МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2006

УДК 624.07:534.1

© 2006 г. И.У. МУСАЕВ

ПОТЕРЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ КОРОТКОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ

Вопросы устойчивости упругих стержней широко освещены в литературе [1]. Однако учет полного спектра свойств материала стержня позволяет выявить новые, порой неожиданные, аспекты этого процесса. Одним из наиболее существенных, подлежащих несомненному учету свойств, является свойство повреждаемости материалов. Продемонстрируем сказанное на примере внецентренно-сжатого стержня.

Пусть стержень прямоугольного поперечного сечения шириной a и высотой $2h$ сжимается силой P с эксцентристом e.

Дифференциальное уравнение изогнутой упругой оси имеет вид [2]:

$$EI\frac{d^2\nu}{dz^2} = -P(\nu + e) \tag{1}$$

где ν – прогиб стержня, $I = 2ah^3/3$ – момент инерции поперечного сечения.

Напряжение при изгибе для короткого стержня согласно [1] представляется следующим образом:

$$\sigma = \frac{P}{S} + \frac{Pe}{I}y \tag{2}$$

Здесь $S = 2ah$ – площадь поперечного сечения, y – поперечная координата (фиг. 1).

В качестве модели повреждающейся среды примем модель, предложенную в [3]. Как было указано в этой работе при монотонном нагружении в линейном варианте она идентична модели, данной в [4]. Определяющее соотношение этой модели имеет вид:

$$E\varepsilon = (1 + M^*)\sigma \tag{3}$$

где M^* – оператор повреждаемости наследственного типа.

В качестве критерия разрушения примем

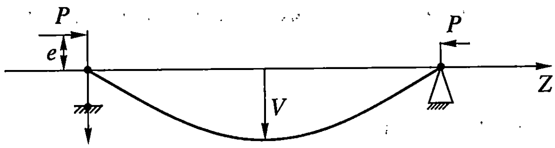
$$\sigma + M^*\sigma = \sigma_0 \tag{4}$$

в котором σ_0 – прочность бездефектного материала.

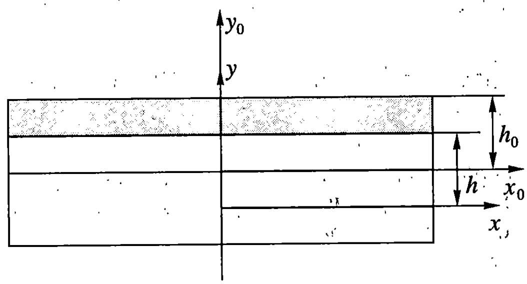
При изгибе стержня в сжатой зоне при продолжающем нагружении процесс идет особенно интенсивно. Впервые условие разрушения (4) выполняется на поверхностном слое $y_0 = h_0$, время разрушение, которого, согласно (2) и (4) определяется из следующего уравнения:

$$1 + \int_0^{t_0} M(\tau)d\tau = \frac{2ah_0^2\sigma_0}{P_0(h_0 + 3e)} \tag{5}$$

Здесь $M(t)$ – ядро оператора повреждаемости, структура которого обсуждается в [4], где также даны вид этого ядра и экспериментально определенные его параметры. Для по-



Фиг. 1



Фиг. 2

добного слабосингулярного ядра поврежденности $M(t) = \mu t^{-\alpha}$, $0 < 1 < \alpha$ для инкубационного времени получим соотношение:

$$t_0 = \left\{\frac{1-\alpha}{\mu}\left[\frac{2ah_0^2\sigma_0}{P(h_0+3e)} - 1\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{6}$$

Существование этого времени накладывает ограничения на параметры задачи, определяемые положительностью квадратной скобки правой части (6).

После разрушения поверхностного слоя $y_0 = h_0$ в дальнейшем образуется зона разрушения, расширяющаяся в сторону первоначально нейтральной оси стержня $0x_0$ (фиг. 2).

Для нахождения закона расширения разрушенной зоны, т.е. закона движения фронта разрушения воспользуемся схемой, данной в [6].

Будем так же как и в [5, 6] считать, что материал разрушаемой зоны теряет способность сопротивления деформированию, и при этом напряжение (2) будет определяться параметрами неразрушенной части сечения стержня шириной $2h$. Из фиг. 2 следует $y = y_0 + h_0 - h$.

Кроме того эксцентриситет силы относительно текущей нейтральной оси $0x$ будет $e' = e + h_0 - h$. Тогда в текущей момент времени τ напряжение в слое с координатой $y(\tau)$ будет

$$\sigma = \frac{P}{2ah(\tau)}\left[1 + \frac{3(e+h_0-h(\tau))(y_0+h_0-h(\tau))}{h^2(\tau)}\right] \tag{7}$$

Пусть времени t соответствует неразрушенная часть сечения определяемая шириной $h(t)$. Тогда имеем

$$y_0 + h_0 = h(t) \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\sigma(t,\tau) = \frac{P}{2ah(\tau)}\left\{1 + \frac{3[e+h_0-h(\tau)][2h(t)-h(\tau)]}{h^2(\tau)}\right\} \tag{9}$$

Причем критерий разрушения в этот момент будет определяться следующей формулой:

$$\sigma(t,t)+\int_0^t M(t-\tau)\sigma(t,\tau)d\tau = \sigma_0 \tag{10}$$

Учитывая представление (9) в критерии разрушения (10), получим следующее интегральное уравнение, определяющее закон изменения ширины не разрушенного сечения стержня $h = h(t)$:

$$\frac{1}{h(t)}\left[\frac{3(e+h_0)}{h(t)}-2\right]+\int_0^t \frac{M(t-\tau)}{h(\tau)}\left\{1+\frac{3[e+h_0-h(\tau)][2h(t)-h(\tau)]}{h^2(\tau)}\right\}d\tau = \frac{2\sigma_0 a}{P} \tag{11}$$

Определенное из этого уравнения функция $h(t)$ должна быть учтена в основном дифференциальном уравнении изгиба (1), которое с учетом свойства повреждаемости материала (3), примет вид:

$$\frac{2aE}{3}\frac{d^2 \upsilon(z,t)}{dz^2}+P\left\{\frac{\upsilon(z,t)}{h^3(t)}+\int_0^t M(t-\tau)\frac{\upsilon(z,t)}{h^3(t)}d\tau\right\} =$$
$$= P\left\{\frac{h(t)-e-h_0}{h^3(t)}+\int_0^t M(t-\tau)\frac{h(t)-e-h_0}{h^3(t)}d\tau\right\} \tag{12}$$

Отметим, что при $t \le t_0$ оно одно определяет процесс несущей способности стержня как линейно-вязкоупругого. Этот случай является предметом многих исследований и поэтому здесь не обсуждается. В работе исследуется случай, когда потеря несущей способности происходит для времени $t > t_0$, когда эта способность определяется взаимодействием двух процессов: выпучивания и разрушения.

Таким образом, основу исследования процесса несущей способности эксцентрично сжатого повреждающегося стержня составляет система уравнений (11), (12).

Для удобства дальнейших выкладок введем следующие безразмерные величины:

$$\xi = h/h_0,\quad w = \upsilon/h_0,\quad \eta = z/1,\quad m = 1\sqrt{\frac{3P}{2Eah_0^3}} = \pi\sqrt{\frac{P}{P_3^0}}$$
$$\theta = t/t_0,\quad S = \tau/t_0,\quad N(\theta) = t_0 M(t),\quad e/h_0 = \delta,\quad \lambda = 2ah_0\sigma_0/P \tag{13}$$

В рамках этих обозначений система уравнений (11), (12) примет вид

$$\frac{1}{m^2}\frac{d^2 w(\eta,\theta)}{d\eta^2}+\frac{W(\eta,\theta)}{\xi^3(\theta)}+\int_0^\theta N(\theta-s)\frac{W(\eta,\theta)}{\xi^3(\theta)}ds =$$
$$= \frac{\xi(\theta)-(\sigma+1)}{\xi^3(\theta)}+\int_0^\theta N(\theta-s)\frac{\xi(s)-(\sigma+1)}{\xi^3(S)}ds \tag{14}$$

$$\frac{1}{\xi(\theta)}\left[\frac{3(1+\delta)}{\xi(\theta)}-2\right]+\int_0^\theta N(\theta-s)\left[1+\frac{3[1+\delta-\xi(s)][2\xi(\theta)-\xi(s)]}{\xi^2(\theta)}\right]\frac{ds}{\xi(s)} = \lambda$$

При этом безразмерный прогиб $W(\eta, \theta)$ в силу шарнирного закрепления торцов стержня должен удовлетворять условию

$$W(\eta, \theta) = W(1, \theta) = 0 \tag{15}$$

При исследовании системы (14) также должно быть учтено, что

$$\xi(\theta) = 1 \quad \text{при} \quad \theta \le 1 \tag{16}$$

Условие, определяющее этот период, т.е. инкубационное время, будет представлять собой некую связь между безразмерными параметрами задачи, которая в силу (10) и принятых обозначений (13) выглядит как

$$\int_0^1 N(s)ds = \frac{\lambda}{1+3\delta} - 1 \tag{17}$$

Следует заметить, что, как уже отмечалось, условие существования инкубационного периода, т.е. положительность правой части (17) накладывает ограничения на параметры задачи.

Но как показано в работе [5] они не обеспечивают в дальнейшем процесс расширения зоны разрушения, для которого имеет место своя система ограничений. Последнее следует из системы уравнений (14) при требовании $d\xi/d\theta < 0$.

Если также будет выполняться условие $d^2\xi/d\theta^2 < 0$, то расширение зоны разрушения будет происходить с возрастающей скоростью.

Итак пусть $P < P_*$, где P_* – критическая сила устойчивости эксцентрически сжатого упругого стержня [2, 1].

Если для упругого стержня это условие обеспечивает несущую способность стержня, то для повреждающегося материала система уравнений (14) предполагает возможные два пути протекания дальнейшего процесса деформирования при уменьшающемся поперечном сечении стержня: если скорость уменьшения поперечного сечения станет бесконечно большой (достаточно большой) раньше, чем сжимающая постоянная сила P достигает значения критической силы P_* для данного состояния сечения, то потеря несущей способности стержня произойдет за счет разрушения стержня вследствие наличия процесса повреждаемости. В противном случае потеря несущей способности эксцентрично сжатого стержня произойдет вследствие потери устойчивости стержня.

Рассмотрим случай постоянного ядра оператора повреждаемости $N(t) = \text{const}$. Тогда дифференцируя уравнения системы (14) по безразмерному времени θ, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m^2}\frac{d^3W(\eta,\theta)}{d\eta^2 d\theta} + \frac{d}{d\theta}\left[\frac{W(\eta,\theta)}{\xi^3(\theta)}\right] + n\frac{W(\eta,\theta)}{\xi^3(\theta)}ds = \\ &= \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\xi(\theta)-(\delta+1)}{\xi^3(\theta)}\right] + n\frac{\xi(\theta)-(\delta+1)}{\xi^3(\theta)} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{d\xi(\theta)}{d(\theta)} = \frac{n\xi(\theta)[3(1+\delta)-2\xi(\theta)]}{2\xi(\theta) - 6(1+\delta) + 6n\xi^3(\theta)\int_0^\theta \frac{1+\delta-\xi(s)}{\xi^3(s)}ds} \tag{19}$$

При расширении зоны разрушения $d\xi/d\theta < 0$, вследствие положительности числителя правой части уравнения (19) следует также положительность знаменателя, причем равенство его нулю определяет ширину сечения в тот момент времени, когда скорость расширения зоны разрушения становится бесконечно большой, то есть для момента времени полного разрушения. В частности условие $d\xi/d\theta < 0$ должно выполняться для начального момента расширения зоны разрушения $t = t_0$ или для безразмерной величины $\theta = \theta_0 = 1$. Это приводит к следующему неравенству:

$$\lambda > \frac{2(1+3\delta)^2}{3\delta},$$

или в размерных величинах

$$P < \frac{3ah_0^2 e\sigma_0}{\delta(h_0+3e)^2} \tag{20}$$

Если сжимающая сила P равна правой части или больше этой величины, то разрушение стержня произойдет сразу по приложении силы.

При условии выполнения (20), найденная из уравнения (19) функция $\xi(\theta)$ должна быть учтена в уравнении (18), определяющим процесс устойчивости стержня. Из условия возможности обращения скорости нарастания прогиба в бесконечность, определяется критическая сила устойчивости рассматриваемого стержня.

Дадим приближенную оценку поведения решения системы (18), (19). Используя теорему о среднем, уравнению (18) придадим следующий вид:

$$\begin{aligned} &W''(\eta,\theta) + q^2 W(\eta,\theta) = -\beta q^2 \\ &q = \frac{m}{\xi^{3/2}(\theta)}\sqrt{1+n\theta}, \quad \beta(\theta) = (1+\delta) - \xi(\theta) \end{aligned} \tag{21}$$

Его решение с учетом условий на торцах $W(0) = W(1) = 0$ будет

$$W(\eta,\theta) = \beta\frac{\sin q\eta - \sin q + \sin q(1-\eta)}{\sin q} \tag{22}$$

Отсюда получим следующее выражение критической силы устойчивости при $q = \pi$:

$$P_* = P_э^0 \frac{\xi^3(\theta)}{1+n\theta} \tag{23}$$

где $P_э^0$ – классическая сила устойчивости Эйлера.

Из полученного выражения следует, что с течением времени уровень критической силы падает по закону, степень которого определяется текущим размером неразрушенного сечения стержня, то есть решением уравнения (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Наука, 1965. 364 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Мусаев И.У.* К вопросу расчета на несущую способность упругопластичных систем при сложнонапряженном состоянии // Научные труды. Университет “Тефеккюр”. 1996. С. 148–152.
4. *Суворова Ю.В., Ахундов М.Б., Иванов В.Г.* Деформирование и разрушение повреждающихся изотропных тел при сложном напряженном состоянии // Механика композитных материалов. 1987. № 3. С. 396–402.
5. *Ахундов М.Б.* Рассеянное разрушение стержня при статическом и циклическом изгибах // Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 3. С. 141–147.
6. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. С. 311.

Баку

Поступила в редакцию
8.06.2004