МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 531.38

© 2006 г. Е.К. УЗБЕК

ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ВТОРОГО ТИПА ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Исследованы условия существования прецессионных движений гиростата с неподвижной точкой при условии постоянства скорости собственного вращения в задаче, которую описывают дифференциальные уравнения класса Кирхгофа [1, 2]. Получены новые случаи таких движений, дополняющие результаты [3, 4][1] и соответствующие новым решениям уравнений движения.

Прецессионные движения гиростата с неподвижной точкой, свойством которых является постоянство угла между осями l_1 и l_2 (l_1 неизменно связана с гиростатом, l_2 – неподвижна в пространстве), находят широкое применение в важной для техники теории гироскопических систем. А.Ю. Ишлинским отмечено ([5], с. 353): "После затухания нутации дальнейшее медленное движение оси ротора, именуемое прецессионным, с большой точностью согласуется именно с прецессионными уравнениями теории гироскопов..." Классическим примером прецессионного движения является регулярная прецессия относительно вертикали гироскопа Лагранжа в поле силы тяжести. Прецессии несимметричных тел рассматривали Г.Г. Аппельрот [6] и Д. Гриоли [7]. Г.Г. Аппельрот установил, что гироскопы, подобные гироскопам Ковалевской и Горячева – Чаплыгина, не могут иметь прецессионные движения, отличные от маятниковых движений. Д. Гриоли открыл регулярную прецессию несимметричного тела относительно наклонной оси. В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и различных ее обобщениях много результатов получил Г.В. Горр (см., например, [3, 8–10]). Большинство из них относятся к изучению прецессий в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые обусловлены действием электрического, магнитного и ньютоновского полей на намагниченный и заряженный гиростат [2]. Интерес изучения прецессий в этой задаче состоит в том, что она описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа [1, 2] и в силу гидродинамической аналогии [2] все ее результаты можно перенести в задачу о движении тяжелого твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости.

К настоящему времени в указанной задаче полностью изучены регулярные прецессии [11] и полурегулярные прецессии первого типа [12, 13]. Полурегулярные прецессии второго типа исследованы только в частных случаях [3, 4]. В данной статье эти прецессии рассмотрены в случае, когда допустима специальная параметризация одного из алгебраических уравнений, определяющего условия существования данного класса прецессий.

[1] *Горр Г.В., Саркисьянц Е.В., Узбек Е.К.* Изоконические движения в динамике твердого тела с неподвижной точкой. Препринт № 03.01. Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ, 2001. 30 с.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой в постановке [2]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\mathbf{v}+\mathbf{s}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times C\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, вычисленный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1.1) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} &(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})-2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})+(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2E, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1 \\ &(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{v}-1/2(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = k \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Движение гиростата называют прецессией относительно вертикали [8], если постоянен угол между вектором $\mathbf{a}$, который принадлежит гиростату, и вектором $\mathbf{v}$. Его можно охарактеризовать инвариантным соотношением

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = a_0, \quad a_0 = \cos\theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\mathbf{a},\mathbf{v}) \tag{1.3}$$

Производная от соотношения (1.3) в силу уравнения Пуассона из (1.1) приводит к условию $\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) = 0$, т.е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ в течение всего времени движения лежит в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a}+\dot{\psi}\mathbf{v} \tag{1.4}$$

Здесь $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ – скорости собственного вращения и прецессии гиростата. Положим $\dot{\varphi} = n_0$, где n_0 – постоянная. Тогда прецессионное движение называется полурегулярной прецессией второго типа [8, 10]. Следуя работе [8], уравнению Пуассона, инвариантному соотношению (1.3) и геометрическому интегралу $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1$ из системы (1.2) можно удовлетворить соотношениями

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} = (0, 0, 1), \quad \nu_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0 \\ &a_0' = \sin\theta_0, \quad \varphi = n_0 t+\varphi_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Компоненты угловой скорости найдем из (1.4):

$$\omega_1 = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi, \quad \omega_3 = n_0+a_0\dot{\psi} \tag{1.6}$$

Равенства (1.5), (1.6) определяют кинематические условия полурегулярных прецессий второго типа. Динамические условия этих движений найдем с помощью метода, указанного в [8]. Согласно этому методу необходимо исследовать систему уравнений

$$\begin{aligned} &n_0^2[(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})^2]+\left[k-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})+\frac{1}{2}(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\right]^2- \\ &-(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})[2E+2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})-(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})] = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}[(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})+2k-2(\boldsymbol{\lambda}+n_0A\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}] \tag{1.8}$$

$$\ddot{\psi}[A\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{a})]+\dot{\psi}^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+\dot{\psi}[a_0'^2 n_0\mathrm{Sp}(A)+2a_0n_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a})+$$
$$+a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})-(B\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})-2a_0k]+n_0^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s})+a_0(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})-(C\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+ \tag{1.9}$$
$$+n_0[a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a})-a_0(B\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})-2k]+2a_0E=0$$

где $\mathrm{Sp}(A)$ – след матрицы A. Отметим, что уравнение (1.9) отличается от соответствующего уравнения работы [8], поскольку оно является результатом преобразования уравнения [8] с помощью соотношений (1.7), (1.8).

Для получения условий существования прецессий необходимо в уравнения (1.7)–(1.9) подставить выражения (1.5) и $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$, $A=(A_{ij})$, $B=(B_{ij})$, $C=(C_{ij})$. При этом уравнение (1.7) должно быть тождеством по φ, уравнение (1.8) определяет зависимость $\psi(t)$, а уравнение (1.9) для данной $\psi(t)$ должно быть тождеством по φ. Однако, такой прямой путь приводит к громоздким вычислениям [3, 4]. Поэтому в данной работе использован другой подход.

2. Анализ уравнения (1.7). Представим (1.7) в виде

$$\left[\frac{1}{2}(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(\boldsymbol{\lambda}-n_0A\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}+k\right]\left[\frac{1}{2}(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(\boldsymbol{\lambda}+n_0A\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}+k\right]= \tag{2.1}$$
$$=(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})[2E-n_0^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})-(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})]$$

Остановимся на случае, когда уравнение (2.1) допускает параметризацию

$$[(B-2\mu_0A)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}]-2[(\boldsymbol{\lambda}-n_0A\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}]+2k=0$$
$$[(2C+\mu_0B)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}]-2[(2\mathbf{s}+\mu_0\boldsymbol{\lambda}+\mu_0n_0A\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}]+2k\mu_0+2n_0^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-4E=0 \tag{2.2}$$

где μ_0 – постоянный параметр. Несмотря на частный характер этого случая, его рассмотрение привело к новым решениям уравнений (1.1). Выбирая подвижную систему координат таким образом, чтобы выполнялось равенство $A_{12}=0$, потребуем тождественного выполнения равенств (2.2) относительно φ:

$$B_{12}=0,\quad C_{12}=0,\quad B_{22}-B_{11}=2\mu_0(A_{22}-A_{11}),\quad C_{22}-C_{11}=\mu_0^2(A_{11}-A_{22}) \tag{2.3}$$

$$\lambda_1=a_0B_{13}+(n_0-2a_0\mu_0)A_{13},\quad \lambda_2=a_0B_{23}+(n_0-2a_0\mu_0)A_{23} \tag{2.4}$$

$$s_1=a_0C_{13}+\mu_0(a_0\mu_0-n_0)A_{13},\quad s_2=a_0C_{23}+\mu_0(a_0\mu_0-n_0)A_{23} \tag{2.5}$$

$$2k=2a_0(a_0\mu_0-n_0)A_{33}+2a_0\lambda_3-a_0^2B_{33}-a_0'^2(B_{11}-2\mu_0A_{11}) \tag{2.6}$$

$$2E=a_0^2C_{33}+(a_0\mu_0-n_0)^2A_{33}-2a_0s_3+a_0'^2(C_{11}+\mu_0^2A_{11}) \tag{2.7}$$

Третье и четвертое равенства из системы (2.3) можно параметризовать следующим образом:

$$B_{11}=b_0+2\mu_0A_{11},\quad B_{22}=b_0+2\mu_0A_{22}$$
$$C_{11}=c_0-\mu_0^2A_{11};\quad C_{22}=c_0-\mu_0^2A_{22} \tag{2.8}$$

где b_0 и c_0 – постоянные параметры. Если $A_{22}\neq A_{11}$, то из указанных равенств следует условие

$$(B_{22}-B_{11})^2=4(A_{11}-A_{22})(C_{22}-C_{11}) \tag{2.9}$$

Следовательно, из уравнений (2.2) вытекают соотношения (2.4)–(2.9). Уравнение (2.6), (2.7) дают значения постоянных первых интегралов. Отметим, что вариант, когда одна из квадратных скобок равна нулю, следует из общего случая при $\mu_0 = 0$.

Если выполнены условия (2.3), (2.6), то выражение (1.8) упрощается

$$\dot\psi = \mu_0 - \frac{2n_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})}{A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \tag{2.10}$$

3. Исследование уравнения (1.9). Структура скорости прецессии из (2.10) позволяет ввести новую переменную $\upsilon = \psi - \mu_0 t$, для которой

$$\dot\upsilon = -\frac{2n_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})}{A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = -\frac{2n_0(p_1\sin\varphi + q_1\cos\varphi + p_0)}{q_2\cos 2\varphi + 2a_0p_1\sin\varphi + 2a_0q_1\cos\varphi + q_0} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} p_0 = a_0A_{33}, \quad p_1 = a_0'A_{13}, \quad q_1 = a_0'A_{23} \\ q_2 = 1/2a_0'^2(A_{22}-A_{11}), \quad q_0 = a_0^2A_{33} + 1/2a_0'^2(A_{11}+A_{22}) \end{gathered} \tag{3.2}$$

С помощью соотношений (1.5), (2.4)–(2.10), (3.1) уравнение (1.9) представим в следующем виде

$$\begin{gathered} n_0^2(q_2\sin 2\varphi - a_0p_1\cos\varphi + a_0q_1\sin\varphi)[q_1q_2\sin 3\varphi - \\ -p_1q_2\cos 3\varphi + 4p_0q_2\sin 2\varphi + q_1(4a_0p_0 - 2q_0 + 3q_2)\sin\varphi + \\ +p_1(-4a_0p_0 + 2q_0 + 3q_2)\cos\varphi] + 4n_0^2(p_1\sin\varphi + q_1\cos\varphi + p_0)^3 - \\ -2n_0(p_1\sin\varphi + q_1\cos\varphi + p_0)(q_2\cos 2\varphi + 2a_0p_1\sin\varphi + 2a_0q_1\cos\varphi + \\ +q_0)(Q_1\sin\varphi + P_1\cos\varphi + Q_0) + (q_2\cos 2\varphi + 2a_0p_1\sin\varphi + \\ +2a_0q_1\cos\varphi + q_0)^2(R_1\sin\varphi + S_1\cos\varphi + R_0) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} Q_1 = a_0'[(3a_0n_0 + 2a_0'^2\mu_0)A_{13} - a_0'^2B_{13}] \\ P_1 = a_0'[(3a_0n_0 + 2a_0'^2\mu_0)A_{23} - a_0'^2B_{23}] \\ Q_0 = n_0(4a_0^2A_{33} + a_0'^2\mathrm{Sp}(A)) + a_0'^2[\lambda_3 + a_0(b_0 + 2\mu_0A_{33} - B_{33})] \\ R_1 = a_0'[a_0'^2(\mu_0^2A_{13} - \mu_0B_{13} - C_{13}) + 2n_0^2A_{13}] \\ S_1 = a_0'[a_0'^2(\mu_0^2A_{23} - \mu_0B_{23} - C_{23}) + 2n_0^2A_{23}] \\ R_0 = 4a_0n_0^2A_{33} + a_0'^2\{s_3 + \lambda_3\mu_0 + a_0[\mu_0^2A_{33} + \mu_0(b_0 - B_{33}) - C_{33} + c_0] + \\ +n_0(b_0 + \mu_0\mathrm{Sp}(A))\} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Рассмотрим случай $q_2 \neq 0$, то есть полагаем $A_{22} \neq A_{11}$. Потребуем, чтобы уравнение (3.3) было тождеством по переменной φ. Тогда равенства нулю коэффициентов при $\sin 5\varphi$, $\cos 5\varphi$ приводят к условиям

$$\mu_0^2A_{13} - \mu_0B_{13} - C_{13} = 0, \quad \mu_0^2A_{23} - \mu_0B_{23} - C_{23} = 0 \tag{3.5}$$

Используя (3.5) для исследования уравнения (3.3), запишем равенства нулю коэффициентов при $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$:

$$4\mu_0 A_{13} A_{23} - A_{13} B_{23} - A_{23} B_{13} = 0 \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}4 n_0 \mu_0 (A_{13}^2 - A_{23}^2) + 2 n_0 (A_{23} B_{23} - A_{13} B_{13}) + (A_{22} - A_{11}) [a_0 (\mu_0^2 A_{33} + \\ + \mu_0 (b_0 - B_{33}) - C_{33} + c_0) + n_0 (b_0 + \mu_0 \mathrm{Sp}(A)) + \lambda_3 \mu_0 + s_3] = 0\end{gathered} \tag{3.7}$$

Рассмотрим вариант $A_{23} = A_{13} = 0$, при выполнении которого уравнение (3.6) является тождеством. На основании обозначений (3.2) и формул (2.10), (3.1) будем предполагать, что $a_0 \neq 0$, так как при $a_0 = 0$ прецессия становится регулярной. Из уравнения (3.3) следует, что оно может быть тождеством только при ограничениях

$$B_{23} = B_{13} = 0, \quad a_0^2 A_{33} (A_{11} + A_{22} - A_{33}) + a_0'^2 A_{11} A_{22} = 0$$

последнее из которых не может выполняться в силу неравенства треугольника на моменты инерции. Таким образом, равенства $A_{23} = 0$, $A_{13} = 0$ одновременно выполняться не могут.

Положим, что ни одна из величин A_{13} и A_{23} не обращается в нуль. Тогда уравнение (3.6) можно параметризовать так:

$$B_{13} = (2\mu_0 - x_0) A_{13}, \quad B_{23} = (2\mu_0 + x_0) A_{23} \tag{3.8}$$

где x_0 – параметр. С помощью обозначений (3.4), в которых учтены выражения (3.8), и соотношения (3.7) из уравнения (3.3) определим равенства нулю коэффициентов при $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$:

$$\begin{gathered}p_1 [a_0'^2 n_0^2 (3 q_1^2 - p_1^2) + N_0] = 0, \quad q_1 [a_0'^2 n_0^2 (q_1^2 - 3 p_1^2) + N_0] = 0 \\ N_0 = n_0 [n_0 q_2 (a_0 p_0 + q_2 + 3 q_0) - q_2 Q_0 - a_0'^2 x_0 (a_0 (p_1^2 + q_1^2) + p_0 q_2)]\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из уравнений (3.9) в силу $p_1 \neq 0$, $q_1 \neq 0$ вытекает, что $p_1^2 + q_1^2 = 0$. Следовательно, необходимо считать, что одна из величин A_{13}, A_{23} обращается в нуль. Без ограничения общности положим $A_{23} = 0$. Тогда из (3.6) вытекает равенство $B_{23} = 0$, а из второго уравнения системы (3.5) следует равенство $C_{23} = 0$. Данные условия позволяют упростить уравнение (3.3), записав его в виде многочлена четвертой степени относительно $\sin\varphi$. Тогда можно определить дополнительные условия существования прецессии в виде системы уравнений

$$q_2 (q_2 R_0 - 4 n_0^2 p_0 q_2 + n_0 p_1 Q_1 - 3 a_0 n_0^2 p_1^2) = 0 \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}n_0 p_1 [n_0 (2 a_0^2 p_1^2 + 2 a_0 p_0 q_2 - q_2 \alpha_1 + 2 q_2^2 + p_1^2 - 2 q_2 \alpha_2) + \\ + q_2 Q_0 - a_0 p_1 Q_1] + n_0 p_0 q_2 Q_1 - 2 a_0 p_1 q_2 R_0 = 0\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}n_0 p_1 [n_0 (a_0 p_1 \alpha_1 + 4 a_0 p_1 \alpha_2 - 2 a_0 p_1 q_2 + 6 p_0 p_1) - 2 a_0 p_1 Q_0 - \\ - (2 a_0 p_0 + \alpha_2) Q_1] + 8 n_0^2 p_0 q_2^2 + 2 (a_0^2 p_1^2 - q_2 \alpha_2) R_0 + 2 n_0 p_0 q_2 Q_0 = 0\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}n_0 p_1 [n_0 (2 q_2 \alpha_1 - 4 a_0 p_0 q_2 + 6 p_0^2 + \alpha_2^2) - (2 a_0 p_0 + \alpha_2) Q_0] - \\ - n_0 p_0 \alpha_2 Q_1 + 2 a_0 p_1 \alpha_2 R_0 = 0\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\alpha_2^2 R_0 + 2n_0^2(2p_0^3 - a_0 p_1^2 \alpha_2) - 2n_0 p_0 \alpha_2 Q_0 = 0 \tag{3.14}$$

$$\alpha_1 = a_0'^2 A_{22} - a_0^2 A_{33}, \quad \alpha_2 = a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33} \tag{3.15}$$

Несмотря на достаточно сложный вид системы (3.10)–(3.15), ее решение можно получить в общем случае. Приведем вначале результаты анализа этой системы в особом случае $q_2 = 0$. Используя формулы (2.4), (2.5), (2.8), (2.9), (3.5), запишем условия существования прецессии (1.5), (1.6) через параметры уравнений (1.1)

$$\begin{aligned} &A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{22} = A_{11} \\ &B_{12} = B_{23} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad b_0 = B_{11} - 2\mu_0 A_{11} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} &C_{12} = C_{23} = 0, \quad C_{22} = C_{11} \\ &c_0 = C_{11} + \mu_0^2 A_{11}, \quad \mu_0^2 A_{13} - \mu_0 B_{13} - C_{13} = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \; n_0 = \frac{a_0}{A_{13}}(2\mu_0 A_{13} - B_{13}) \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &(A_{11} - a_0^2 A_{33})(2\mu_0 A_{13} - B_{13}) + \\ &+ a_0 A_{13}[2a_0\mu_0(A_{33} - A_{11}) + a_0(B_{11} - B_{33}) + \lambda_3] = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\operatorname{tg}^2\theta_0 = \frac{1}{A_{11}}(A_{33} + 2\sqrt{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &n_0^2[a_0^2 A_{33} - (a_0^2 + 1)A_{11}] + 2a_0 n_0 A_{13}[(2a_0^2 - 1)\mu_0 - a_0\lambda_3 + a_0^2 B_{33}] + \\ &+ 2a_0^2[a_0 s_3 - \mu_0^2(A_{33} - A_{11}) - a_0^2(C_{33} - C_{11})] = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Соотношения (3.16), (3.17) показывают, что векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны вектору $\mathbf{a}$ и лежат на оси, ортогональной круговому сечению эллипсоида инерции и эллипсоидов $B_{11}(x^2 + y^2) + B_{33}z^2 + 2B_{13}zx = \mathrm{const}$, $C_{11}(x^2 + y^2) + C_{33}z^2 + 2C_{13}xz = \mathrm{const}$. Последнее равенство из (3.17) служит для определения μ_0:

$$\mu_0 = \frac{B_{13} \pm \sqrt{B_{13}^2 + 4A_{13}C_{13}}}{2A_{13}} \quad (B_{13}^2 + 4A_{13}C_{13} \geq 0)$$

а последнее равенство из (3.18) позволяет найти скорость собственного вращения гиростата. Из условия (3.20) вытекает, что угол θ_0 зависит только от моментов инерции гиростата. Равенство (3.19) может быть использовано для определения параметра λ_3, а равенство (3.21) после подстановки в него n_0, x_0, λ_3 и a_0 позволяет установить значение s_3. По своему механическому смыслу параметры λ_3 и s_3 могут принимать произвольные значения и поэтому система уравнений при $B_{13}^2 + 4A_{13}C_{13} \geq 0$ имеет решение.

Для определения зависимости $\psi(t)$ обратимся к уравнениям (2.10), (3.1). В силу условий (3.16), (3.20) имеем

$$\begin{aligned} &\psi(t) = \frac{a_0\mu_0 - n_0}{a_0}t - 2\operatorname{arctg}\left[(\beta_1 - \beta_0)\operatorname{tg}\left(\frac{n_0 t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \psi_0 \\ &\beta_0 = \frac{a_0(a_0^2 A_{33} + a_0'^2 A_{11})}{a_0'^2 A_{11} - a_0^2 A_{33}}, \quad \beta_1 = \frac{2a_0^2 a_0' A_{13}}{a_0'^2 A_{11} - a_0^2 A_{33}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

где ψ_0 – постоянная.

Так как в силу (3.20) выполняется соотношение $\beta_0^2 = 1 + \beta_1^2$, то при $a_0\mu_0 - n_0 = 0$ движение гиростата будет обладать не только свойством прецессионности, но и свойством изоконичности [8]. Данное ограничение справедливо при $C_{13} = 0$, $\mu_0 = B_{13}/A_{11}$.

Покажем разрешимость системы (3.10)–(3.14) при $q_2 \neq 0$. Из уравнений (3.10), (3.11) определим Q_1 и Q_0:

$$Q_1 = \frac{1}{a_0 n_0 p_1}\{n_0^2[2q_2(\alpha_2-\alpha_1)+3a_0^2p_1^2] - a_0q_2R_0\} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} Q_0 = \frac{1}{2a_0^2n_0p_1^2q_2}\{&a_0^2n_0^2p_1^2[3q_2(\alpha_1+\alpha_2) - 2a_0'^2p_1^2 - 4q_2^2] - \\ &-2n_0^2q_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^2 + a_0q_2R_0[q_2(\alpha_2-\alpha_1) - 2a_0^2p_1^2]\} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Внесем выражения для Q_1 и Q_0 из (3.23), (3.24) в уравнения (3.12)–(3.14):

$$\begin{aligned} a_0q_2\alpha_2R_0\lfloor q_2(\alpha_2-\alpha_1)^2 - 2a_0^2p_1^2\alpha_1\rfloor &= n_0^2\{2a_0^2p_1^4[a_0'^2\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) - \\ &-2a_0^2q_2\alpha_1] + p_1^2q_2(\alpha_2-\alpha_1)\lfloor 4a_0^2q_2\alpha_2 - 3a_0^2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_2-\alpha_1)^2\rfloor + \\ &+2q_2^2\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)^3\} \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} a_0q_2R_0\lfloor q_2(\alpha_2-\alpha_1)^2 - 2a_0^2p_1^2\alpha_1\rfloor &= n_0^2\{4a_0^2p_1^2q_2^2(\alpha_1+\alpha_2) + \\ &+p_1^2q_2[2a_0^2\alpha_2^2 - 3a_0^2(\alpha_1+\alpha_2)(2\alpha_2-\alpha_1) - 3a_0^2\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) + \\ &+3(\alpha_2-\alpha_1)^2] + 2a_0^2a_0'^2p_1^4(2\alpha_2-\alpha_1) + 2q_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^3\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} a_0q_2^2R_0\lfloor q_2(\alpha_2-\alpha_1)^2 - 2a_0^2p_1^2\alpha_1\rfloor &= n_0^2\{p_1^4q_2[2a_0^4(5\alpha_2-\alpha_1) + \\ &+2a_0^2a_0'^2(\alpha_2-\alpha_1) - 6a_0^2(\alpha_2-\alpha_1)] - 4a_0^2p_1^2q_2^3(\alpha_2-\alpha_1) - 4a_0^4p_1^4q_2^2 + \\ &+a_0^2p_1^2q_2^2(\alpha_2-\alpha_1)(9\alpha_1-11\alpha_2) + 2q_2^3(\alpha_2-\alpha_1)^3 - 4a_0^4a_0'^2p_1^6\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Предполагая, что $q_2(\alpha_2-\alpha_1)^2 - 2a_0^2p_1^2\alpha_1 \neq 0$, исключим с помощью уравнения (3.25) величину R_0 из уравнений (3.26), (3.27):

$$\begin{aligned} &4a_0^4p_1^2q_2\alpha_1 + 8a_0^2q_2^2\alpha_1\alpha_2 + 2a_0^2a_0'^2p_1^2\alpha_2^2 + \\ &+q_2[(\alpha_2-\alpha_1)^2(2\alpha_2+\alpha_1) - 4a_0^2\alpha_2^3] = 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &4a_0^4p_1^2q_2^2 + 4a_0^4a_1'^2p_1^4 + 8a_0^2q_2^3\alpha_2 + 2a_0^2p_1^2q_2[3(\alpha_2-\alpha_1) - \\ &-a_0^2(5\alpha_2-\alpha_1) + a_0'^2\alpha_2] + q_2^2[3(\alpha_2-\alpha_1)^2 - 4a_0^2\alpha_2(2\alpha_2-\alpha_1)] = 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Обозначим $\sigma_0 = \mathrm{ctg}^2\theta_0$. На основании обозначений (3.2), (3.15) уравнения (3.28), (3.29) преобразуем к виду

$$\sigma_0 = \frac{A_{22}(A_{22}-A_{11})[A_{11}(A_{22}-A_{11}) - A_{13}^2]}{4A_{13}^4 + A_{13}^2(A_{22}-A_{11})(7A_{33}-3A_{22}-A_{11}) + A_{33}(A_{22}-A_{11})^2(3A_{33}-3A_{22}-A_{11})} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_0^2 A_{33}(A_{33}-A_{22}+A_{11})[A_{13}^2+A_{33}(A_{22}-A_{11})]+\\&+\sigma_0 A_{22}[A_{13}^2(2A_{33}+A_{22}-A_{11})+3A_{33}(A_{22}-A_{11})(A_{33}-A_{22})]+\\&+A_{22}^2[A_{13}^2-A_{11}(A_{22}-A_{11})] = 0\end{aligned} \tag{3.31}$$

Уравнения (3.30), (3.31) совместны только при выполнении условия

$$4A_{13}^4+A_{13}^2(A_{22}-A_{11})(4A_{33}-3A_{22}-A_{11})-A_{11}A_{33}(A_{22}-A_{11})^2 = 0 \tag{3.32}$$

Тогда значение σ_0 из (3.30) упрощается

$$\sigma_0 = \frac{A_{13}^2 A_{22}}{A_{33}[A_{13}^2+A_{33}(A_{22}-A_{11})]} \tag{3.33}$$

При условии (3.33) справедливо равенство $q_2(\alpha_2-\alpha_1)^2-2a_0^2p_1^2\alpha_1=0$. То есть мог бы встретиться особый случай в исследовании системы (3.28), (3.29). Однако этого не происходит, поскольку при условии $q_2(\alpha_2-\alpha_1)^2-2a_0^2p_1^2\alpha_1=0$ правые части уравнений (3.25)–(3.27) обращаются в нуль только при выполнении равенства (3.32). Следовательно, система (3.25)–(3.27) имеет решение, если выполнены условия (3.32), (3.33). При этом не появляется ограничение на величину R_0.

Рассмотрим уравнение (3.23). Поскольку оно является следствием уравнения (3.7), когда в последнем $A_{23}=0$, $B_{23}=0$, то из (3.7) найдем n_0:

$$n_0 = \frac{(A_{22}-A_{11})\{a_0[C_{33}-c_0+\mu_0(B_{33}-B_{11})+\mu_0^2(A_{11}-A_{33})]-s_3-\lambda_3\mu_0\}}{4\mu_0A_{13}^2+(A_{22}-A_{11})[B_{11}+\mu_0(A_{22}+A_{33}-A_{11})]-2A_{13}B_{13}} \tag{3.34}$$

Последнее условие на параметры задачи целесообразно представить в виде линейной комбинации (3.23), (3.24), которая не содержит R_0. Подставив в нее значения (3.2), выражения Q_0 и Q_1 из (3.4), величины α_1 и α_2 из (3.15), определим соотношение на параметры λ_3, s_3. В силу громоздкости выписывать его не будем. Отметим лишь, что параметры λ_3 и s_3 будут входить в это соотношение линейно.

Рассмотрим уравнения (2.10), (3.1). На основании равенства $\varphi = n_0t+\varphi_0$, в котором считаем $\varphi_0=0$, и условий (3.32), (3.33) из (2.10), (3.1) найдем

$$\begin{gathered}\dot\psi = \mu_0-\frac{n_0}{\gamma_0+\gamma_1\sin n_0t},\\ \gamma_0 = \frac{a_0[2A_{13}^2+A_{33}(A_{22}-A_{11})]}{2(A_{13}^2)},\quad \gamma_1 = -\frac{a_0'(A_{22}-A_{11})}{2A_{13}}\end{gathered} \tag{3.35}$$

где величины γ_0 и γ_1 удовлетворяют условию $\gamma_0^2=1+\gamma_1^2$. Поэтому из (3.35) вытекает

$$\psi(t) = \mu_0t+2\,\mathrm{arctg}\left[(\gamma_1-\gamma_0)\,\mathrm{tg}\left(\frac{n_0t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\psi_0 \tag{3.36}$$

Здесь ψ_0 – произвольная постоянная. Зависимость переменных ν_1, ν_2, ν_3 и ω_1, ω_2, ω_3 получим подстановкой $\varphi=n_0t$ и ψ из (3.35) в формулы (1.5), (1.6). Итак, на основании установленных результатов условия существования прецессий второго типа состоят из соотношений

$$A_{23} = A_{12} = 0, \quad B_{23} = B_{12} = 0, \quad B_{22}-B_{11} = 2\mu_0(A_{22}-A_{11}), \quad C_{23} = C_{12} = 0$$

$$C_{22}-C_{11} = \mu_0^2(A_{11}-A_{22}), \quad \lambda_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad \mu_0^2A_{13}-\mu_0B_{13}-C_{13} = 0$$

$$\lambda_1 = a_0B_{13}+(n_0-2a_0\mu_0)A_{13}, \quad s_1 = a_0C_{13}+\mu_0(a_0\mu_0-n_0)A_{13}$$

и равенств (3.24), (3.32)–(3.34). Вариант прецессионно-изоконического движения, рассмотренный в препринте (см. сноску на первой странице) следует из полученного здесь случая при $\mu_0 = 0$. Интересно отметить, что условия (3.32), (3.33) характеризуют классическое решение А.И. Докшевича [14] и его обобщение [8], полученное Г.В. Горром для уравнений (1.1).

4. Вариант $a_0 = 0$. Проведенные в п. 3 исследования имели место при условии $a_0 \neq 0$. Поэтому рассмотрим случай $a_0 = 0$ ($\theta_0 = \pi/2$), предполагая вначале $q_2 = 0$. Уравнение (3.3) может быть тождеством по φ только при наличии равенства $p_1 = 0$. Тогда из (2.10), (3.1) следует, что прецессия является регулярной. Но так как при $a_0 = 0$, $q_2 = 0$ существует вариант прецессии второго типа, установленный в [4], то это означает, что прецессию [4] установить применяемым в статье методом невозможно. Это обусловлено свойством параметризации соотношения (2.1).

Пусть в соотношениях (1.5), (1.6), (2.4)–(2.7), (3.1), (3.3) $a_0 = 0$, $q_2 \neq 0$ ($A_{22} \neq A_{11}$). Уравнение (3.3) является тождеством по φ при выполнении условий $R_0 = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = n_0(2q_2 + \alpha_2)$. Принимая во внимание обозначения (3.4), выпишем полные условия существования прецессии при $\theta_0 = \pi/2$:

$$\begin{gathered}
A_{23} = A_{12} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{11}(A_{22}-A_{11}), \quad B_{23} = B_{12} = 0 \\
B_{13} = 2\mu_0A_{13}, \quad B_{22}-B_{11} = 2\mu_0(A_{22}-A_{11}), \quad C_{23} = C_{12} = 0 \\
C_{13} = -\mu_0^2A_{13}, \quad C_{22}-C_{11} = \mu_0^2(A_{11}-A_{22}), \quad \lambda_1 = n_0A_{13}, \quad \lambda_2 = 0 \\
s_1 = -n_0\mu_0A_{13}, \quad s_2 = 0, \quad n_0 = \frac{\lambda_3}{A_{22}-2A_{11}-A_{33}} \\
s_3(A_{22}-2A_{11}-A_{33})+\lambda_3[B_{11}+\mu_0(2A_{22}-3A_{11})] = 0
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Зависимость $\psi(t)$ найдем с помощью уравнений (2.10), (3.1):

$$\psi(t) = \mu_0t+\frac{2A_{13}}{\sqrt{A_{11}(A_{22}-A_{11})}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A_{22}-A_{11}}{A_{11}}}\cos n_0t\right)+\psi_0 \tag{4.2}$$

Таким образом, если выполнены условия (4.1), то движение гиростата является прецессией второго типа, для которой $\varphi = n_0t$, а $\psi(t)$ определяется формулой (4.2). При этом в течение времени движения вектор **a** ортогонален вектору **ν** оси симметрии силового поля.

5. Случай $q_2 = 0$. Ранее этот случай был рассмотрен в рамках варианта, когда выполнены условия (3.5). В данном пункте его изучение проведем в общем виде, т.е. без учета (3.5). Поскольку $A_{22} = A_{11}$, то поворотом подвижной системы координат можно добиться равенства $A_{23} = 0$. Так как при этом $q_1 = 0$, то в силу (2.10), (3.1) исключаем случай $A_{13} = 0$, приводящий к регулярной прецессии. Обратимся к уравнению (3.3) и выпишем равенства нулю коэффициентов при $\sin3\varphi$, $\cos3\varphi$ и $\sin2\varphi$:

$$
\begin{aligned}
&a_0^2 R_1 - a_0 n_0 Q_1 + n_0^2 p_1 = 0 \\
&n_0 P_1 - a_0 S_1 = 0, \quad n_0(2a_0 p_0 + q_0)P_1 - 2a_0 q_0 S_1 = 0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Если предположить, что P_1 и S_1 отличны от нуля, то приходим к равенству $2a_0p_0 - q_0 = 0$. Но тогда выражение для υ из (3.1) не зависит от φ, т.е. прецессия регулярная. Поэтому следует положить $P_1 = 0$, $S_1 = 0$. На основании обозначений (3.4) имеем $B_{23} = 0$, $C_{23} = 0$. Следовательно, в системе (5.1) остается одно равенство:

$$
(n_0 - a_0\mu_0)^2 A_{13} + a_0(n_0 - a_0\mu_0)B_{13} - a_0^2 C_{13} = 0 \tag{5.2}
$$

При полученных условиях уравнение (3.3) можно рассматривать, как уравнение относительно новой переменной $u = \sin\varphi$. Требуя, чтобы оно было тождеством по этой переменной, и обозначая для краткости

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = p_1\tau_0, \quad R_1 = \frac{n_0 p_1}{a_0^2}(a_0\tau_0 - n_0), \quad \tau_0 = 3a_0 n_0 - a_0'^2 \varepsilon_0 \\
&\varepsilon_0 = B_{13}/A_{13}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

получим систему равенств:

$$
Q_0 = \frac{1}{2a_0^2}[a_0 q_0(2a_0 n_0 + \tau_0) - 3n_0(q_0 - 2a_0 p_0)] \tag{5.4}
$$

$$
R_0 = \frac{n_0}{2a_0^3}[2a_0^2 p_0(a_0 n_0 + \tau_0) - a_0'^2 n_0 q_0] \tag{5.5}
$$

$$
2a_0 n_0^2 p_1^2(2a_0 p_0 - q_0) + 2n_0 p_0(2n_0 p_0^2 - q_0 Q_0) + q_0^2 R_0 = 0 \tag{5.6}
$$

В проведенных преобразованиях, учтено условие (5.2). Если в уравнение (5.6) подставить выражения (5.4), (5.5), то найдем равенство, которое можно рассматривать как уравнение относительно $\sigma_0 = \operatorname{tg}^2\theta_0$. Вычисления показывают, что эта величина имеет значение (3.20). Зависимость $\psi(t)$ в данном варианте определяется формулой (3.22). Таким образом, условия существования прецессий при $q_2 = 0$ состоит из равенств

$$
\begin{aligned}
&A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{22} = A_{11}, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \quad B_{22} = B_{11} \\
&b_0 = B_{11} - 2\mu_0 A_{11}, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \quad C_{22} = C_{11}, \quad c_0 = C_{11} + \mu_0^2 A_{11} \\
&\lambda_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad \lambda_1 = a_0 B_{13} + (n_0 - 2a_0\mu_0)A_{13} \\
&s_1 = \frac{n_0 - a_0\mu_0}{a_0}\lambda_1, \quad n_0 = a_0\mu_0 - \frac{a_0}{2A_{13}}\left(B_{13} \pm \sqrt{B_{13}^2 + 4A_{13}C_{13}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

и равенств (3.20), (5.4), (5.5). При этом равенство (3.20) дает зависимость θ_0 от моментов инерции гиростата, а равенства (5.4), (5.5) позволяют с учетом (5.7) найти условия на параметры λ_3 и s_3. Так же, как и в случае (3.22) при выполнении условия $n_0 = a_0\mu_0$ (т.е. равенства $C_{13} = 0$) движение гиростата обладает не только свойством прецессии второго типа, но и свойством изоконичности. Отличие вариантов, которые определяются равенствами (3.16)–(3.21) и (5.4), (5.5), (5.7) соответственно состоит в том, что во втором варианте векторы **λ** и **s** не коллинеарны вектору **a**. Однако в обоих случаях вектор **a** ортогонален круговому сечению эллипсоидов, которые соответствуют матрицам *A*, *B*, *C* (см. п. 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 2001. Вып. 31. С. 3–17.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II // J. Théor. Appl. Méch. 1986. T. 5. № 5. P. 755–762.
3. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Прецессионно-изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 31–39.
4. *Мазнев А.В.* О полурегулярной прецессии второго типа в обобщенной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1993. Вып. 25. С. 26–30.
5. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
6. *Аппельрот Г.Г.* Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1938. № 3. С. 385–411.
7. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura appl. Ser. 4. 1947. T. 26. fsc. 3–4. P. 271–281.
8. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
9. *Горр Г.В.* Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 3. С. 451–458.
10. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 287 с.
11. *Горр Г.В., Курганский Н.В.* О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С. 16–20.
12. *Курганский Н.В.* О полурегулярной прецессии первого типа относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1988. Вып. 20. С. 67–71.
13. *Мозалевская Г.В., Орешкина Л.Н.* Безнутационные движения твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1991. Вып. 23. С. 1–5.
14. *Докшевич А.И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. механика. 1968. Т. 4. Вып. 11. С. 95–100.

Донецк

Поступила в редакцию
30.06.2004