

УДК 539.4

© 2006 г. Ю.В. ПЕТРОВ, В.И. СМИРНОВ

## О ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ С МАЛЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Показана эффективность структурного критерия разрушения в таких нестандартных задачах, как определение прочности материалов с малыми дефектами. Выполнено сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальными данными для дефектов малого размера. Предлагаемый подход дает возможность строить двухкритериальные диаграммы разрушения и позволяет с единой позиции давать оценку прочности материала с концентраторами напряжений различного типа.

**1. Введение.** Известно, что многие активно применяемые в промышленности конструкционные материалы, в частности, керамики, содержат короткие трещины. Так керамические материалы, имея высокую прочность, обладают низкими значениями трещиностойкости. Это приводит к повышенной чувствительности керамик в сравнении, например, с металлами, к имеющимся в них даже относительно малым по размерам дефектам. Следствием таких механических особенностей керамик является их высокая хрупкость.

Асимптотический критерий Ирвина для коротких трещин применить не удастся, так как для исчезающе малых трещин он приводит к неограниченно возрастающей критической нагрузке, в то время как последняя должна стремиться к статическому пределу прочности бездефектного материала при растяжении ( $\sigma_c$ ). Для расчета предельного равновесия тела и оценки допустимой длины трещины в этом случае в работе [1] на основе вариационного принципа теории трещин предложен двухпараметрический критерий предельной диаграммы разрушения

$$I_c = K_{Ic} [1 - (\sigma_1/\sigma_c)^2]^{1/2} \quad (1.1)$$

где  $I_c$  – предел трещиностойкости,  $K_{Ic}$  – вязкость разрушения,  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение на продолжении трещины,  $\sigma_c$  – предел прочности бездефектного материала (временное сопротивление). Здесь предел трещиностойкости  $I_c$ , в отличие от вязкости разрушения, не будет постоянным для данного материала, а является функцией длины трещины, или, что то же, функцией критической нагрузки (разрушающего напряжения), которая может подставляться в выражение для  $I_c$  как из асимптотических решений, так и из точных. В работе [2] приведены аппроксимирующие формулы для предела трещиностойкости в разных случаях достижения предельных состояний и дано сопоставление с результатами экспериментов для образцов из стали при различных схемах нагружения.

Впервые двухкритериальный подход был сформулирован в указанной работе [1] и в дальнейшем получил развитие в [3–8]. В этих и других работах предложены различные версии и модификации двухпараметрического критерия (1.1), в том числе с учетом пластической зоны вокруг вершины трещины и размеров образца. Обзор некоторых из этих критериев, а также предельных диаграмм разрушения содержится в [9]. Сравнительный анализ критериев для концентраторов напряжений малых размеров приведен в [10].

В данной работе на примере двух модельных задач – о трещине Гриффитса и о дисковидной трещине в упругом пространстве – предложен более простой, аналитический метод построения двухкритериальных условий разрушения, основанный на применении структурного подхода Нейбера–Новожилова [11, 12], и более точным, в сравнении с асимптотическим, учете напряженного состояния в окрестности макродефекта. Впервые этот подход был сформулирован в работах [13, 14]. Здесь этот метод развит и обобщен на пространственные трещины (дисковидная трещина), а также использован для оценки прочности пластины с гладким концентратором напряжений (круговое отверстие).

**2. Двухкритериальная диаграмма разрушения. 1. Трещина Гриффитса.** Рассмотрим упругую однородную изотропную плоскость, ослабленную прямолинейной трещиной длины  $2l$ . Введем систему координат с началом в середине трещины и осью  $Ox$ , проходящей через линию расположения трещины. Плоскость растягивается на бесконечности равномерной нагрузкой так, что ось растяжения перпендикулярна трещине, а берега трещины свободны от усилий

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_y = p = \text{const}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \\ \sigma_y = 0, \quad y = \pm 0, \quad -l \leq x \leq l \\ \sigma_{xy} = 0, \quad y = 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty \end{aligned}$$

Асимптотика разрывающего напряжения на продолжении трещины имеет вид (см., например, [15]):

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-l)}} + O(1), \quad x-l \rightarrow 0, \quad x > l \quad (2.1)$$

$$K_I = p\sqrt{\pi l} \quad (2.2)$$

где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений.

Точное представление для растягивающего напряжения на продолжении трещины имеет вид [15]:

$$\sigma_y = \frac{px}{\sqrt{x^2 - l^2}}, \quad y = 0, \quad x > l \quad (2.3)$$

Применяя к (2.2) критерий Ирвина

$$K_I = K_{Ic} \quad (2.4)$$

где  $K_{Ic}$  – вязкость разрушения, находим критическую нагрузку

$$p_* = K_{Ic} / \sqrt{\pi l} \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что для исчезающе малой трещины критическая нагрузка неограниченно возрастает. Очевидно, поэтому, что критерий Ирвина для коротких трещин непригоден.

Применим к асимптотическому решению (2.1) структурный критерий

$$\frac{1}{d} \int_l^{l+d} \sigma_y(x) dx = \sigma_c \quad (2.6)$$

где  $\sigma_c$  – предел прочности материала на растяжение,  $d$  – структурный параметр разрушения, имеющий размерность длины.

После интегрирования, с учетом (2.2), находим

$$p_* = \sigma_c \sqrt{dl/(2l)} \quad (2.7)$$

Если принять значение линейного размера ячейки разрушения равным

$$d = 2K_{Ic}^2/(\pi\sigma_c^2) \quad (2.8)$$

то критическая нагрузка  $p_*$  будет совпадать со значением (2.5), то есть, применение критериев Ирвина и структурного к асимптотическому решению (пригодного лишь для длинных трещин) приводит к одинаковым результатам оценки величины разрушающей нагрузки (при выполнении равенства (2.8)).

Приравнявая теперь значения  $p_*$  из (2.5) и (2.7), находим связь вязкости разрушения  $K_{Ic}$  и предела прочности  $\sigma_c$ :

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\pi d/2} \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь точное представление для разрывающего напряжения на продолжении трещины (2.3). После подстановки (2.3) в критерий (2.6), получим

$$p_* = \frac{\sigma_c}{\sqrt{1 + 2l/d}} \quad (2.10)$$

Равенство (2.10) справедливо для любых трещин, как коротких, так и длинных. В частности, при  $l \rightarrow 0$  получаем  $p_* \rightarrow \sigma_c$ .

Следуя концепции предела трещиностойкости [2, 3], введем значение  $K_c$  по формуле

$$K_c = p_* \sqrt{\pi l} \quad (2.11)$$

Предел трещиностойкости (2.11) является функцией критической нагрузки или, что тоже – функцией длины трещины и не всегда является критическим значением коэффициента при сингулярном члене асимптотического разложения с особенностью  $r^{-1/2}$ , так как критическая нагрузка, подставляемая в него, может вычисляться как по асимптотическим, так и по точным формулам для напряжений в вершине трещины.

Если подставить в (2.11) значение критической нагрузки  $p_*$  из равенства (2.5), справедливого для длинных трещин, то получим  $K_c = K_{Ic}$ , т.е. предел трещиностойкости оказывается равным вязкости разрушения материала. Для того, чтобы иметь значение предела трещиностойкости  $K_c$ , пригодное для любых размеров трещины, необходимо воспользоваться значением критической нагрузки  $p_*$ , полученное с помощью структурного критерия из точного решения. Подставляя (2.10) в (2.11) с учетом (2.9), находим связь предела трещиностойкости  $K_c$  и вязкости разрушения  $K_{Ic}$  через безразмерную длину трещины  $2l/d$ :

$$K_c = K_{Ic} \frac{\sqrt{2l/d}}{\sqrt{1 + 2l/d}} \quad (2.12)$$

Для коротких трещин ( $l \rightarrow 0$ ), как следует из (2.12), имеем  $K_c \rightarrow 0$ , а для длинных ( $l \rightarrow \infty$ ),  $K_c \rightarrow K_{Ic}$ .

Из уравнений (2.10) и (2.12) теперь можно получить двухкритериальную диаграмму разрушения (“кривую разрушения”). Исключая отношение  $2l/d$ , получаем

$$\left(\frac{p_*}{\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{K_c}{K_{Ic}}\right)^2 = 1 \quad (2.13)$$

В предельных случаях имеем: (а) при  $l \rightarrow 0$  (бесконечно малая трещина)  $K_c \rightarrow 0$  и  $p_* \rightarrow \sigma_c$ ; (б) при  $l \rightarrow \infty$  (бесконечно большая трещина)  $p_* \rightarrow 0$  и  $K_c \rightarrow K_{Ic}$ . Кривая (2.13) в размерных величинах представляет собой четверть эллипса с полуосями  $\sigma_c$  и  $K_{Ic}$ , а в безразмерных величинах – четверть окружности единичного радиуса.

В теории предельной трещиностойкости [2, 3] соотношение (2.13) вводится как исходный постулат. Здесь же указанное соотношение получено в результате применения структурного критерия и учета точного представления напряженного состояния на продолжении трещины и может рассматриваться как эффект теории хрупкого разрушения.

Таким образом, как следует из вышеизложенного, понятия “короткие” и “длинные” трещины имеют смысл лишь в том случае, когда критическая нагрузка  $p_*$  определяется из приближенного (асимптотического) решения. Расчет  $p_*$  по точному решению охватывает все возможные случаи длины трещины, в том числе и ее отсутствие.

2. *Дисквидная трещина.* Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  осесимметричную задачу о растяжении упругого пространства с дисквидной трещиной радиуса  $a$  равномерной нагрузкой  $p$ , приложенной к ее берегам

$$\sigma_z = -p, \quad z = 0, \quad r < a$$

$$u_z = 0, \quad z = 0, \quad r > a$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < \infty$$

Асимптотика разрывающего напряжения на продолжении трещины имеет вид [16]:

$$\sigma_z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-a)}} + O(1), \quad r-a \rightarrow 0, \quad r > a \quad (2.14)$$

$$K_I = 2p\sqrt{a/\pi} \quad (2.15)$$

где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений.

Решение (2.14) сохраняет свою силу и в случае, когда нагрузка  $p$  приложена на бесконечности по нормали к плоскости трещины.

Точное представление растягивающего напряжения  $\sigma_z$  на продолжении трещины также известно [16]. После переноса нагрузки на бесконечность оно принимает вид

$$\sigma_z = -\frac{2p}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{r} - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right] + p, \quad z = 0, \quad r > a \quad (2.16)$$

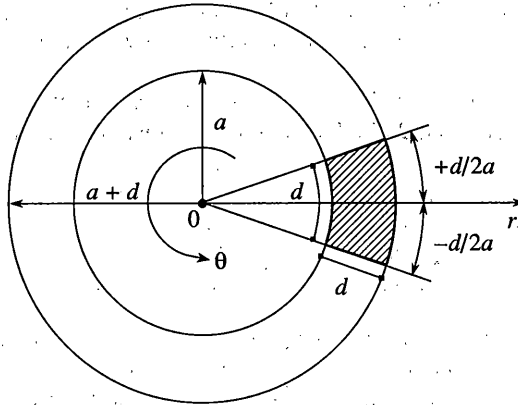
Применяя к (2.15) критерий Ирвина (2.4), находим критическую нагрузку

$$p_* = 1/2 K_{Ic} \sqrt{\pi/a} \quad (2.17)$$

Так же как и для трещины Гриффитса, из (2.17) следует, что  $p_* \rightarrow \infty$  при  $a \rightarrow 0$ , т.е. для малых трещин критерий Ирвина неприменим.

Воспользуемся теперь структурным критерием. Полагаем, что разрушение будет происходить в плоскости  $z = 0$  и что элементарная ячейка разрушения имеет форму кольцевого сектора ( $z = 0, a \leq r \leq a + d, -d/(2a) \leq \theta \leq d/(2a)$ ) с площадью  $S_0 = d(2ad + d^2)/(2a)$  (фиг. 1). Тогда критерий (2.6) можно записать в общем виде следующим образом:

$$\frac{1}{S_0} \int_S \sigma_z(r, \theta) dS = \sigma_c \quad (2.18)$$



Фиг. 1

Так как  $dS = r dr d\theta$  и угол  $\theta$  меняется от  $-d/(2a)$  до  $+d/(2a)$ , а  $\sigma_z$  не зависит от угла, то (2.18) принимает вид

$$\frac{1}{S_0} \int_{-d/(2a)}^{+d/(2a)} d\theta \int_a^{a+d} \sigma_z(r) r dr = \sigma_c$$

или

$$\frac{2}{2ad + d^2} \int_a^{a+d} \sigma_z(r) r dr = \sigma_c \tag{2.19}$$

Если  $d/a \rightarrow 0$  (“очень большая трещина”), то получаем критерий критического напряжения  $\sigma_z(a) = \sigma_c$ , если  $d \geq 2\pi a$  (“очень маленькая трещина”), то  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .

Применим (2.19) к асимптотическому решению (2.14). После интегрирования находим

$$\frac{K_I}{\sqrt{d} \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2 + d/(3a)}}{\sqrt{1 + d/(2a)}} = \sigma_c$$

Отсюда, с учетом (2.15), получаем

$$p_* = \sigma_c \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{2a}} \frac{1 + d/(2a)}{1 + d/(3a)} \tag{2.20}$$

Для больших трещин ( $d/a \rightarrow 0$ ) имеем

$$p_* = \sigma_c \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d}{2a}} \tag{2.21}$$

Подставляя в последнее выражение (2.21) значение  $d$ , равное, как и в плоской задаче (2.8), получим критическую нагрузку  $p_*$ , совпадающую со значением (2.17), найденным по критерию Ирвина.

Приравняв теперь значения  $p_*$  из (2.17) и (2.20), находим связь между вязкостью разрушения  $K_{Ic}$  и пределом прочности  $\sigma_c$ :

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\frac{\pi d}{2}} \frac{1 + d/(2a)}{1 + d/(3a)} \tag{2.22}$$

Для больших трещин ( $d/a \rightarrow 0$ ) уравнение (2.22) будет аналогично (2.9), которое получено для трещины Гриффитса и которое определяет структурный параметр  $d$  в условиях плоской деформации.

Подставим теперь в критерий (2.19) точную формулу для растягивающего напряжения на продолжении трещины (2.16). После интегрирования находим разрушающую нагрузку

$$p_* = \frac{\sigma_c \pi (1 + 2a/d)}{2 \left[ \left(1 + \frac{a}{d}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a/d}{1 + a/d}\right) + \frac{a}{d} \sqrt{1 + \frac{2a}{d}} \right]} \quad (2.23)$$

Выражение (2.23) пригодно для любых трещин, – больших и малых, в частности, при  $a \rightarrow 0$  получаем  $p_* \rightarrow \sigma_c$ , а при  $a \rightarrow \infty$  будем иметь  $p_* \rightarrow 0$ .

Как и в предыдущей задаче, введем значение предела трещиностойкости  $K_c$  согласно (2.15)

$$K_c = 2p_* \sqrt{a/\pi} \quad (2.24)$$

Как отмечено выше, в общем случае предел трещиностойкости не совпадает с вязкостью разрушения и является функцией длины (в данном случае – радиуса) трещины. В частном случае, для бесконечно больших трещин  $p_* = 1/2 K_{Ic} \sqrt{\pi/a}$  и  $K_c = K_{Ic}$ . Значение предела трещиностойкости, пригодное для любых размеров трещины можно получить подставляя в (2.24) критическую нагрузку не из асимптотического решения (2.17), а из точного (2.23), полученного с помощью структурного критерия. После указанной подстановки, с учетом (2.22), находим

$$K_c = \frac{2}{3} K_{Ic} \frac{(1 + 3a/d) \sqrt{2ad}}{\left(1 + \frac{a}{d}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a/d}{1 + a/d}\right) + \frac{a}{d} \sqrt{1 + \frac{2a}{d}}} \quad (2.25)$$

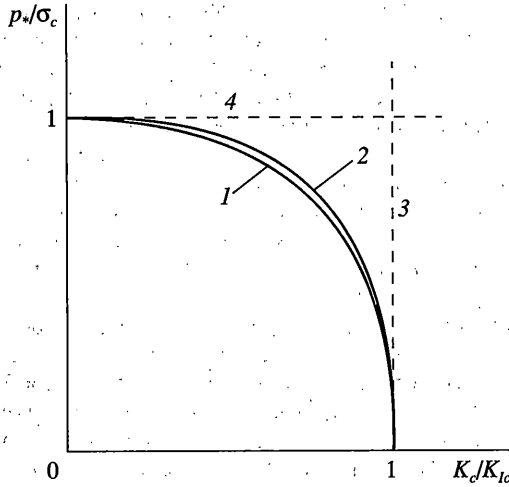
Для коротких трещин ( $a \rightarrow 0$ ), как это следует из (2.25), имеем  $K_c \rightarrow 0$ , а для длинных ( $a \rightarrow \infty$ )  $K_c = K_{Ic}$ .

Уравнения (2.23) и (2.25) совместно задают параметрическое представление “кривой разрушения”, которая отличается от единичной окружности несколько большей выпуклостью (фиг. 2). На фиг. 2 обозначено: 1 – трещина Гриффитса, 2 – дисковидная трещина; 3 – предельный случай – “длинные” трещины, 4 – предельный случай – “короткие” трещины.

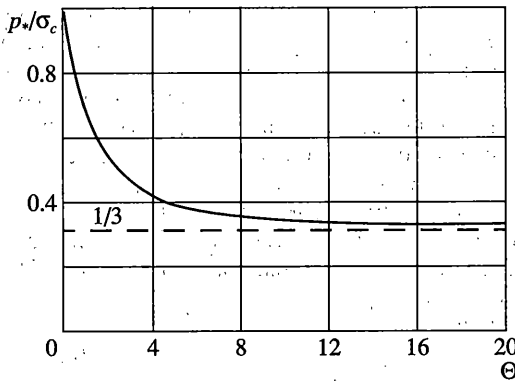
Таким образом, структурный критерий оказывается вполне работоспособным не только в плоских задачах теории трещин, где он применялся до сих пор, но и в пространственных. Кроме того, как показано выше, он позволяет получать двухкритериальные условия разрушения, а взаимосвязь характеристик предельной трещиностойкости ( $p_*/\sigma_c$  и  $K_c/K_{Ic}$ ) может рассматриваться, как и в плоской задаче, как эффект теории хрупкого разрушения.

**3. Пластина с круговым отверстием.** Рассмотрим одноосное растяжение бесконечной упругой пластины с круговым отверстием радиуса  $a$  (задача Кирша) в полярной системе координат ( $r, \theta$ ). Если равномерное растягивающее напряжение  $p$ , приложенное на бесконечности, действует в направлении  $\theta = 0$ , то максимальное значение нормального разрывающего окружного напряжения вдоль оси  $\theta = \pm\pi/2$  определяется выражением [17]:

$$\max \sigma_\theta(r, \theta = \pm\pi/2) = p \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \right]$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Элементарная ячейка разрушения в данном случае, – отрезок и критериальное соотношение записывается в виде

$$\frac{1}{d} \int_a^{a+d} \sigma_{\theta} \left( r, \pm \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_c$$

Интегрируя, находим

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{1}{1 - \frac{\Theta}{2} \left( \frac{\Theta}{\Theta+1} - 1 \right) - \frac{\Theta}{2} \left[ \left( \frac{\Theta}{\Theta+1} \right)^3 - 1 \right]} \quad (2.26)$$

где  $\Theta = a/d$ . При  $\Theta \rightarrow 0$  имеем  $p_* = \sigma_c$ , а при  $\Theta \rightarrow \infty$  получаем известное соотношение  $p_*/\sigma_c = 1/3$ . Следовательно, определять критическую нагрузку по коэффициенту концентрации напряжений можно лишь для пластин с бесконечно большими отверстиями по сравнению со структурным параметром  $d$ , в то время, как структурный критерий физически адекватно описывает напряженно-деформированное состояние пластины во всем диапазоне размеров отверстия. Зависимость отношения  $p_*/\sigma_c$  от безразмерного параметра  $\Theta$  приведена на фиг. 3.

**3. Оценка точности представления разрушающей нагрузки сингулярным членом асимптотического разложения.** Построенная дифференциальная диаграмма отражает лишь те предельные случаи, когда трещины или нет, или когда она бесконечно большая, и не дает ответа на вопрос, – как рассчитывать разрушающую нагрузку  $p_*$  (т.е. прочность материала) для заданной длины трещины? Из вышеизложенного следует, что лучшим способом было бы использование точного решения задачи. Однако точных решений в механике разрушения известно очень мало, поэтому очевидно, что в инженерной практике придется пользоваться только асимптотическим решением на основе сингулярного члена разложения, так как в этом случае достаточно знать лишь коэффициент интенсивности напряжений. Значения последнего для обширного класса задач известны и приведены в справочниках.

При заданной конкретной длине трещины для повышения точности определения критической нагрузки можно учесть регулярные слагаемые в асимптотическом разложении. Однако с практической точки зрения это вряд ли целесообразно: это достаточно трудоемко и в прикладных задачах, где требуется быстрая оценка прочности, не нашло применения; при произвольной длине трещины учет регулярных членов разложения не дает приближения к точному решению в силу неравномерности асимптотики – последовательное уменьшение длины трещины требует удержания все большего количества членов асимптотического ряда<sup>1</sup>.

Таким образом, можно говорить лишь о точности представления сингулярным членом асимптотического приближения величины критической нагрузки  $p_*$  при определении прочности тел с малыми трещинами. Заранее нельзя указать некоторую “критическую” длину трещины  $l_*$  (т.е. точку на двухкритериальной диаграмме), начиная с которой следует вести расчет прочности материала с учетом наличия трещины, а в случае  $l < l_*$  пренебречь ею и считать материал бездефектным. В работе [19] предлагается связать допускаемую длину трещины  $l_*$  с величиной структурного параметра  $d$ . Простейшим рассуждением здесь может быть следующее. Для трещины Гриффитса критическая нагрузка  $p_*$ , как это следует из (2.7), будет совпадать с пределом хрупкой прочности  $\sigma_c$ , если принять  $l = d/2$ , то есть допускаемый размер трещины  $2l_* = d$ . Для дисковидной трещины, определенный таким образом критический размер составит (если пренебречь в (2.20) отношением  $[1 + d/(2a)]/[1 + d/(3a)]$ )  $2a_* = \pi^2 d/4 \approx 2.47d$ . Очевидно, что это лишь некая условная оценка, так как  $p_* = \sigma_c$  строго при  $l = 0$  ( $a = 0$ ).

Для оценки точности определения критической нагрузки  $p_*$  с помощью сингулярного члена асимптотического приближения воспользуемся выражением относительной погрешности

$$\Delta = \left| \frac{p_e - p_a}{p_e} \right| 100\%$$

где  $p_e$  и  $p_a$  – критическая нагрузка, определенная по точному и асимптотическому решению соответственно. Тогда имеем:

для трещины Гриффитса (формулы (2.7) и (2.10)):

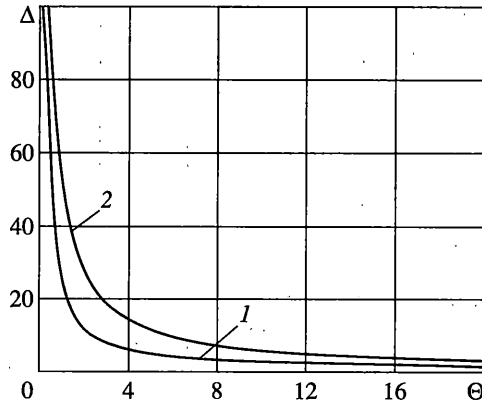
$$\Delta = \left| 1 - \sqrt{\frac{1}{2\Theta} + 1} \right| 100\% \quad (3.1)$$

для дисковидной трещины (формулы (2.20) и (2.23))

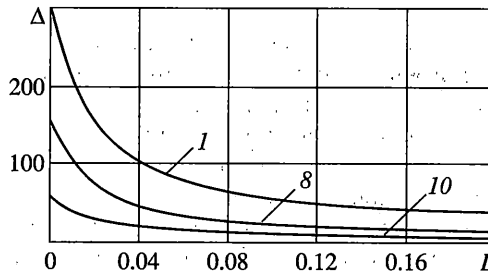
$$\Delta = \left| 1 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2\Theta} \frac{f(\Theta)}{1 + 3\Theta}} \right| 100\% \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Отметим попытку такого рода, предпринятую в работе [18]. Здесь вводятся поправочные функции в виде множителей к коэффициенту интенсивности напряжений, “учитывающие” влияние несингулярных членов решения, конечных размеров образца и тип нагружения (отрыв/поперечный сдвиг).





Фиг. 4

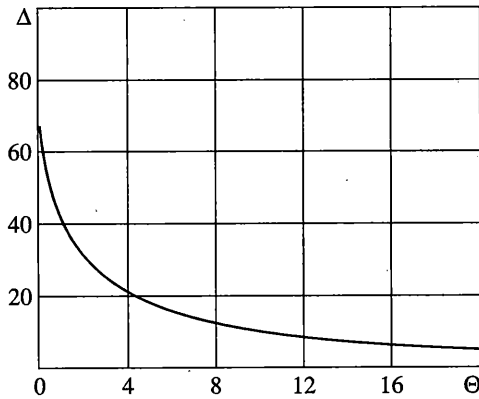


Фиг. 5

В выражениях (3.1) и (3.2),  $\Theta = l/d$  – для трещины Гриффитса и  $\Theta = a/d$  – для дисковидной трещины. Зависимость относительной погрешности  $\Delta$  от безразмерной длины трещины  $\Theta$  приведена на фиг. 4, на которой цифрами обозначено: 1 – трещина Гриффитса, 2 – дисковидная трещина.

Рассмотрим конкретный материал. Пусть дефект имеет форму трещины Гриффитса. В таблице приведены прочностные характеристики ( $\sigma_c, K_{Ic}$ ) некоторых керамик, взятые из работы [8], а также значение структурного параметра  $d$ , определенное по формуле (2.8). Зависимость относительной погрешности представления критической нагрузки сингулярным членом асимптотического ряда от длины трещины (в мм) для трех материалов из указанных в табл. 1, приведена на фиг. 5.

№	Материал	$\sigma_c$ , МПа	$K_{Ic}$ , МПа $\sqrt{м}$	$d$ , мм
1	$Al_2O_3$	200	3.1	0.153
2	$Al_2O_3$	500	3.3	0.028
3	$Si_3N_4$	650	4.5	0.031
4	$Si_3N_4$	580	4.3	0.035
5	$Si_3N_4$	750	5.2	0.031
6	$Si_3N_4$	920	5.6	0.024
7	$Si_3N_4$	1160	7.8	0.029
8	$Si_3N_4$	290	2.7	0.055
9	SiC	620	3.7	0.023
10	Sialon	920	4.6	0.016



Фиг. 6

Как видно из фиг. 5, материалы с большим структурным параметром  $d$  приводят к большей относительной погрешности приближенного решения. С увеличением длины трещины различие в величине  $\Delta$  сильно уменьшается. Это следствие масштабного эффекта (отношение  $l/d$ ), поэтому здесь можно говорить о структурно “коротких” и структурно “длинных” трещинах. В целом, величина структурного параметра  $d$ , как это видно из табл. 1, весьма мала и составляет примерно  $10^{-4}-10^{-5}$  м, в то время, как у металлов, например,  $\sim 10^{-3}$  м. Это обстоятельство служит одной из причин высокой чувствительности керамик к наличию малых дефектов и, соответственно, высокой хрупкости и низкой трещиностойкости.

Для пластины с отверстием радиуса  $a$  погрешность оценки критической нагрузки по коэффициенту концентрации напряжений может быть оценена из выражения

$$\Delta = \left| 1 - \frac{g(\Theta)}{3} \right| 100\%$$

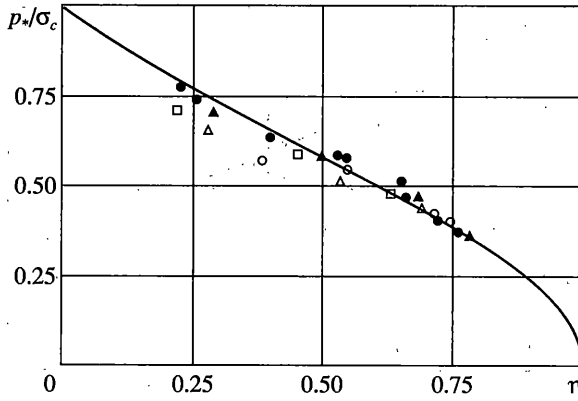
$$g(\Theta) = 1 - \frac{\Theta}{2} \left( \frac{\Theta}{\Theta+1} - 1 \right) - \frac{\Theta}{2} \left[ \left( \frac{\Theta}{\Theta+1} \right)^3 - 1 \right], \quad \Theta = \frac{a}{d}$$

На фиг. 6 представлена соответствующая зависимость. Максимальная погрешность (67%) имеет место для очень малых отверстий ( $a \rightarrow 0$ ), а при  $\Theta \geq 10$  величина  $\Delta$  уже не превышает 10%.

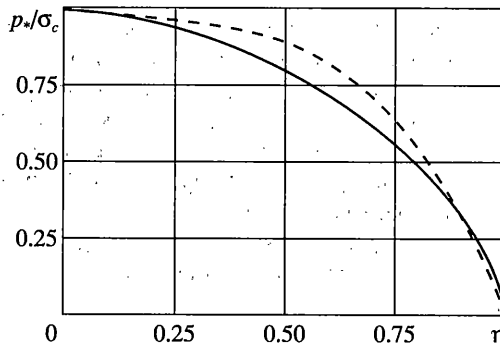
**4. Сопоставление с экспериментальными данными. 1. Трещина Гриффитса.** Введем новую безразмерную переменную  $\eta = l/(l+d)$ , где  $l$  – полудлина трещины. Тогда, выражение (2.10) можно переписать в виде

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \tag{4.1}$$

Как следует из (4.1) при  $\eta \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow 0$ , короткая трещина)  $p_*/\sigma_c \rightarrow 1$ , а при  $\eta \rightarrow 1$  ( $l \rightarrow \infty$ , длинная трещина)  $p_*/\sigma_c \rightarrow 0$ . Соответствующая кривая показана на фиг. 7. Результаты эксперимента для слоистых композитных материалов, содержащих короткие трещины, взяты из работы [10]. В указанной работе учтена конечная ширина образцов, а величина структурного параметра  $d$  определена для трещин максимальной длины. На фиг. 7 приняты следующие условные обозначения: светлые точки – эпоксидный углепластик с укладкой  $[0^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_{2s}$ ; светлые квадраты – с укладкой  $[+45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ ; светлые



Фиг. 7



Фиг. 8

треугольники – с укладкой  $[90^\circ/0^\circ + 45^\circ/-45^\circ]_s$ ; темные треугольники – с укладкой  $[0^\circ + 45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$ ; темные точки – бороалюминий.

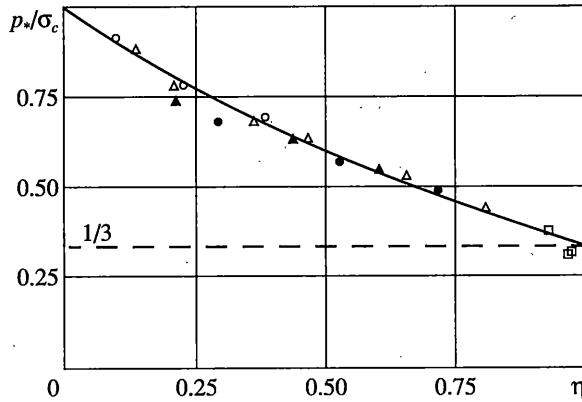
Как видно из фигуры, теория предсказывает несколько завышенные значения критической нагрузки для наиболее коротких трещин, по сравнению с экспериментальными данными.

2. *Дисковидная трещина.* Безразмерный параметр  $\eta$  теперь имеет вид  $\eta = a/(a + d)$ , где  $a$  – радиус трещины, а выражение для критической нагрузки (2.23) может быть записано следующим образом:

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{\pi(1 - \eta^2)}{2[\arccos \eta + \eta\sqrt{1 - \eta^2}]} \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (4.2)$$

При  $\eta \rightarrow 0$  ( $a \rightarrow 0$ , малая трещина)  $p_*/\sigma_c \rightarrow 1$ , а при  $\eta \rightarrow 1$  ( $a \rightarrow \infty$ , большая трещина)  $p_*/\sigma_c \rightarrow 0$ .

Зависимость (4.2) приведена на фиг. 8 (сплошная кривая). Экспериментальные данные взяты из работы [20]: с помощью динамического нагружения в поликарбонате искусственно выращивались очень мелкие трещины дисковидной формы, расположенные друг от друга на расстоянии, достаточным для того, чтобы считать пространство, окружающее каждую трещину бесконечным. Затем образец с трещинами подвергался рас-



Фиг. 9

тягивающей динамической нагрузке, которая фиксировалась в момент старта трещины. В результате обработки наблюдений большого числа трещин радиусом от 0.01 мм до 2.78 мм в указанной работе построена кривая зависимости разрушающего напряжения от радиуса трещины. На фиг. 8 представлена в принятых здесь координатах часть этой зависимости, отвечающая статическому характеру нагружения (штриховая кривая). Как видно из рисунка, наибольшее различие теоретической кривой с экспериментальной наблюдается для трещин средних размеров.

3. *Пластина с круговым отверстием.* Как и ранее, будем использовать безразмерный параметр  $\eta = a/(a + d)$ , где  $a$  – радиус отверстия. Выражение для критической нагрузки (2.26) теперь примет вид

$$\frac{p_*}{\sigma_c} = \frac{2}{(1 + \eta)(2 + \eta^2)} \quad (4.3)$$

При  $\eta \rightarrow 0$  ( $a \rightarrow 0$ , малое отверстие)  $p_*/\sigma_c \rightarrow 1$ , а при  $\eta \rightarrow 1$  ( $a \rightarrow \infty$ , большое отверстие)  $p_*/\sigma_c \rightarrow 1/3$ . Зависимость (4.3) представлена графически на фиг. 9, а экспериментальные данные по прочности слоистых композитов, приведенные на этом же рисунке, заимствованы из работы [10] (условные обозначения – те же, что на фиг. 7). Горизонтальная штриховая линия соответствует оценке критической нагрузки по коэффициенту концентрации напряжений.

**5. Заключение.** Рассмотренные модельные задачи свидетельствуют об эффективности структурного подхода Нейбера – Новожилова в таких нестандартных статических задачах, как проблемы разрушения хрупких сред с малыми дефектами. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными показывает вполне удовлетворительное согласие.

Предложенный подход позволяет давать оценку прочности материалов с короткими трещинами и с регулярными концентраторами напряжений малых размеров (отверстиями), а также получать двухкритериальные условия разрушения. Взаимосвязь характеристик предельной трещиностойкости предлагается рассматривать как эффект теории хрупкого разрушения.

Показано также, что структурный подход эффективно “работает” не только в плоских задачах теории трещин, но и в пространственных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-01035).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Е.М., Фридман Я.Б. Некоторые закономерности в теории трещин // Прочность и деформация материалов в неравномерных физических полях. Вып.2. М.: Атомиздат, 1968. С. 216–253.
2. Морозов Е.М. Двухкритериальные подходы в механике разрушения // Проблемы прочности. 1985. № 10. С. 103–108.
3. Морозов Е.М. Метод расчета на прочность при наличии трещин // Проблемы прочности. 1971. № 1. С. 35–40.
4. Dowling A.R., Townley C.H.A. The effect of defects on structural failure: a two-criteria approach // The Intern. J. Pressure Vessels and Piping. 1975. V. 3. № 2. P. 77–107.
5. Васильченко Г.С. Критерий прочности тел с трещинами при квазихрупком разрушении материала // Машиноведение. 1978, № 6. С. 103–108.
6. Маркочев В.М. Расчет на прочность при наличии малых трещин // Проблемы прочности. 1980. № 1. С. 3–6.
7. Васютин А.Н. О критерии прочности материала при наличии коротких трещин // Физ.-хим. механика материалов. 1988. Т. 24. № 3. С. 68–74.
8. Ando K., Kim B.A., Iwasa M., Ogura N. Process zone size failure criterion and probabilistic fracture assessment curves for ceramics // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. 1992. V. 15. № 2. P. 139–149.
9. Махутов Н.А., Москвичев В.В., Козлов А.Г., Цылюк А.Н. Расчеты на трещиностойкость и эффекты пластического деформирования при наличии коротких трещин // Заводская лаборатория. 1990. Т. 56. № 3. С. 48–56.
10. Исупов Л.П. Нелокальные критерии разрушения: сравнительный анализ и применение для слоистых композитов // Механика композитных материалов. 1998. Т. 34. № 2. С.198–210.
11. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
12. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.
13. Петров Ю.В., Тарабан В.В. О двухкритериальных моделях разрушения хрупких материалов // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 2. С. 78–81.
14. Петров Ю.В., Тарабан В.В. Двухкритериальный анализ хрупкого разрушения образцов с малыми поверхностными повреждениями // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1.
15. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
16. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1946. V. 187. № 1009. P. 229–260.
17. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
18. Кокшаров И.И. Двухпараметрический подход механики разрушения – силовой интегральный критерий // Заводская лаборатория. 1989. Т. 55. № 4. С. 81–86.
19. Леган М.А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. 1993. Т. 34. № 4. С. 146–154.
20. Kalthoff J.F., Shockey D.A. Instability of cracks under impulse loads // J. Appl. Phys. 1977. V. 48. № 3. P. 986–993.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
27.09.2004