МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 531.38

© 2006 г. Н.И. АМЕЛЬКИН

О ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВУХСТЕПЕННЫЕ СИЛОВЫЕ ГИРОСКОПЫ С ДИССИПАЦИЕЙ В ОСЯХ РАМОК

Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и двухстепенных силовых гироскопов, не обладающая в общем случае свойством гиростата. Выведены уравнения движения системы при произвольных действующих силах.

Рассмотрен случай, когда момент внешних сил отсутствует, а в осях рамок гироскопов действуют только моменты диссипативных и потенциальных сил. Показано, что предельными движениями систем являются равновесные движения, для которых рамки гироскопов неподвижны относительно основания. Получены дифференциальные уравнения для равновесных движений и алгебраические уравнения для стационарных движений. Найдена вспомогательная функция V (полная энергия, вычисляемая при "замороженных" роторах), не возрастающая на движениях системы. Доказана теорема о соответствии между стационарными движениями и стационарными точками функции V на многообразии, определяемом интегралом кинетического момента системы. Обсуждается способ исследования устойчивости стационарных движений, основанный на использовании найденной функции V в качестве функции Ляпунова.

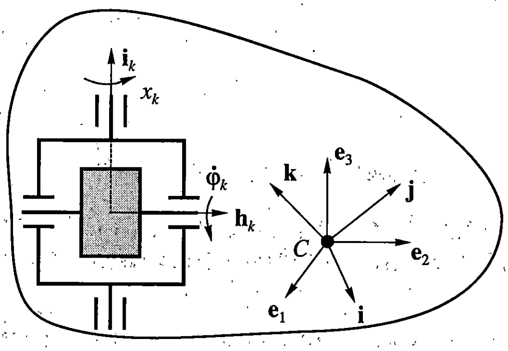
Результаты распространяются на задачу о движении систем твердых тел, соединенных цилиндрическими шарнирами.

1. Введение и постановка задачи. Различные задачи о движении твердого тела, несущего силовые гироскопы, рассматривались во многих работах. Некоторые из них указаны ниже в списке литературы [1–5].

В [1–2] рассматриваются системы, в которых двухстепенные силовые гироскопы с неограниченными углами поворота рамок используются в качестве активных элементов системы управления ориентацией твердого тела. В таких системах относительное движение гироскопов является управляемым, а управление осуществляется с помощью активных моментных устройств, устанавливаемых на осях поворота рамок гироскопов.

Методы использования пассивных (неуправляемых) силовых гироскопов для одноосной ориентации твердого тела изложены в [1] и [3–5]. В [1] рассматривались системы, в которых перемещения рамок гироскопов относительно несущего тела конструктивно ограничены узким диапазоном углов, а анализ движений проводился при определенных ограничениях на величину кинетического момента системы. В [4–5] для систем с конкретной схемой установки гироскопов в несущем теле исследовались свойства устойчивости отдельных стационарных движений.

В публикуемой работе рассматриваются системы, состоящие из несущего твердого тела (корпуса) и n двухстепенных силовых гироскопов с неограниченными углами поворота рамок (фигура). При этом гироскопы рассматриваются как пассивные элементы системы, в осях рамок которых могут действовать только моменты диссипативных и потенциальных сил. Для этих систем при дополнительных предположениях о внешних воздействиях решается задача определения всего семейства предельных (установившихся)



движений и изучается вопрос о методе исследования этих движений на устойчивость. Анализ проводится на основе точных уравнений движения и на данном этапе не предполагается, что система является гиростатом. Это позволяет использовать полученные результаты для движений систем твердых тел с изменяющейся геометрией масс.

Обозначим через $\mathbf{i}_k$ – единичные векторы, определяющие направления осей подвесов рамок гироскопов относительно корпуса, x_k – углы поворота рамок, φ_k – углы собственного вращения роторов. Предполагаем, что ротор каждого гироскопа сбалансирован относительно оси его собственного вращения $\mathbf{h}_k$ и обладает динамической симметрией относительно этой оси, а угловые скорости собственного вращения роторов поддерживаются постоянными ($\dot{\varphi}_k$ = const). Считаем также, что центр масс каждого гироскопа (ротора вместе с рамкой) расположен на оси подвеса его рамки, т.е. гироскопы статически уравновешены.

Никаких других ограничений на систему не накладываем. Так, угол между осью ротора $\mathbf{h}_k$ и осью рамки $\mathbf{i}_k$ не обязательно прямой, а ось подвеса рамки не обязательно является осью динамической симметрии гироскопа, или одной из его главных осей инерции. Таким образом, на данном этапе рассматриваются системы с изменяющейся геометрией масс. Расположение главных осей инерции и значения главных моментов инерции этих систем зависят от углов x_k.

Из условий статической уравновешенности гироскопов следует, что положение общего центра масс системы (точки C) относительно корпуса остается неизменным. Поэтому движение корпуса относительно любой системы отсчета, имеющей начало в точке C, представляет собой вращение вокруг этой точки.

Движение системы будем исследовать в базисе Кенига $\mathbf{I}(\mathbf{ijk})$, который имеет начало в общем центре масс C и движется поступательно относительно инерциального пространства. Для отдельных гироскопов будут использоваться соответствующие им базисы Кенига $\mathbf{I}_k$. Начала этих базисов расположены в центрах масс гироскопов.

2. Кинетический момент и кинетическая энергия системы. В базисе $\mathbf{I}$ суммарный кинетический момент системы относительно точки C, состоящий из кинетического момента корпуса $\mathbf{K}^0$ и суммарного кинетического момента гироскопов $\mathbf{G}$, можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{K}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{G}_k \tag{2.1}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{K}}$ – кинетический момент “дополнительного” тела $\tilde{S}$, образованного корпусом и точечными массами, равными массам гироскопов, и расположенными в их центрах масс, а $\mathbf{G}_k$ – кинетический момент гироскопа относительно его собственного центра масс.

Поскольку точка C неподвижна относительно корпуса, то кинетический момент тела $\tilde{S}$ представляется в виде $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{J}}\,\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор, составленный из проекций угловой скорости корпуса на жестко связанный с корпусом базис $\mathbf{E}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, имеющий начало в точке C, $\tilde{\mathbf{J}}$ – неизменный тензор инерции "дополнительного" тела в этом базисе.

Кинетический момент гироскопа $\mathbf{G}_k$, вычисляемый в системе Кенига $\mathbf{I}$ относительно центра масс гироскопа, как известно, тождественно совпадает с кинетическим моментом гироскопа в его собственной системе Кенига $\mathbf{I}_k$. Его можно представить в виде суммы кинетического момента переносного движения (момента вращения ротора вместе с рамкой) $\mathbf{G}_k^*$ и относительного движения (собственного кинетического момента ротора) $\mathbf{H}_k$ по формуле

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{G}_k^* + \mathbf{H}_k = \mathbf{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k) + \mathbf{H}_k, \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{i}_k\dot{x}_k, \quad \mathbf{H}_k = c_k\dot{\varphi}_k\mathbf{h}_k \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v}_k$ – угловая скорость рамки относительно корпуса, c_k – осевой момент инерции ротора, $\mathbf{J}_k$ – тензор инерции гироскопа (ротора вместе с рамкой) в базисе, получаемом параллельным переносом связанного с корпусом базиса $\mathbf{E}$ в центр масс гироскопа.

В итоге для суммарного кинетического момента системы имеем

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k) + \mathbf{H}_k) \tag{2.3}$$

Полученное выражение можно переписать также в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k\mathbf{v}_k + \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{H}_k \tag{2.4}$$

где через $\mathbf{H}$ обозначен суммарный кинетический момент собственного вращения роторов гироскопов, а через $\mathbf{J}$ – тензор инерции всей системы, вычисленный в связанном с корпусом базисе $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{J}} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k \tag{2.5}$$

Заметим, что тензор инерции системы $\mathbf{J}$ в базисе $\mathbf{E}$ является функцией углов поворота рамок гироскопов, поскольку в этом базисе его слагаемые $\mathbf{J}_k$ меняются при поворотах рамок относительно корпуса. Неизменность этого тензора имеет место только для гиростатов. В этом случае для каждого гироскопа его центральный эллипсоид инерции должен быть эллипсоидом вращения вокруг оси $\mathbf{i}_k$, т.е. гироскоп должен обладать динамической симметрией относительно этой оси.

Кинетическую энергию системы представляем в виде суммы кинетической энергии корпуса и кинетической энергии гироскопов. Применяя для вычисления кинетической энергии гироскопов теорему Кенига, получим $T = \tilde{T} + \sum T_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $\tilde{T} = \boldsymbol{\omega}^T\tilde{\mathbf{J}}\,\boldsymbol{\omega}/2$ – кинетическая энергия "дополнительного" тела $\tilde{S}$, а T_k – кинетическая энергия гироскопа, вычисляемая в его собственной системе Кенига. В свою очередь, разделяя движение гироскопа на переносное движение вместе с рамкой и движение ротора относительно рамки, имеем

$$2T_k = (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k)^T\mathbf{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k) + 2(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k)^T\mathbf{H}_k + c_k\dot{\varphi}_k^2$$

Используя (2.5), получаем для кинетической энергии системы формулу

$$2T = \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega}^T\sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n}(2(\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}_k)^T\mathbf{H}_k + c_k\dot{\varphi}_k^2) \tag{2.6}$$

3. Уравнения движения. Уравнения, описывающие движение рассматриваемой системы, можно получить методом моментов. При этом три уравнения получаются из теоремы об изменении кинетического момента всей системы, а остальные – на основе этой же теоремы, примененной для каждого отдельного гироскопа в проекции на ось подвеса его рамки.

Вычислим производную по времени от кинетического момента гироскопа $\mathbf{G}_k$, который определяется формулой (2.2). Ее можно представить в виде $\dot{\mathbf{G}}_k = \dot{\mathbf{G}}_k^r + (\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}_k)\times\mathbf{G}_k$, где первое слагаемое $\dot{\mathbf{G}}_k^r$ – скорость вектора $\mathbf{G}_k$ относительно рамки, а второе слагаемое – переносная скорость этого вектора, обусловленная вращением рамки. Относительно рамки не меняется ни тензор $\mathbf{J}_k$, ни собственный кинетический момент ротора. Поэтому производная $\dot{\mathbf{G}}_k^r$ определяется выражением $\dot{\mathbf{G}}_k^r = \mathbf{J}_k(\dot{\boldsymbol{\omega}}^r + \dot{\mathbf{v}}_k)$, где $\dot{\boldsymbol{\omega}}^r$ – скорость вектора $\boldsymbol{\omega}$ относительно рамки. Учитывая далее, что вектор $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ составлен из производных от проекций угловой скорости на связанные с корпусом оси, имеем $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^r + \mathbf{v}_k\times\boldsymbol{\omega}$. Отсюда получаем

$$\dot{\mathbf{G}}_k = \mathbf{J}_k(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{v}}_k + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_k) + (\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}_k)\times\mathbf{G}_k \tag{3.1}$$

Применяя для системы "ротор + рамка" теорему об изменении кинетического момента в проекции на ось $\mathbf{i}_k$, приходим к уравнениям

$$\mathbf{i}_k^T(\mathbf{J}_k(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{v}}_k + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_k) + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}_k)) = M_k \ (k = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

где M_k – проекция на ось $\mathbf{i}_k$ момента действующих на гироскоп сил, вычисленного относительно его центра масс, вектор $\mathbf{G}_k$ определяется выражением (2.2), $\mathbf{v}_k = \mathbf{i}_k\dot{x}_k$, $\dot{\mathbf{v}}_k = \mathbf{i}_k\ddot{x}_k$.

Запишем теперь теорему об изменении кинетического момента для всей системы относительно точки C. С учетом неизменности тензора $\tilde{\mathbf{J}}$ в связанных с корпусом осях, формулы (2.3) и соотношения (3.1) получаем следующее векторное уравнение

$$\tilde{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{J}_k((\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{v}}_k + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_k) + (\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}_k)\times\mathbf{G}_k)] = \mathbf{M} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{M}$ – момент внешних сил относительно центра масс системы.

Полученные уравнения (3.2) и (3.3) определяют движение системы в переменных $\boldsymbol{\omega}$, x_k. В этих уравнениях тензоры $\mathbf{J}_k$ являются заранее заданными функциями углов x_k. При этом уравнения имеют первый порядок относительно $\boldsymbol{\omega}$ и второй порядок относительно x_k. Их можно рассматривать как уравнения первого порядка в переменных $\boldsymbol{\omega}$, x_k, $\dot{x}_k$.

4. Предельные движения системы. Далее ограничимся рассмотрением случаев, когда действующие на систему силы удовлетворяют следующим условиям:

1. Момент действующих на систему внешних сил относительно общего центра масс системы равен нулю ($\mathbf{M} = 0$).

2. Момент всех действующих на каждый гироскоп сил в проекции на ось подвеса его рамки характеризуется диссипативной зависимостью от скорости вращения рамки, т.е.

$$M_k = 0, \quad \text{если} \quad \dot{x}_k = 0; \quad M_k\dot{x}_k < 0, \quad \text{если} \quad \dot{x}_k \neq 0 \ (k = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

Примером указанных моментов могут служить, например, моменты вязкого трения: $M_k = -\beta\dot{x}_k$.

Условиям *1–2* соответствуют случаи, когда внешнее воздействие на систему отсутствует, либо представляет собой однородное поле тяжести, а внутреннее взаимодействие между несущим телом и гироскопами характеризуется только диссипативными моментами вида (4.1).

Из предположения об отсутствии внешнего момента сил относительно центра масс системы следует, что в базисе Кенига **I** сохраняется вектор кинетического момента **K**. В используемых фазовых переменных этому закону сохранения соответствует интеграл квадрата кинетического момента, который на основе (2.4) записывается в виде

$$f(\boldsymbol{\omega}, x, \dot{x}) = \mathbf{K}^2 = \left(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{J}_k\mathbf{v}_k + \mathbf{H}\right)^2 = K^2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение функцию V, представляющую собой кинетическую энергию системы, вычисленную при формальном игнорировании собственного вращения роторов (при "замороженных" роторах). На основании формулы (2.6) получим

$$2V = 2T - \sum_{k=1}^{n} (2(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k)^T\mathbf{H}_k + c_k\dot{\varphi}_k^2) = \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega}^T\sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k \tag{4.3}$$

Найдем производную по времени от функции (4.3). В силу постоянства угловых скоростей вращения роторов имеем

$$\dot{V} = \dot{T} - \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k)^T\mathbf{H}_k\right)$$

Производную $\dot{T}$ определим из теоремы об изменении кинетической энергии, которая в системе отсчета Кенига **I** имеет такой же вид, как и в инерциальной: *производная по времени от кинетической энергии равна мощности действующих сил.* В принятых предположениях 1 и 2 ненулевую работу совершают только силы, действующие в осях подвеса рамок гироскопов и в осях роторов. Вычисляя мощность этих сил, получим

$$\dot{T} = \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k M_k + \dot{\varphi}_k \mu_k)$$

где μ_k – моменты сил в осях вращения роторов, а M_k – моменты в осях рамок, удовлетворяющие (4.1).

Так как ротор динамически симметричен относительно оси $\mathbf{h}_k$, то его динамическое уравнение Эйлера в проекции на эту ось имеет вид

$$\frac{d}{dt}c_k(\dot{\varphi}_k + (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k)^T\mathbf{h}_k) = \mu_k$$

Умножая это уравнение на постоянную скорость $\dot{\varphi}_k$, получаем

$$\frac{d}{dt}((\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k)^T\mathbf{H}_k) = \mu_k\dot{\varphi}_k$$

С учетом этого равенства исходное выражение для производной от функции (4.3) приводит к формуле

$$\dot{V} = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k M_k \tag{4.4}$$

Отсюда при выполнении соотношений (4.1) получаем

$$\dot{V} = 0, \quad \text{если} \quad \dot{x} = 0; \quad \dot{V} < 0, \quad \text{если} \quad \dot{x} \neq 0 \tag{4.5}$$

Из (4.4) следует, что при отсутствии диссипации в осях рамок гироскопов функция (4.3) будет интегралом движения системы.

Функции (4.3) является, очевидно, ограниченной снизу. Поэтому из установленного свойства ее производной $\dot{V} \leq 0$ следует, что любое движение системы стремится к некоторому предельному движению, для которого выполняется условие $\dot{V}(t) = 0$ [6]. В свою очередь из соотношений (4.5) получаем, что любое движение, на котором функция V сохраняет постоянное значение, характеризуется отсутствием вращения рамок гироскопов относительно корпуса: $\dot{x}(t) = 0$. В дальнейшем все такие движения будем называть равновесными. Они представляют собой вращения системы как единого твердого тела (если не считать собственного вращения роторов гироскопов) вокруг неподвижной точки C.

Таким образом, в принятых выше предположениях любое движение системы сходится к некоторому равновесному движению. Уравнения, которым подчиняются равновесные движения, получаются из уравнений (3.2) и (3.3) обнулением производных $\dot{x}$ и $\ddot{x}$. Поскольку на равновесных движениях диссипативные моменты равны нулю, то указанные уравнения приобретают следующий вид

$$\mathbf{i}_k^T \mathbf{J}_k \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{i}_k^T (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_k \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_k)) = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0 \tag{4.7}$$

Полученные уравнения (4.6) и (4.7) образуют избыточную систему из $(3 + n)$ дифференциальных уравнений для трех компонент: p, q, r угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, а компоненты вектора x выступают здесь в роли параметров.

Одним из видов равновесных движений являются стационарные движения, которые характеризуются дополнительным условием неизменности угловой скорости корпуса, т.е. $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = 0$. Стационарные движения представляют собой равномерные вращения системы как единого твердого тела вокруг неподвижной оси и описываются следующей системой алгебраических уравнений, вытекающих из (4.6) и (4.7):

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}_k^T (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_k \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_k)) = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \\ &\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Из второго (векторного) уравнения полученной системы следует, что ось стационарных вращений совпадает с направлением кинетического момента системы, который в силу условия 1 неизменен в базисе Кенига **I**.

Уравнения (4.8) описывают всю совокупность стационарных движений системы, каждое из которых представляет собой траекторию-точку в пространстве переменных $\boldsymbol{\omega}$, x. При этом система (4.8) задает $n + 2$ скалярных уравнения для $n + 3$ переменных p, q, r, x_1, $\ldots$, x_n (второе уравнение системы (4.8) задает только два независимых уравнения, поскольку содержит векторное произведение). Если к (4.8) добавить еще интеграл момента (4.2), положив в нем $\dot{x} = 0$, получаем, что для каждого заданного значения величины кинетического момента K стационарные движения определяются системой из $n + 3$ уравнений для $n + 3$ неизвестных.

Таким образом, у рассматриваемых систем всегда существуют стационарные равновесные движения, которые могут быть найдены как решения алгебраических уравнений (4.8).

Более сложной для решения в общем виде является задача нахождения нестационарных равновесных движений (или доказательство их отсутствия). Здесь требуется анализ существования таких частных решений избыточной системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.6)–(4.7), которые характеризуются изменяющимся вектором $\boldsymbol{\omega}$ (стационарные движения, как нетрудно видеть, удовлетворяют уравнениям (4.6)–(4.7)).

Если из (4.7) выразить производную от вектора угловой скорости и подставить в (4.6), получаем систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H})) = \mathbf{i}_k^T(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H}_k)) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что для существования некоторого нестационарного равновесного движения необходимо, чтобы при некотором угловом положении рамок $x = (x_1, \ldots, x_n)$ траектория векторного уравнения (4.7), будучи "полноценной" кривой (т.е. не точкой) в пространстве переменных p, q, r, удовлетворяла системе алгебраических уравнений (4.9).

Уравнение (4.7) имеет два интеграла движения: интеграл кинетического момента $(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H})^2 = K^2$ и интеграл функции $V^* = \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}/2$. Каждый из этих интегралов задает зависящий от углового положения рамок x эллипсоид в переменных p, q, r; при этом эллипсоид функции V^* имеет центр в начале координат, а центр эллипсоида кинетического момента смещен относительно начала координат на вектор $(-\mathbf{J}^{-1}\mathbf{H})$. Поэтому нестационарными равновесными движениями могут быть только те "полноценные" кривые пересечения указанных эллипсоидов, которые удовлетворяют каждому из уравнений (4.9). Поскольку линии пересечения эллипсоидов замкнуты, то нестационарные равновесные движения, если они существуют, являются периодическими движениями системы.

На основании предварительного анализа можно сделать предположение, что периодические движения в рассматриваемых задачах возможны при специальном подборе параметров системы (имеется в виду геометрия масс и углы установки осей рамок гироскопов). Подробный же анализ этого вопроса следует проводить для каждой конкретной системы отдельно.

5. О связи стационарных движений с условно-стационарными точками функции (4.3). Как было показано выше, для рассматриваемой задачи производная от функции (4.3) удовлетворяет условию $\dot{V} \leq 0$. Нижеследующая теорема устанавливает еще одно свойство этой функции, позволяющее использовать ее в качестве вспомогательной функции для анализа устойчивости стационарных движений рассматриваемых систем.

Теорема. Стационарным движениям системы соответствуют условно-стационарные точки функции (4.3) на многообразии, определяемом интегралом кинетического момента (4.2).

Доказательство. Стационарные движения подчиняются условиям $\dot{x} = 0$ и уравнениям (4.8). Покажем, что этим же уравнениям удовлетворяют все условно-стационарные точки функции (4.3) на многообразии (4.2).

Систему уравнений, определяющих условно-стационарные точки функции V на многообразии (4.2), можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 2\mu\frac{\partial \mathbf{K}^T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\mathbf{K} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_k} + 2\mu\frac{\partial \mathbf{K}^T}{\partial \dot{x}_k}\mathbf{K} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_k} + 2\mu\frac{\partial \mathbf{K}^T}{\partial x_k}\mathbf{K} = 0 \tag{5.1}$$

где μ – множитель Лагранжа.

Сначала покажем, что из уравнений (5.1) следует $\dot{x}_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Для этого используем первые две группы уравнений системы (5.1). Вычисляя на основе формул (4.3) и (2.4) соответствующие производные от функции V и кинетического момента, а также учитывая соотношения $\mathbf{v}_k = \mathbf{i}_k\dot{x}_k$ и симметричность матриц $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}_k$, получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{s=1}^{n}\mathbf{J}_s\mathbf{v}_s + 2\mu\mathbf{J}\mathbf{K} = 0 \\ &\mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_k) + 2\mu\mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{K} = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Из первого (векторного) уравнения системы (5.2) найдем

$$\boldsymbol{\omega} + 2\mu\mathbf{K} = -\mathbf{J}^{-1}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{J}_s\mathbf{v}_s$$

Подставляя это выражение в остальные скалярные уравнения, приходим к линейной однородной системе на переменные $\dot{x}_k$:

$$\mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{J}^{-1}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{J}_s\mathbf{v}_s = \mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k \ (k = 1, \ldots, n) \tag{5.3}$$

Умножим k-е уравнение на $\dot{x}_k$ и просуммируем все уравнения. Тогда получим следующее скалярное уравнение:

$$F = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k - \left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k\right)^T\mathbf{J}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k\right) = 0 \tag{5.4}$$

Выражение в левой части полученного уравнения представляет собой квадратичную форму скоростей $\dot{x}_k$. Покажем, что эта квадратичная форма является строго положительно определенной. При этом будем исходить из предположений, что тензор инерции "дополнительного" тела $\tilde{\mathbf{J}}$ является строго положительно определенной матрицей, а моменты инерции гироскопов относительно осей подвеса рамок отличны от нуля, т.е.

$$\tilde{\mathbf{J}} > 0, \quad I_k = \mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{i}_k > 0 \ (k = 1, \ldots, n) \tag{5.5}$$

Для реальных систем условия (5.5) заведомо выполняются.

Введем обозначение

$$\mathbf{z} = \mathbf{J}^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k \tag{5.6}$$

С учетом (2.5) квадратичная форма (5.4) приводится к следующему виду:

$$F = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k^T\mathbf{J}_k\mathbf{v}_k - \mathbf{z}^T\mathbf{J}\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{v}_k - \mathbf{z})^T\mathbf{J}_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{z}) + \mathbf{z}^T\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{z}$$

В полученном выражении все слагаемые являются неотрицательными. При этом для любого ненулевого вектора $\dot{x}$ выражение (5.4) принимает положительное значение, поскольку в случае $\mathbf{z} \neq 0$ положительность обеспечивается за счет последнего слагаемого, а в случае $\mathbf{z} = 0$ имеем строго положительно определенную форму

$$F = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k^T \mathbf{J}_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} I_k \dot{x}_k^2$$

Таким образом, квадратичная форма (5.4) является строго положительно определенной по скоростям $\dot{x}$. Поэтому уравнение (5.4), и, следовательно, система (5.3) имеет только тривиальное решение

$$\mathbf{v}_k = 0 \Rightarrow \dot{x}_k = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \tag{5.7}$$

С учетом (5.7) первое уравнение системы (5.2) после сокращения на невырожденную матрицу $\mathbf{J}$ приобретает вид

$$\boldsymbol{\omega} = -2\mu\mathbf{K} = -2\mu(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) \tag{5.8}$$

и тождественно совпадает с векторным уравнением системы (4.8), определяющей стационарные движения: $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0$. Остальные скалярные уравнения системы (5.2) превращаются при этом в элементарные следствия этого уравнения.

Запишем теперь третью группу уравнений системы (5.1). Здесь учитываем, что от углового положения рамок зависят тензоры $\mathbf{J}_k$, входящие в суммарный тензор $\mathbf{J}$, и кинетические моменты $\mathbf{H}_k$. Используя (5.8), приводим указанные уравнения к виду

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_k} \tag{5.9}$$

На основе (2.4), (4.3) и (5.7), учитывая независимость тензора $\tilde{\mathbf{J}}$ от углового положения рамок гироскопов, будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial(\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega})}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_k} = \frac{\partial(\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega})}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial x_k}$$

Эти соотношения позволяют записать уравнения (5.9) таким образом:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \boldsymbol{\omega}^T \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial x_k} = 0 \tag{5.10}$$

Чтобы раскрыть конкретный вид уравнений (5.10), обозначим через $\mathbf{e}_k^s$ $(s = 1, 2, 3)$ – главные центральные оси инерции гироскопа (системы "ротор + рамка"), а через I_k^s – главные моменты инерции. Тогда получим

$$\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega} = \sum_{s=1}^{3} I_k^s(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}_k^s)\mathbf{e}_k^s; \quad 2V = 2\tilde{T} + \sum_{k}\sum_{s=1}^{3} I_k^s(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{e}_k^s)^2$$

В приведенных выражениях от углового положения рамок гироскопов зависят только векторы $\mathbf{e}_k^s$, причем эта зависимость характеризуется очевидными формулами:

$\partial \mathbf{e}_k^s/\partial x_k = \mathbf{i}_k \times \mathbf{e}_k^s$. Отсюда, применяя известные правила перестановочности в смешанном произведении, находим

$$\partial V/\partial x_k = \sum_{s=1}^{3} I_k^s(\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{e}_k^s)\boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{i}_k \times \mathbf{e}_k^s) = \boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{i}_k \times \mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{i}_k^T(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega}) \tag{5.11}$$

Соотношения (5.11) с учетом равенства $\partial \mathbf{H}_k/\partial x_k = \mathbf{i}_k \times \mathbf{H}_k$ позволяют записать уравнения (5.10) в виде:

$$\mathbf{i}_k^T(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_k)) = 0 \ (k = 1, \ldots, n)$$

Полученные уравнения тождественно совпадают со скалярными уравнениями системы (4.8), определяющей стационарные движения.

Таким образом, уравнения, определяющие условно-стационарные точки функции (4.3) на многообразии (4.2), и уравнения для стационарных движений системы тождественно совпадают. Теорема доказана.

Так как все стационарные движения характеризуются нулевыми значениями всех скоростей $\dot{x}_k$, то из доказанной теоремы вытекает *следствие: стационарным движениям соответствуют условно-стационарные точки "усеченной" функции* $V^0(\boldsymbol{\omega}, x) = V(\boldsymbol{\omega}, x, 0) = \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}/2$ *на "усеченном" многообразии* $f^0(\boldsymbol{\omega}, x) = f(\boldsymbol{\omega}, x, 0) = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H})^2 = K^2$.

6. Случай действия дополнительных консервативных сил. Здесь сохраним условие равенства нулю внешнего момента сил и дополнительно предположим, что на каждый гироскоп помимо диссипативных сил вида (4.1) действуют консервативные силы, зависящие от углового положения его рамки x_k. Обозначая через $\Pi = \Sigma\Pi_k(x_k)$ – суммарную потенциальную энергию этих сил, получим для дополнительных моментов, действующих на гироскопы, выражения $M_k' = -\partial\Pi/\partial x_k$.

Определим функцию V' в виде $V' = V + \Pi$, где функция V задается выражением (4.3), т.е. как полную энергию системы, вычисленную при "замороженных" роторах. Тогда из теоремы об изменении кинетической энергии получим для производной по времени от этой функции те же самые соотношения (4.4) и (4.5).

Уравнения, определяющие равновесные движения, изменятся по сравнению с рассмотренным выше случаем только в части скалярных уравнений (4.6) и запишутся в виде

$$\mathbf{i}_k^T\mathbf{J}_k\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{i}_k^T(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_k)) + \partial\Pi/\partial x_k = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0 \tag{6.2}$$

Соответственно, для стационарных движений получим уравнения

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}_k^T(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_k)) + \partial\Pi/\partial x_k = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \\ &\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Нетрудно убедиться, что и в данном случае будет справедлива доказанная теорема, т.е. стационарным движениям (6.3) соответствуют условно-стационарные точки $V' = V + \Pi$ на многообразии, определяемом интегралом кинетического момента (4.2).

Действительно, поскольку потенциальная энергия зависит только от координат x_k, то отличие в уравнениях, описывающих условия стационарности, будет только в третьей группе уравнений (5.1) за счет дополнительного слагаемого $\partial\Pi/\partial x_k$. Именно этим слагаемым и отличаются уравнения (6.3) от уравнений (4.8).

7. Системы твердых тел, соединенных цилиндрическими шарнирами. Частными случаями рассмотренных систем являются такие, в которых собственные кинетические моменты роторов всех гироскопов равны нулю, т.е. когда вместо гироскопов на корпусе располагаются обычные твердые тела на цилиндрических шарнирах, с сохранением исходного предположения о статической уравновешенности несомых тел. Для таких случаев функция (4.3) превращается в кинетическую энергию системы (или в полную энергию при наличии дополнительных консервативных сил). При этом из векторного уравнения системы (4.8) при $\mathbf{H} = 0$ следует, что стационарными движениями таких систем являются вращения вокруг главных осей инерции. Скалярные же уравнения (4.8) позволяют определить стационарные конфигурации системы, т.е. значения углов поворота несомых тел на стационарных движениях. С учетом формулы (5.11) эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$-\mathbf{i}_k^T(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}_k\boldsymbol{\omega}) = \partial V/\partial x_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \qquad (7.1)$$

Уравнения (7.1) описывают условия стационарности момента инерции системы относительно оси вращения по углам поворота несомых тел.

Таким образом, в рассматриваемом случае перманентным вращениям соответствуют такие конфигурации системы, которые характеризуются стационарностью одного из главных моментов инерции. При этом ось перманентного вращения совпадает с той главной осью инерции системы, момент инерции относительно которой достигает стационарного значения.

Следует отметить, что если система представляет собой гиростат, то главные оси и главные моменты инерции системы неизменны, а выражения в левых частях уравнений (7.1) обращаются в тождественные нули. В этом случае перманентное вращение системы вокруг каждой из главных осей инерции возможно при любом угловом положении несомых тел.

8. О методе исследования устойчивости стационарных движений. В пространстве используемых фазовых переменных $\boldsymbol{\omega}$, x, $\dot{x}$ стационарным движениям соответствуют точки ($\boldsymbol{\omega}^*$, x^*, 0), а каждой такой точке соответствует некоторое значение K величины кинетического момента системы. Поскольку в рассматриваемых задачах имеется интеграл кинетического момента (4.2), то целесообразно исследовать условную устойчивость стационарных точек, т.е. устойчивость по отношению к возмущениям, принадлежащим многообразию (4.2), где значение K соответствует исследуемой стационарной точке.

Так как функция, определяющая многообразие (4.2), является интегралом движения, то к условной устойчивости применимы все теоремы прямого метода Ляпунова в такой модификации, что поведение функции Ляпунова в окрестности рассматриваемой точки должно удовлетворять соответствующим условиям на многообразии (4.2).

Установленные выше свойства функции (4.3), в частности, условие на производную $\dot{V} \le 0$, позволяют использовать ее в качестве функции Ляпунова для анализа устойчивости стационарных движений рассматриваемых систем. При этом простая (не асимптотическая) устойчивость устанавливается теоремой Ляпунова: *Стационарное движение условно устойчиво, если в рассматриваемой точке* ($\boldsymbol{\omega}^*$, x^*, 0,) *функция V имеет строгий условный минимум.*

Для доказательства условной асимптотической устойчивости или неустойчивости применима теорема Барбашина – Красовского [7], которая для рассматриваемой задачи формулируется в следующем виде:

Если стационарное движение ($\boldsymbol{\omega}^*$, x^*, 0) *изолировано от других равновесных движений на многообразии (4.2), то в случае строгого условного минимума функции V оно асимптотически условно устойчиво, а при отсутствии минимума – неустойчиво.*

Использование приведенных теорем сводит вопрос об устойчивости к решению двух задач. Первая состоит в исследовании поведения функции V в окрестности рассматриваемой точки на многообразии (4.2) и с учетом доказанной выше теоремы сводится к анализу типа стационарности этой точки (характера условного экстремума функции V). Вторая задача (условие изолированности) требует проверки, существует ли на том многообразии (4.2), которому принадлежит рассматриваемая стационарная точка, другие равновесные движения, бесконечно близкие к этой точке.

В заключение отметим, что на основании анализа условной устойчивости стационарного движения можно делать выводы и о его безусловной устойчивости. Непосредственно из определения следует, что условная неустойчивость стационарного движения влечет его безусловную неустойчивость. В свою очередь, согласно [8] (теорема 1.4.2) из условной устойчивости, установленной на основе строгого условного минимума функции V, следует безусловная устойчивость стационарного движения.

Следует отметить также, что анализ условной устойчивости позволяет во многих случаях более детально исследовать движения системы, например, установить асимптотические свойства, которые не могут быть обнаружены при исследовании безусловной устойчивости (безусловной асимптотической устойчивостью стационарные движения рассматриваемых систем не обладают).

Анализ устойчивости стационарных движений конкретных систем с использованием описанного метода будет проведен в следующих работах.

Автор выражает благодарность В.Ф. Журавлеву за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической целевой программы Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008)", проект № 6827.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
2. *Токарь Е.Н.* Проблемы управления гиросиловыми стабилизаторами // Космич. исследования. 1978. Т. 16. № 2. С. 179–187.
3. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Серия "Исследование космического пространства", ВИНИТИ. Т. 11. 1978.
4. *Мирер С.А.* Оптимальное гиродемпфирование нутационных колебаний спутника, стабилизируемого вращением // Космич. исследования. 1977. Т. 15. № 5. С. 677–682.
5. *Сарычев В.А., Мирер С.А., Исаков А.В.* Гиродемпфер на спутнике с двойным вращением // Космич. исследования. 1982. Т. 20. № 1. С. 30–40.
6. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
7. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
8. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: "Эдиториал УРСС", 1998. 165 с.