

УДК 531.36

© 2006 г. В.С. АСЛАНОВ, А.В. ДОРОШИН

## О ДВУХ СЛУЧАЯХ ДВИЖЕНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСТАТА

Рассматриваются два случая движения неуравновешенного гиростата: тяжелого динамически симметричного гиростата с произвольным внутренним моментом взаимодействия и свободного гиростата при наличии внутреннего момента специального вида. Для тяжелого гиростата получены общие решения уравнений движения в эллиптических функциях Якоби и исследован режим “лунного” движения. Рассматривается движение свободного гиростата, у которого ротор вращается вокруг главной оси инерции тела-носителя, соответствующей наибольшему моменту инерции, под действием момента специального вида. В этом случае решения динамических уравнений движения также находятся в эллиптических функциях, допускающих последующее решение задачи Дарбу. Полученные решения могут быть использованы в прикладных задачах механики космического полета, в частности, в задачах спуска космического аппарата (КА) в атмосфере, описания движения и пространственной переориентации спутника-гиростата.

**1. Уравнения движения гиростата.** Гиростат как система твердых тел, состоящая из тела-носителя и тел-роторов, вращающихся вокруг неподвижных осей в теле-носителе, рассматривается в работах [1–20]. В [1, 2] проводятся исследования, связанные с анализом твердых тел, содержащих полости с жидкостью, и показано, что математические модели движения таких систем, аналогичны математическим моделям движения “эквивалентного” твердого тела с присоединенными роторами.

Уравнения движения гиростатов вокруг неподвижной точки или эквивалентных твердых тел с полостями, содержащими жидкость, могут быть представлены в векторном виде [4]:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{h} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) = \mathbf{M} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{J}$  – тензор инерции гиростата как системы тела-носителя вместе с роторами, либо тензор инерции эквивалентного тела вместе с жидкими массами (“жиростата” [1]);  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор абсолютной угловой скорости тела-носителя;  $\mathbf{h}$  – суммарный кинетический момент вращающихся роторов в их движении относительно тела-носителя;  $\mathbf{M}$  – момент внешних сил. Из уравнения (1.1) следует, что можно перейти от системы роторов к одному ротору с эквивалентным относительным кинетическим моментом  $\mathbf{h}$ . В [4, 8, 18] рассматриваются случаи, когда суммарный кинетический момент вращающихся роторов относительно тела-носителя является заданной функцией времени  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$ . В работах [4, 6, 16] исследуется движение уравновешенного гиростата, когда относительная угловая скорость поддерживается постоянной и вектор кинетического момента имеет постоянные компоненты в базе, связанном с телом-носителем.

Движение неуравновешенного ротора описывается с помощью теоремы об изменении кинетического момента [21]:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{J}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_r^e \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{J}_r$  – тензор инерции ротора относительно неподвижной точки,  $\boldsymbol{\sigma}$  – вектор относительной угловой скорости ротора (по отношению к телу-носителю),  $\mathbf{M}_r$  – момент сил, действующих на ротор со стороны тела-носителя;  $\mathbf{M}_r^e$  – момент внешних сил, действующих на ротор.

Будем рассматривать два случая движения неуравновешенного гиростата: тяжелого динамически симметричного и свободного при наличии специального внутреннего момента взаимодействия.

**2. Движение тяжелого неуравновешенного гиростата с произвольным моментом внутреннего взаимодействия.** Введем следующие системы координат:  $Oxyz$  – подвижная система, жестко связанная с телом-носителем, с началом в неподвижной точке  $O$ ;  $OXYZ$  – неподвижная в абсолютном пространстве система координат; ось  $Z$  направлена в сторону, противоположную силе тяжести. Момент силы тяжести в проекциях на подвижные оси равен

$$\mathbf{M} = (Pa\gamma_2, -Pa\gamma_1, 0) \quad (2.1)$$

где  $P$  – вес гиростата,  $a$  – расстояние от центра тяжести гиростата до неподвижной точки  $O$ ,  $\gamma_i$  – направляющие косинусы единичного вектора вертикальной неподвижной оси  $OZ$  в подвижной системе  $Oxyz$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ось вращения ротора совпадает с осью динамической симметрии  $z$  гиростата и точка  $O$  принадлежит этой оси.

Динамические уравнения движения тяжелого симметричного гиростата в осях системы координат  $Oxyz$ , согласно (1.1), (1.2) и (2.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr + C_r q\sigma &= Pa\gamma_2 \\ A\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma &= -Pa\gamma_1 \\ C\dot{r} + C_r\dot{\sigma} &= 0, \quad C_r(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $A = A_n + A_r$ ,  $C = C_n + C_r$  – моменты инерции гиростата в системе  $Oxyz$ ;  $A_n = B_n$ ,  $C_n$  – главные моменты инерции тела-носителя;  $A_r = B_r$ ,  $C_r$  – моменты инерции ротора;  $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$  – угловая скорость несущего тела,  $\boldsymbol{\sigma}$  – относительная угловая скорость вращения ротора.

Кинематические уравнения включают в себя уравнения Пуассона [21] и уравнение для угла вращения ротора относительно несущего тела  $\delta$ :

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad \dot{\delta} = \sigma \quad (2.3)$$

По аналогии с [21] запишем три первых интеграла системы уравнений (2.2) и (2.3):

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (2.4)$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + C_r\sigma)\gamma_3 = K_z \quad (2.5)$$

$$Cr + C_r\sigma = K_z \quad (2.6)$$

Интегралы (2.5) и (2.6) определяют сохранение проекций кинетического момента на неподвижную вертикаль  $OZ$  и на ось динамической симметрии гиростата  $Oz$ .

Для поиска четвертого интеграла воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии [21]:

$$\frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + C_n r^2 + C_r(r + \sigma)^2] - T_0 = -Pa\gamma_3 + \int_0^\delta M_r d\delta \quad (2.7)$$

где  $T_0$  – начальная величина кинетической энергии. Представим последние два уравнения системы (2.2) в виде

$$C_n \dot{r} = -M_r, \quad C_r(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \quad (2.8)$$

Умножая первое уравнение на  $r$ , а второе – на  $(r + \sigma)$ :

$$1/2 C_n d r^2 = -M_r r dt, \quad 1/2 C_r d(r + \sigma)^2 = M_r (r + \sigma) dt$$

и складывая два последних соотношения, получим работу внутреннего момента

$$\int_0^{\delta} M_r d\delta = \frac{1}{2} [C_n r^2 + C_r (r + \sigma)^2] + \text{const} \quad (d\delta = \sigma dt)$$

Сопоставляя эту формулу и выражение (2.7), запишем четвертый интеграл в виде:

$$1/2 A (p^2 + q^2) + P a \gamma_3 = \text{const} \quad (2.9)$$

Первые интегралы (2.4)–(2.6) и (2.9) совпадают с аналогичными первыми интегралами движения тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [21]. Очевидно, что динамически симметричный тяжелый уравновешенный гироскоп совершает движение, подобное движению тяжелого осесимметричного твердого тела. Ранее в работах [15, 18] качественно показывалась возможность обобщения задачи о движении тяжелого тела в случае Лагранжа для уравновешенного гироскопа и движения тела в жидкости.

Найдем общие решения уравнений движения тяжелого неуравновешенного динамически симметричного гироскопа. Перейдем от направляющих косинусов к углам Эйлера [21], записанным для тела-носителя

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta$$

и заменим уравнения Пуассона (2.3) на кинематические уравнения Эйлера

$$p = \psi \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \psi \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \quad (2.10)$$

Далее воспользуемся аналогией с задачей о движении тяжелого твердого тела [21–23]. С помощью уравнений (2.10) интегралы (2.5) и (2.9) приведем к виду

$$\begin{aligned} \psi \sin^2 \theta + R \cos \theta = G, \quad \dot{\theta}^2 + \psi^2 \sin^2 \theta + 2g \cos \theta = H \\ g = Pa/A, \quad R = K_z/A, \quad G = K_z/A \end{aligned} \quad (2.11)$$

После замены переменных  $u = \cos \theta$  вторая формула из (2.11) превращается в кубический многочлен относительно  $u$ , имеющий три вещественных корня:  $u_1, u_2, u'$  ( $-1 < u_1 \leq u_0 \leq u_2 < 1 < u' < \infty, u_0 = \cos \theta_0$ ):

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u) = (H - 2gu)(1 - u^2) - (G - Ru)^2 = 2g(u - u_1)(u - u_2)(u - u') \quad (2.12)$$

Очевидно, что переменная  $u$  должна изменяться в пределах  $u_1 \leq u \leq u_2$ . С помощью введения новой переменной  $\xi$ :

$$u = u_1 \cos^2 \xi + u_2 \sin^2 \xi \quad (2.13)$$

на основании (2.12) можно записать

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm \beta \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \xi)} \quad \left( \beta = \sqrt{g(u' - u_1)/2}, \quad k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u' - u_1}, \quad 0 \leq k^2 < 1 \right) \quad (2.14)$$

Интегрирование (2.14) дает следующий результат:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \pm \int_0^t \beta dt$$

где  $\xi_0$  находится из уравнения  $\cos \theta_0 = u_1 \cos^2 \xi_0 + u_2 \sin^2 \xi_0$ , а знак перед интегралом в правой части определяется начальными условиями движения.

С помощью амплитуды Якоби последнее выражение можно переписать в виде

$$\xi = \text{am}(\beta t + \alpha, k), \quad \alpha = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = \text{const}$$

тогда общее решение для угла нутации примет вид

$$\cos \theta = (u_2 - u_1) \text{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1 \quad (2.15)$$

Квадратура для угла прецессии следует из первого соотношения (2.11) и решения (2.15) и приводится к комбинации неполных эллиптических интегралов третьего рода [23]:

$$\psi - \psi_0 = \int_0^t \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} dt = GI_1 - RI_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2\beta(u_2 - u_1)} (n_1 \Pi(\xi, n_1, k) - n_2 \Pi(\xi, n_2, k))$$

$$I_2 = \frac{-1}{2\beta(u_2 - u_1)} (n_1 \Pi(\xi, n_1, k) + n_2 \Pi(\xi, n_2, k))$$

$$\xi = \text{am}(z, k), \quad z = \beta t + \alpha \quad (2.16)$$

$$n_1 = \frac{u_2 - u_1}{1 + u_1}, \quad n_2 = \frac{u_2 - u_1}{1 - u_1}$$

$$\Pi(\xi, n, k) = \bar{\Pi}(\xi, n, k) - \bar{\Pi}(\xi_0, n, k)$$

$$\bar{\Pi}(\xi, n, k) = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(1 + n \sin^2 \xi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

где  $\bar{\Pi}(\xi, n, k)$  – неполный эллиптический интеграл третьего рода.

Из кинематических уравнений Эйлера после взятия аналогичных квадратур следует зависимость для угла собственного вращения

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int_0^t (r(t) - \psi \cos \theta) dt = \int_0^t \left( r(t) - \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta \right) dt = \\ &= \int_0^t r(t) dt - GI_2 + R(I_1 - t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Очевидно, что решение для угла собственного вращения тела-носителя зависит от продольной компоненты угловой скорости  $r(t)$ , которая определяется моментом внутреннего взаимодействия соосных тел  $M_r(t)$ .

Пусть, например, между телом-носителем и ротором действует постоянный момент:  $M_r = M = \text{const}$ . Из двух последних уравнений системы (2.2) следуют зависимости для угловых скоростей  $r$ ,  $\sigma$  и угла относительного вращения  $\delta$ :

$$r(t) = r_0 - Mt/C_n, \quad \sigma(t) = \frac{MC}{C_n C_r} t + \sigma_0, \quad \delta(t) = \frac{MC}{2C_n C_r} t^2 + \sigma_0 t + \delta_0$$

Тогда при действии постоянного внутреннего момента решение (2.17) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 = & \frac{1}{2\beta(u_2 - u_1)} [n_1 \Pi(\xi, n_1, k)(G + R) + \\ & + n_2 \Pi(\xi, n_2, k)(G - R)] + (r_0 - R)t - \frac{Mt^2}{2C_n} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Аналогичным образом можно найти решения при действии иных внутренних моментов.

Выбор вида внутреннего момента позволяет реализовывать заданные случаи движения гиростата, например, “лунное” движение, при котором несущее тело всегда обращено одной стороной к неподвижной вертикальной оси  $OZ$ . Найдем вид внутреннего момента, обеспечивающего “лунное” движение, при котором  $\varphi = r - \dot{\psi} \cos \theta = 0$ . Тогда на основании первого уравнения (2.8) указанный момент определяется следующим образом

$$\begin{aligned} M_r = -C_n \dot{r} = -C_n \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \theta) &= -C_n \frac{d}{dt} \left( \frac{G - R \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta \right) = \\ &= - \frac{2R \cos \theta - G \cos^2 \theta - G \dot{\theta} C_n}{\sin^3 \theta} \end{aligned}$$

С учетом решения (2.15) получим

$$\begin{aligned} M_r = & \frac{2((u_1 - u_2) \text{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1)^2 (2R - G((u_2 - u_1) \text{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1))}{(1 - ((u_2 - u_1) \text{sn}^2(\beta t + \alpha, k) + u_1))^2} \times \\ & \times (u_2 - u_1) \beta \text{cn}(\beta t + \alpha, k) \text{dn}(\beta t + \alpha, k) \end{aligned} \quad (2.19)$$

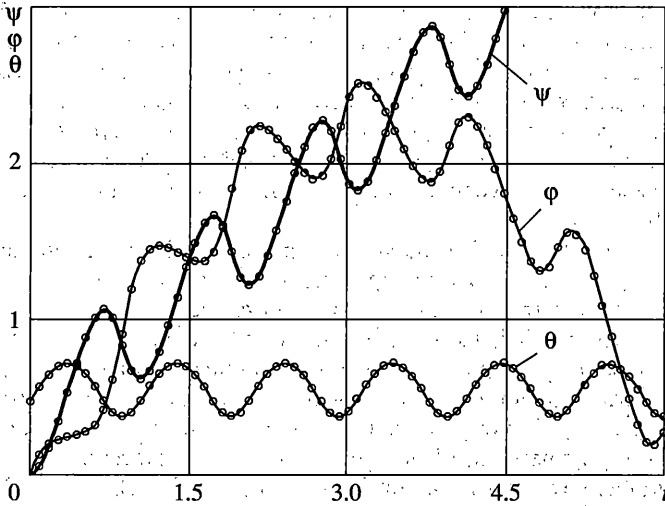
Как следует из решения (2.17), при таком внутреннем моменте угол собственного вращения будет линейной функцией времени

$$\varphi(t) = (r_0 - s)t + \varphi_0 \left( s = \frac{G \cos \theta_0 - R \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \right) \quad (2.20)$$

Режим “лунного” движения реализуется при постоянстве угла собственного вращения ( $\varphi = \text{const}$ ). Это возможно, как следует из (2.20), при  $r_0 - s = 0$ , что равносильно следующему условию, накладываемому на начальные параметры движения

$$\theta_0 = \text{arctg} \frac{p_0 \sin \varphi_0 + q_0 \cos \varphi_0}{r_0} \quad (2.21)$$

Таким образом, “лунное” движение реализуется при действии внутреннего момента вида (2.19) и начальных параметрах, обеспечивающих условие (2.21). В практических



Фиг. 1

задачах механики космического полета режим “лунного” движения может оказаться полезным в одних случаях и опасным в других. Применительно к задаче неуправляемого спуска КА в атмосфере [23], когда реализуется движение под действием восстанавливающего аэродинамического момента, аналогичное движению в случае Лагранжа, “лунный” режим является опасным. Это связано с тем, что КА всегда обращен к набегающему потоку одной стороной, что приводит к неравномерному обгару его теплозащитного покрытия, а, следовательно, к развитию несимметричности КА, возникновению резонансных режимов движения, либо к разрушению. Примером полезного использования лунного режима является движение заряженного (магнитного) спутника-гиростата в однородном магнитном поле, когда возникающая равномерная прецессия (так называемая прецессия Лармора [24]) позволяет сохранять одностороннюю направленность рабочих элементов спутника (антенн, панелей солнечных батарей и пр.).

При отсутствии момента внутреннего взаимодействия имеет место уравновешенный гиростат ( $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$ ) и его движение будет аналогично движению твердого тела в случае Лагранжа с эквивалентными инерционно-массовыми параметрами и угловыми скоростями.

Приведем сравнительные результаты (фиг. 1), полученные численным интегрированием уравнений (2.2), (2.3) (показаны светлыми точками) и по аналитическим формулам (2.15), (2.16) и (2.18) (показаны сплошными линиями). Расчеты проводились при следующих инерционно-массовых и начальных параметрах движения:  $A = 5$ ,  $C_n = 1.5$ ,  $C_r = 2$  [кг · м<sup>2</sup>];  $P = 100$  [Н];  $l = 0.2$  [м];  $M = \text{const} = 1$  [Н · м];  $p_0 = 1$ ,  $q_0 = 0$ ,  $r_0 = 2$ ,  $\sigma_0 = 6\pi$  [рад/с];  $\theta_0 = 0.47$ ,  $\varphi_0 = \psi_0 = \delta_0 = 0$  [рад].

Очевидно, что движение с другими законами изменения угла собственного вращения можно реализовать выбором соответствующего внутреннего момента.

**3. Движения свободного неуровнешенного гиростата при наличии управляющего момента специального вида.** Будем рассматривать свободный неуровнешенный гиростат, состоящий из тела-носителя с трехосным эллипсоидом инерции и динамически симметричного ротора, вращающегося относительно главной оси инерции гиростата  $z$ . Согласно (1.1) и (1.2) уравнения движения свободного гиростата примут вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr + C_r q\sigma &= 0, & B\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma &= 0 \\ C_r \dot{\sigma} + (B - A)pq &= 0, & C_r(\dot{r} + \dot{\sigma}) &= M_r \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исследование уравновешенного свободного гиростата проведено в работе [4], в которой из обращения эллиптического интеграла первого рода следуют параметризованные зависимости для угловых скоростей тела-носителя. Можно предположить, что и в некоторых случаях движения неуравновешенного гиростата решения для параметров пространственной ориентации также запишутся в эллиптических функциях. Поставим задачу определения вида моментов внутреннего взаимодействия тела-носителя и ротора, доставляющих динамическим уравнениям движения (3.1) аналитические решения в эллиптических функциях.

Будем полагать, что  $A < B < C$ , а также, что описание движения начинается с момента времени, когда компонента угловой скорости  $q$  проходит через ноль ( $q_0 = 0$ ). Проведем исследование движения гиростата аналогично классическому случаю Эйлера движения твердого тела и его геометрической интерпретации Пуансо [21]. Как известно, имеется три случая расположения полодии относительно эллипсоида инерции: (1) конус полодии (и сама полодия) содержит внутри ось  $z$  твердого тела, соответствующую оси наибольшего момента инерции; (2) конус полодии содержит внутри ось  $x$ , соответствующую наименьшему моменту инерции; (3) конус полодии распадается на две плоскости, при этом сами полодии переходят в два эллипса, а мгновенная ось вращения асимптотически стремится к оси среднего момента инерции. Условиями реализации случаев 1)–3) являются [25, 21] следующие неравенства, соответственно

$$D > B \quad (3.2)$$

$$D < B \quad (3.3)$$

$$D = B \quad (3.4)$$

где  $D = K^2/(2T)$ ,  $K$  – величина кинетического момента,  $T$  – кинетическая энергия твердого тела. Указанным случаям соответствуют три вида решений для компонент угловых скоростей твердого тела в эллиптических функциях [21].

При исследовании движения гиростата следует учесть указанные различия в расположении полодий. Как будет видно из следующих ниже решений, случаи 1)–3) для гиростата реализуются при условиях (3.2), (3.3) и (3.4), соответственно, с той лишь разницей, что

$$D = \frac{K^2}{\omega \cdot \mathbf{K}} = \frac{A^2 p_0^2 + (C r_0 + C_r \sigma_0)^2}{A p_0^2 + (C r_0 + C_r \sigma_0) r_0} \quad (3.5)$$

Отметим, что в выражении (3.5) скалярное произведение  $\omega \cdot \mathbf{K}$  не является удвоенной кинетической энергией гиростата, как в случае для твердого тела, так как  $\mathbf{K}$  представляет собой кинетический момент системы двух тел, а  $\omega$  – угловую скорость только тела-носителя.

Рассмотрим каждый из указанных выше случаев 1)–3). Пусть выполняется условие (3.2). Поступим аналогично [25] и будем искать решения для компонент угловых скоростей в виде следующих зависимостей, определяемых эллиптическими функциями

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \operatorname{cn}(\lambda t, k), & q(t) &= b \operatorname{sn}(\lambda t, k) \\ r(t) &= r_0 \operatorname{dn}(\lambda t, k), & \sigma(t) &= \sigma_0 \operatorname{dn}(\lambda t, k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $p_0, r_0, \sigma_0$  – начальные значения скоростей, а параметры  $\lambda, k$  и  $b$  подлежат определению. Покажем, что искомые параметры  $\lambda$ , модуль эллиптических функций  $k$  и амплитуда  $b$  проекции угловой скорости на ось  $Oy$  будут однозначно определяться из начальных условий движения. Для тождественного выполнения последнего уравнения систе-

мы (3.1) при выбранных решениях (3.6) необходимо, чтобы момент внутреннего взаимодействия имел вид

$$M_r = -C_r k^2 \lambda (r_0 + \sigma_0) \operatorname{sn} \lambda t \operatorname{cn} \lambda t \quad (3.7)$$

Подставляя выражения (3.6) в первые три уравнения (3.1), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -A p_0 \lambda + (C - B) b r_0 + C_r b \sigma_0 &= 0 \\ B b_0 \lambda + (A - C) p_0 r_0 - C_r p_0 \sigma_0 &= 0 \\ -C r_0 k^2 \lambda + (B - A) b p_0 - C_r k^2 \lambda \sigma_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из системы (3.8) имеем следующие формулы для искоемых параметров:

$$b^2 = \frac{((C - A)r_0 + C_r \sigma_0) p_0^2 A}{((C - B)r_0 + C_r \sigma_0) B} = \frac{(K_z(0) - A r_0) A p_0^2}{(K_z(0) - B r_0) B}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{AB} ((C - B)r_0 + C_r \sigma_0) ((C - A)r_0 + C_r \sigma_0) = (K_z(0) - B r_0) (K_z(0) - A r_0) \quad (3.9)$$

$$k^2 = \frac{p_0^2 A (B - A)}{((C - B)r_0 + C_r \sigma_0) (C r_0 + C_r \sigma_0)} = \frac{p_0^2 A (B - A)}{(K_z(0) - B r_0) K_z(0)}$$

где  $K_z(0) = C r_0 + C_r \sigma_0$  – начальная величина проекции кинетического момента на продольную ось  $z$ . Очевидно, что модуль  $k$  не должен превышать единицы, что соответствует условию (3.2) с учетом выражения (3.5).

Примем для определенности, что  $r_0 > 0$ . Для того чтобы параметры  $b$ ,  $\lambda$  и  $k$  были ненулевыми ограниченными действительными числами необходимо, как это следует из (3.9), совместное выполнение следующих условий:

$$(K_z(0) - B r_0) (K_z(0) - A r_0) > 0 \quad (3.10)$$

$$(K_z(0) - B r_0) K_z(0) > 0 \quad (3.11)$$

Так как  $A < B < C$  и  $r_0 > 0$ , то совместное выполнение условий (3.10) и (3.11) обеспечивается выполнением одного из равносильных неравенств

$$K_z(0) < 0, \quad K_z(0) > B r_0 \quad (3.12)$$

Условие (3.2) можно также записать в виде

$$K_z^2(0) - B r_0 K_z(0) > A (B - A) p_0^2$$

которое сводится к следующим равносильным неравенствам:

$$K_z(0) < \alpha, \quad K_z(0) > \beta \quad (3.13)$$

$$\alpha = 1/2(B r_0 - \sqrt{d}), \quad \beta = 1/2(B r_0 + \sqrt{d}), \quad d = B^2 r_0^2 + 4A(B - A) p_0^2 > 0 \quad (3.14)$$

Полученные неравенства (3.13) (или (3.2)) охватывают условия (3.12) и поэтому являются определяющими. Знак параметра  $b$  зависит от знака  $\lambda$  и выбирается на основании первого соотношения из (3.8).



Проводя аналогичные рассуждения для случая когда  $r_0 < 0$ , можно показать, что величины  $b, \lambda, k$  также будут действительными и  $|k| < 1$ , когда выполняется одно из равносильных неравенств (3.13), с тем лишь замечанием, что в этом случае величины  $\alpha$  и  $\beta$  вычисляются следующим образом

$$\alpha = 1/2(-B|r_0| - \sqrt{d}), \quad \beta = 1/2(-B|r_0| + \sqrt{d}) \quad (3.15)$$

Итак, если начальные параметры движения удовлетворяют неравенствам (3.13), то будут справедливы решения (3.6) при действии внутреннего момента (3.7). Выполнение неравенств (3.13) можно обеспечить выбором начальной величины  $K_z$  путем задания начальной угловой скорости ротора  $\sigma_0$ , либо тела-носителя  $r_0$ .

Отметим, что решения (3.6) можно рассматривать как параметризацию пространственной кривой, соответствующей полодии, откуда следует, что полодия содержит внутри ось  $z$ . Условие (3.2) существования решений (3.6) является условием движения с конусом полодий, содержащим ось наибольшего момента инерции.

Рассмотрим случай движения 2), соответствующий условию (3.3). При этом решения для угловых скоростей и обеспечивающий их внутренний момент ищутся в виде

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \operatorname{dn}(\lambda t, k), & q(t) &= b \operatorname{sn}(\lambda t, k) \\ r(t) &= r_0 \operatorname{cn}(\lambda t, k), & \sigma(t) &= \sigma_0 \operatorname{cn}(\lambda t, k) \\ M_r &= -C_r \lambda (r_0 + \sigma_0) \operatorname{sn} \lambda t \operatorname{dn} \lambda t \end{aligned} \quad (3.16)$$

После подстановки выражений (3.16) в динамическую систему (3.1), записи и решения алгебраической системы, аналогичной (3.8), можно определить следующие величины:

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{(K_z(0) - Ar_0)K_z(0)}{B(B - A)} \\ \lambda^2 &= \frac{p_0^2(B - A)(K_z(0) - Ar_0)}{BK_z(0)} \\ k^2 &= \frac{(K_z(0) - Br_0)K_z(0)}{p_0^2 A(B - A)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

В этом случае условие (3.3) обеспечивает  $k^2 < 1$ , однако не обеспечивает положительности правых частей (3.17) и, следовательно, действительных значений искомых параметров  $b, \lambda, k$ .

Аналогично случаю 1) можно показать, что при  $r_0 > 0$  все искомые параметры ненулевые и действительные и  $k^2 < 1$ , когда выполняется одно из равносильных неравенств:

$$\alpha < K_z(0) < 0, \quad Br_0 < K_z(0) < \beta$$

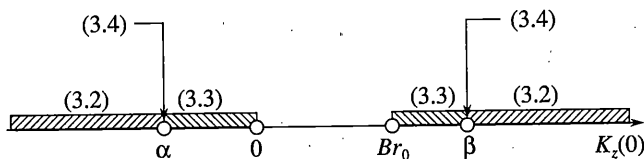
где величины  $\alpha$  и  $\beta$  вычислены по формулам (3.14), а при  $r_0 < 0$  – когда выполняется одно из неравенств

$$\alpha < K_z(0) < -B|r_0|, \quad 0 < K_z(0) < \beta$$

где величины  $\alpha$  и  $\beta$  вычислены по формулам (3.15).

В случае 3), когда выполняется условие (3.4), имеет место равенство  $k = 1$ . При этом эллиптические функции из (3.16) сводятся к гиперболическим

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_0}{\operatorname{ch} \lambda t}, & q &= b \operatorname{th} \lambda t, & r &= \frac{r_0}{\operatorname{ch} \lambda t} \\ \sigma &= \frac{\sigma_0}{\operatorname{ch} \lambda t}, & M_r &= -C_r \lambda (r_0 + \sigma_0) \frac{\operatorname{th} \lambda t}{\operatorname{ch} \lambda t} \end{aligned} \quad (3.18)$$



Фиг. 2

Подстановка (3.18) в уравнения (3.1) приводит к алгебраической системе, решение которой повторяет выражения (3.17) с той разницей, что  $k = 1$ . Величины  $b$  и  $\lambda$  при этом являются действительными, когда выполняется одно из равносильных равенств

$$K_z(0) = \alpha, \quad K_z(0) = \beta \tag{3.19}$$

где величины  $\alpha$  и  $\beta$  в случае  $r_0 > 0$  вычисляются по формулам (3.14), а в случае  $r_0 < 0$  – по формулам (3.15). Из решений (3.18) следует, что с течением времени компоненты угловой скорости  $p, r \rightarrow 0$ , а  $q \rightarrow b \operatorname{sgn}(\lambda)$ , что означает стремление мгновенной оси вращения к оси среднего момента инерции.

Полученные результаты хорошо иллюстрируются схемой интервалов (фиг. 2), где представлен случай, когда  $r_0 > 0$ . Приняв в виде свободной для изменения величину  $K_z(0)$  (или величину  $\sigma_0 = (K_z(0) - Cr_0)/C_r$ ) при фиксированных значениях  $p_0$  и  $r_0$  ( $q_0 = 0$ ) можно разделить области реализации условий (3.2), (3.3) или (3.4). Внутри интервала  $(0, Br_0)$  действительные решения отсутствуют. Отметим, что параметр  $k = 0$  при  $K_z(0) \rightarrow \pm\infty$  и в точках  $K_z(0) = Br_0, K_z(0) = 0$ . При этом в точке  $K_z(0) = Br_0$  проекция угловой скорости на связанную ось, соответствующую моменту инерции  $A$ , постоянна, причем параметры движения и внутренний момент остаются ограниченными в отличие от остальных указанных точек

$$\begin{aligned} b^2 &= r_0^2, \quad \lambda^2 = p_0^2(B - A)^2/B^2, \quad \sigma_0 = r_0(B - C)/C_r \\ p(t) &= p_0, \quad q(t) = b \sin \lambda t, \quad r(t) = r_0 \cos \lambda t, \quad \sigma(t) = \sigma_0 \cos \lambda t \\ M_r &= p_0 r_0 (C - B - C_r)(B - A) \sin \lambda t / B \end{aligned} \tag{3.20}$$

Зависимости (3.20) соответствуют равномерному вращению гиростата вокруг оси  $Ox$ , при действии периодического внутреннего момента.

Перейдем к решению задачи Дарбу [8], т.е. к определению пространственного положения гиростата по известным угловым скоростям. Выберем в качестве неподвижной оси, от которой отсчитывается угол нутации, неизменное направление, соответствующее постоянному вектору кинетического момента. Тогда углы Эйлера находятся следующим образом [21]:

$$\cos \theta = \frac{K_z}{K}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}, \quad \psi = \int K \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} dt \tag{3.21}$$

где  $K = \sqrt{A^2 p_0^2 + (Cr_0 + C_r \sigma_0)^2}$  – неизменная величина кинетического момента.

На основании (3.21) запишем решения для углов Эйлера для всех трех зависимостей угловых скоростей (3.6), (3.16) и (3.18); при этом в первых двух случаях угол прецессии вычисляется квадратурой от эллиптических функций, а для выражений (3.18) сводится к

элементарным функциям. Зависимости углов Эйлера от времени для соотношений (3.6) имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{K}(Cr_0 + C_r \sigma_0) \operatorname{dn} \lambda t, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap_0 \operatorname{cn} \lambda t}{Bbsn \lambda t} \\ \psi &= \int K \frac{Ap_0^2 + (Bb^2 - Ap_0^2) \operatorname{sn}^2 \lambda t}{A^2 p_0^2 + (B^2 b^2 - A^2 p_0^2) \operatorname{sn}^2 \lambda t} dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для соотношений (3.16) имеют место следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{K}(Cr_0 + C_r \sigma_0) \operatorname{cn} \lambda t, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap_0 \operatorname{dn} \lambda t}{Bbsn \lambda t} \\ \psi &= \int K \frac{Ap_0^2 \operatorname{dn}^2 \lambda t + Bb^2 \operatorname{sn}^2 \lambda t}{A^2 p_0^2 \operatorname{dn}^2 \lambda t + B^2 b^2 \operatorname{sn}^2 \lambda t} dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

а для соотношений (3.18) аналогично можно записать

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{Cr_0 + C_r \sigma_0}{K \operatorname{ch} \lambda t}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap_0}{Bb \operatorname{sh} \lambda t} \\ \psi &= \frac{(B-A)Ap_0^2}{\lambda Bd} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{B^2 b^2 - A^2 p_0^2}{A^2 p_0^2}} \operatorname{th} \lambda t \right) + \frac{1}{2\lambda B} \ln \left| \frac{\operatorname{th} \lambda t + 1}{\operatorname{th} \lambda t - 1} \right| + \operatorname{const} \\ d &= \sqrt{A^2 p_0^2 (B^2 b^2 - A^2 p_0^2)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

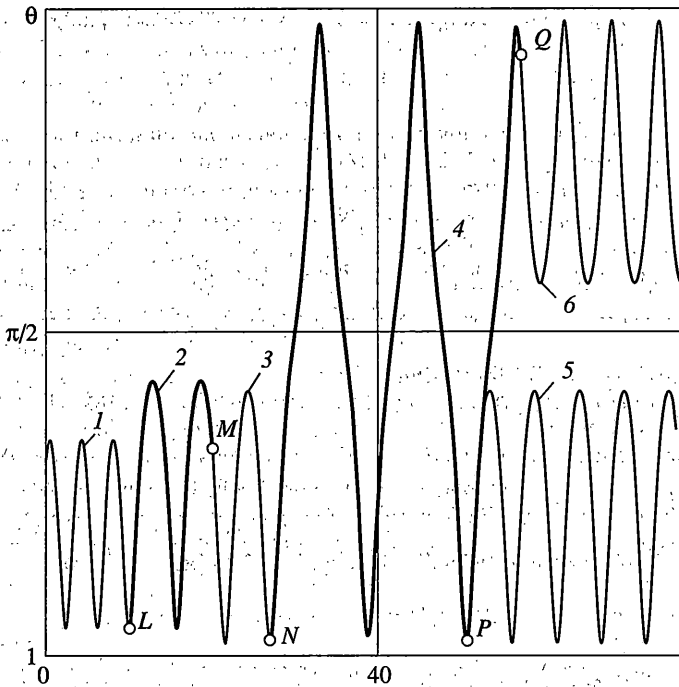
Решения (3.24) соответствуют асимптотическому приближению движения системы к вращению вокруг оси среднего момента инерции; при этом угол нутации стремится к  $\pi/2$ , а угол собственного вращения – к  $\pi$ .

Заметим, что в случае динамической симметрии ( $A = B$ ) гиростат совершает равномерные вращения согласно зависимостям, следующим из решений (3.6), причем в этом случае указанный внутренний момент вырождается ( $k = 0$ ):

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \cos \lambda t, \quad q(t) = p_0 \sin \lambda t, \quad r(t) = r_0, \quad \sigma(t) = \sigma_0 \\ k &= 0, \quad \lambda = Cr_0 + C_r \sigma_0 - Ar_0, \quad M_r = 0 \end{aligned}$$

что также следует из решений Й. Виттенбурга [4] для динамически симметричной системы.

Полученные результаты могут быть использованы в прикладных задачах механики космического полета, в частности, в задаче изменения характеристик пространственного движения и переориентации спутников-гиростатов. Возможен следующий алгоритм решения задачи. В случае, когда спутник-гиростат находится в уравновешенном режиме, выполняя свою целевую функцию, описание его движения проводится на основе решений [4]. При необходимости изменения характеристик движения или переориентации гиростат переводится в неуравновешенный режим, когда со стороны тела-носителя на ротор подается один из указанных выше внутренних моментов, которые обеспечивают переход к движению, описываемому одним из решений (3.6), (3.16) либо (3.18). При достижении требуемых характеристик спутник-гиростат переходит в режим уравновешен-



Фиг. 3

ного движения. Требуемые характеристики пространственного движения могут достигаться посредством серии переходов через различные неуравновешенные режимы, формируемые тремя указанными видами внутренних моментов.

Для примера приведем (фиг. 3) результаты численного интегрирования для угла нутации в серии переходов через уравновешенные и неуравновешенные режимы движения гиростата. Расчет проводился для следующих инерционно-массовых параметров гиростата:  $A = 5$ ,  $B = 6$ ,  $C = 9$ ,  $C_r = 2.5$  [кг · м<sup>2</sup>]. Начальные условия движения, соответствующие точкам перехода приведены в таблице.

Режимы 1, 3, 5 и 6 (тонкие линии) представляют собой уравновешенные режимы, на которых справедливы решения Виттенбурга, а режимы 2 и 4 (полужирные линии) являются неуравновешенными, на которых справедливы решения (3.6) и (3.16), соответственно. Конечные значения каждого предыдущего режима являются начальными значениями для следующего. Точки L-Q являются точками переходов между режимами. В

	$p_0, 1/c$	$q_0, 1/c$	$r_0, 1/c$	$\sigma_0, 1/c$	$\theta_0, \text{рад}$	$\varphi_0, \text{рад}$	$\psi_0, \text{рад}$	$\lambda, 1/c$	$b, 1/c$	$k$
L	3.5	0	1	1	0.989	1.571	0	1.092	3.473	0.984
M	1.307	-3.222	0.408	0.408	1.347	-3.468	36.591	-	-	-
N	-3.435	0	1.218	0.408	0.962	-7.854	62.866	0.983	-3.431	0.975
P	-3.435	0	1.218	0.408	0.962	-7.854	150.606	-	-	-
Q	-3.154	1.394	-1.113	-0.373	2.121	-7.366	174.352	-	-	-

точке  $L$  выполняется условие (3.2), т.е. режим 2 соответствует движению с конусом полостей, содержащим ось  $z$ , а в точке  $N$  справедливо условие (3.3), поэтому для режима 4 характерен конус полостей, содержащий ось  $Ox$ . Таким образом, посредством перехода 2–3–4 осуществляется изменение положения конуса полостей. Далее, при переходе с режима 4 на уравновешенный режим, конус полостей возвращается в положение, при котором снова содержит ось  $z$ , однако в зависимости от момента времени, соответствующего точке перехода, можно обеспечить либо возвращение к параметрам 3 режима (точка  $P$  и режим 5), либо осуществить переориентацию гиростата (точка  $Q$  и режим 6). Выход на режим 6 соответствует переориентации продольной оси  $z$  гиростата в противоположную сторону по отношению к неподвижной оси  $OZ$ . Указанный пример показывает возможность использования полученных результатов для решения задач переориентации КА и изменения характеристик его пространственного движения за счет моментов внутреннего взаимодействия тел.

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы для анализа орбитального и атмосферного движения космических аппаратов с двойным вращением и спутников-гиростатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00151, 04-01-96500р) и Программы Президента РФ по поддержке молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (МК-4707.2006.8).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. М.; Л.: Гостехиздат, 1931. 142 с.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. Румянцев В.В. Об устойчивости движений гиростатов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
4. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М: Мир, 1980. 292 с.
5. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. Ч. 1. 1965. 221 с.
6. Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.А. Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
7. Харламова Е.И., Горр Г.В. О безнутационных движениях твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1976. Вып. 8. С. 23–31.
8. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
9. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением // Космич. исследования. 1976. Т. 14. № 3. С. 366–371.
10. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
11. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Math. 1899. V. 22. P. 201–358.
12. Задачи стабилизации составных спутников. / Под ред. В.В. Белецкого. М.: Мир, 1975. 206 с.
13. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 11–21.
14. Ивин Е.А. Разделение переменных в задаче о движении гиростата // Вестник МГУ, Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 3. С. 69–72.
15. Орешкина Л.Н. Объединение двух задач динамики твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 36–43.
16. Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 4. С. 88–90.
17. Нейштадт А.И., Пивоваров М.Л. Переход через сепаратису в динамике спутника с двойным вращением // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 741–746.

18. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 384 с.
19. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космич. исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 193–200.
20. Асланов В.С., Дорошин А.В. Движение системы соосных тел переменной массы // ПИММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 999–1009.
21. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М: Наука, 1972. 332 с.
22. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
23. Асланов В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
24. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
25. Ламб Г. Теоретическая механика. Т. 3. М.; Л.: Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. 296 с.

Самара

Поступила в редакцию  
23.05.2005