t'|/\tau\}
$$

получим

$$
K[H\beta] = (1+\tau^4\omega^4/2)I\frac{\langle E\rangle}{3\tau^2}\exp\{-|t-t'|/\tau\}
\tag{5}
$$

где $\langle E\rangle = 3m_iV^2$ (для трехмерного гармонического осциллятора средняя кинетическая энергия колебаний по одной из степеней свободы равна третьей части от половины полной средней энергии колебаний – $E$).

Поскольку время корреляции $\tau \sim 10^{-6}$ с, а $\omega \sim 10^3$ с$^{-1}$, то $(\tau\omega)^4 \ll 1$ и вместо (5) будем в дальнейшем иметь в виду

$$
K[H\dot{\beta}] = \frac{I\langle E\rangle}{3\tau^2}\exp\{-|t-t'|/\tau\}
\tag{6}
$$

Откуда

$$
K[I\omega\beta] = \int_0^t dt\int_0^{t'} K[H\dot{\beta}]dt' = \frac{I\langle E\rangle}{3\tau^2}\int_0^t dt\int_0^{t'}\exp\{-|t-t'|/\tau\}dt'
$$

Вычисление двойного интеграла дает

$$K[H\beta] = I\langle E\rangle\tau^{-2}[-\tau^2 e^{-|t-t'|/\tau} + \tau^2(e^{-|t|/\tau} + e^{-|t'|/\tau}) + \tau(|t| + |t'|) - \tau|t - t'| - \tau^2]/3$$

Отождествляя $t$ с $t'$ и ограничиваясь главными членами, найдем дисперсию

$$D[H\beta] = 2I\langle E\rangle t/3\tau$$

Аналогичные вычисления, приводящие к такому же результату, могут быть проделаны и со вторым уравнением системы (3).

Дисперсия $H\beta$ есть среднее значение $(H\beta)^2$, поэтому

$$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2} = \sqrt{\frac{2\langle E\rangle}{3H\omega\tau}t} \tag{7}$$

Остается связать среднюю энергию колебаний $\langle E\rangle$ с абсолютной температурой $T$°K. При комнатных температурах эта связь дается законом Дюлонга и Пти $\langle E\rangle = 3kT$, $k$ – постоянная Больцмана [5]. Если ограничений на температуры нет, то используют закон Дебая [5]:

$$\langle E\rangle = 9\frac{kT^4}{\theta^3}\int_0^{\theta/T}\frac{\varphi^3 d\varphi}{e^{\varphi} - 1} \tag{8}$$

в котором $\theta$ – определяемая в эксперименте постоянная, называемая характеристической температурой Дебая.

Закон (8) принимает более простой вид для высоких и для низких температур.

Для высоких температур

$$\langle E\rangle = \frac{9kT^4}{\theta^3}\int_0^{\theta/T}(\varphi^2 + \ldots)d\varphi = 3kT$$

закон Дебая переходит в закон Дюлонга и Пти.

Для низких температур $\theta/T \to \infty$. Поскольку при этом

$$\int_0^{\infty}\frac{\varphi^3 d\varphi}{e^{\varphi} - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

то вместо (8) в этом случае имеем $\langle E\rangle = 3\pi^4 kT^4/5\theta^3$.

Суммируем полученные результаты в следующей форме. Тепловой дрейф неконтактного гироскопа с температурой $T$°K в общем случае имеет вид

$$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2} = \frac{T^2}{\omega\theta}\sqrt{\frac{6kt}{I\tau\theta}\int_0^{\theta/T}\frac{\varphi^3 d\varphi}{e^{\varphi} - 1}} \tag{9}$$

В случаях комнатных температур он может быть выражен формулой

$$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2} = \sqrt{\frac{2kT}{H\omega\tau}t} \tag{10}$$

Именно эта формула и приведена без вывода в [1]. Тепловой дрейф при низких температурах

$$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2} = \frac{\pi^2 T^2}{\omega\theta}\sqrt{\frac{2k}{5I\tau\theta}t} \tag{11}$$

*Пример*. Вычислим уход при комнатных и при низких температурах для параметров прибора, приведенных в [1]:

$$A = C = 3 \text{ гсм}^2; \quad \omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}; \quad k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}^2 \text{ град}$$

$$\theta = 252°\text{K}; \quad t = 1 \text{ год} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ сек}; \quad \tau = 10^{-6} \text{ сек}$$

Для $T = 293°\text{K}$ по формуле (7) найдем $\sqrt{\alpha^2} = 30''$ за год полета. В случае криогенного гироскопа $T = 4°\text{K}$ и по этой же формуле, следуя [1] получаем $\sqrt{\alpha^2} = 3.5''$.

Известно, что основной релятивистский уход гироскопа на низколетящем искусственном спутнике Земли, эквивалентный смещению перигелия Меркулия, составляет 7 дуг. сек за год полета. Подсчитаем тепловой дрейф при $T = 4°\text{K}$ за это же время по формуле (11): $\sqrt{\alpha^2} = 0.03''$, что на два порядка меньше того, что получено в [1].

*Заключение*. Работа [1] как раз и была предпринята в связи с возникшим в то время интересом к проверке общей теории относительности на борту искусственного спутника Земли. О подробностях такого эксперимента можно прочитать, например, в [6]. Вычисленные в [1] уходы для комнатных и для низких температур говорили о том, что такой точности недостаточно для выполнения указанного эксперимента и был сделан ошибочный вывод о его принципиальной неосуществимости с помощью гироскопа.

Противоречие результатов работы [1] изложенному выше объясняется тем, что в [1] использовалась формула Дюлонга и Пти для связи средней энергии колебаний частицы с температурой тела гироскопа. Между тем автор говорит о сверхнизких температурах и в примере использует значение $T = 4°\text{K}$. Но при таких температурах эта формула неприменима и приводит к завышенным оценкам.

Таким образом, для проверки общей теории относительности при помощи гироскопа термодинамического препятствия не существует. Если такой эксперимент принципиально неосуществим, то по каким-то другим причинам.

Все сказанное выше до сих пор имеет значение, поскольку этот эксперимент пока так и не осуществлен, при том что от идеи его реализации не отказались.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mathey R*. Dérive du gyroscope électrostatique // C.R. Acad. Sci. Paris. T. 264. Ser. A. № 21. P. 912–913, 1967.
2. *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
3. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы, инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.
5. *Киттель Ч.* Элементарная физика твердого тела. М.: Наука, 1965. 366 с.
6. *Кеннон Р.* Специальный гироскоп для измерения эффектов общей теории относительности на борту астрономического спутника. Требования и конструкция // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 129–151.

Москва

Поступила в редакцию
12.10.2005