МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2006

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. В.П. ГЕОРГИЕВСКИЙ, П.Б. ПИЛИПЕНКО

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, СКРЕПЛЕННЫХ С УПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Работы, посвященные вопросам колебаний и устойчивости оболочек [1], скрепленных с упругим цилиндрическим телом (заполнителем), можно разделить на три группы в зависимости от расчетной схемы, принятой для заполнителя.

К первой группе работ относятся работы, в которых заполнитель моделируется упругим основанием с одним (основание Винклера) или двумя (основание Пастернака) коэффициентами "постели". Ко второй группе относятся работы, в которых заполнитель рассматривается как упругое трехмерное тело и описывается уравнениями теории упругости, либо уравнениями, получающимися из них путем сведения пространственной задачи к двумерной или одномерной, при этом докритическое напряженное состояние заполнителя не учитывается. К последней, третьей группе, относятся работы, в которых учитывается докритическое состояние заполнителя; в них используются трехмерные линеаризованные уравнения упругой устойчивости, получающиеся путем линеаризации нелинейных уравнений теории упругости.

Решение задач с использованием первой модели заполнителя позволяет выявить основные закономерности потери устойчивости оболочек с заполнителем. К более строгой постановке задач по устойчивости оболочек с заполнителем относятся работы второй группы, в этих задачах на торцах упругого заполнителя рассматриваются смешанные граничные условия (равенство нулю осевых напряжений и радиальных перемещений), что соответствует рассмотрению заполнителя в виде бесконечно длинного цилиндра. Случай заполнителя со свободными торцами приближенно рассматривался в [2], задача решалась энергетическим методом и при учете только радиального взаимодействия между оболочкой и заполнителем. Устойчивость оболочек с заполнителем с учетом докритического напряженного состояния заполнителя рассматривалась в работах Власова В.В., Иванова В.А., Германа Ж., Форрестола М. [1]. В них показано, что для широкого диапазона изменения жесткостных и геометрических параметров можно пренебречь докритическим состоянием заполнителя и работу его описывать линейными уравнениями Ламе. Несмотря на большое количество работ, посвященных колебаниям и устойчивости ортотропных оболочек, скрепленных с упругим заполнителем, многие вопросы еще полностью не решены:

отсутствует строгое решение задачи колебаний и устойчивости сжатой цилиндрической оболочки, скрепленной с упругим заполнителем, при различных граничных условиях на его торцах, в том числе, свободных от напряжений; в недостаточной мере проведена экспериментальная проверка теоретических решений.

В статье заполнитель рассматривается как упругое изотропное тело конечной длины с соосным цилиндрическим каналом конечной длины, что соответствует рассмотрению на его торцах четырех возможных вариантов граничных условий.

Математическая постановка задачи заключается в записи дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемой системы, "оболочка – заполнитель", формулировке граничных условий на торцах заполнителя, оболочки и условий на цилиндрических поверхностях заполнителя.

1. Уравнения движения цилиндрической оболочки. Запишем уравнения движения сжатой ортотропной цилиндрической оболочки, скрепленной по внутренней поверхности с упругим изотропным цилиндром

$$M^{xx}+Q+T_1W^x = 0,\quad Q^x-T_2R^{-1}-q_r-\rho_0hW_0^{tt} = 0,\quad T_1^x-q_x-\rho_0hU_0^{tt} = 0 \tag{1.1}$$

где T_1, T_2 – нормальные усилия в осевом и окружном направлениях; Q – перерезывающее усилие; M – меридиональный изгибающий момент; q_r и q_x – составляющие реакции упругого цилиндрического тела в радиальном и осевом направлениях; W_0 и U_0 – радиальный прогиб и осевое перемещение срединной поверхности оболочки; ρ_0 – плотность материала оболочки; R и h – радиус и толщина оболочки.

Верхние индексы (x, t) означают дифференцирование соответственно по осевой координате x и по времени t. Момент и нормальные усилия в оболочке связаны с перемещениями следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}M = D_1W_0^{xx},\quad T_1 = T_0+\Delta T_1,\quad T_2 = \Delta T_2,\quad \Delta T_1 = B_1(U_0^x+\nu_2R^{-1}W_0),\\ \Delta T_2 = B_2(R^{-1}W_0+\nu_1U_0)\\ B_j = E_jh(1-\nu_1\nu_2)^{-1},\quad D_j = E_jh^3(12(1-\nu_1\nu_2))^{-1}\end{gathered} \tag{1.2}$$

где T_0 – начальное сжимающее усилие в оболочке; ΔT_1 и ΔT_2 – приращения усилий; E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона материала оболочки в осевом и окружном направлениях соответственно.

Уравнения (1.1) получены при условиях, что осевое усилие воспринимается только оболочкой, докритическое состояние которой считается безмоментным, и докритическое взаимодействие между оболочкой и заполнителем не учитывается.

Продифференцировав первое уравнение системы (1.1) и подставив в него из второго уравнения этой же системы выражение для производной от перерезывающего усилия, получим уравнение

$$M^{xx}-T_2R^{-1}-q_r-\rho_0hW_0^{tt}+T_1^xW_0^x = 0 \tag{1.3}$$

Подставив в уравнение (1.3) выражения для момента, нормальных усилий согласно (1.2) и, линеаризовав его относительно приращений нормальных усилий, получим

$$D_1W_0^{xxxx}+T_0W_0^{xx}+(W_0+\nu_1U_0^x)+\rho_0hW_0^{tt}-q_r = 0 \tag{1.4}$$

Из третьего уравнения системы (1.1), подставив в него выражения для осевого усилия T_1, получим

$$B_1(U_0^{xx}+\nu_2W_0^x)-\rho_0hW_0^{tt}+q_x = 0 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.4) и (1.5) запишем в безразмерном виде

$$\varepsilon W_0^{\xi\xi\xi\xi}+\varepsilon_1\lambda W_0^{\xi\xi}+\delta W_0+\nu_2U_0^{\xi}+\theta_{W0}-\delta_1q_r = 0,\quad U_0^{\xi\xi}+\nu_2W_0^{\xi}+\theta_{U0}-\delta_1q_x = 0$$

$$\varepsilon = h^2(12R^2)^{-1},\quad \varepsilon_1 = 2(\varepsilon\delta(1-\nu_1\nu_2))^{0.5},\quad \theta_{W0} = \delta_2W_0^{tt},\quad \delta = E_2E_1^{-1},$$

$$\delta_1 = (1-\nu_1\nu_2)R^2(E_1h)^{-1} \tag{1.6}$$

$$\lambda = T_1T_*^{-1}, \quad \theta_{U0} = \delta_2 U_0^{tt}, \quad \delta_2 = \rho_0 R^2(1-\nu_1\nu_2)E_1^{-1},$$

$$T_* = h^2R^{-1}(E_1E_2(3(1-\nu_1\nu_2))^{-1})^{0.5}$$

где T_* – критическое усилие для цилиндрической оболочки без заполнителя, верхний индекс (ξ) означает дифференцирование по осевой безразмерной координате $\xi = xR^{-1}$.

На торцах оболочки рассматривается шарнирное опирание, при котором должны выполняться условия

$$W = W^{\xi\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, l \tag{1.7}$$

где $l = LR^{-1}$ – безразмерная длина оболочки и заполнителя.

Если внутренняя поверхность канала заполнителя скреплена с ещё одной оболочкой, то уравнения движения для внешней и внутренней оболочек с учетом реакций от взаимодействия их с заполнителем имеют вид

$$\begin{gathered}\varepsilon(W_0^{(i)})^{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon_1^{(i)}\lambda^{(i)}(W_0^{(i)})^{\xi\xi} + \delta^{(i)}W_0^{(i)} + \nu_2^{(i)}(U_0^{(i)})^{\xi} + \theta_{W0}^{(i)} \pm \delta_1^{(i)}q_r^{(i)} = 0\\ (U_0^{(i)})^{\xi\xi} + \nu_2^{(i)}(W_0^{(i)})^{\xi} - \theta_{U0}^{(i)} - \delta_1^{(i)}q_x^{(i)} = 0 \ (i = 1, 2)\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $i = 1$ относится к внешней оболочке, $i = 2$ – к внутренней.

2. Уравнения теории упругости для заполнителя. Для описания поведения заполнителя используем обыкновенные уравнения линейной теории упругости. Уравнения движения, описывающие осесимметричное напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, без учета докритического напряженного состояния, можно записать аналогично [3]

$$\begin{gathered}\alpha_1(W_s^r + W_sr^{-1} + U_s^{\xi})^r + (W_s^{\xi} - U_s^r)^{\xi} - \theta_W = 0\\ \alpha_1(W_s^r + W_sr^{-1} + U_s^{\xi})^{\xi} + r^{-1}(r(W_s^{\xi} - U_s^r))^r - \theta_U = 0\\ \alpha_1 = 2(1-\nu_s)\alpha_2, \quad \alpha_2 = (1-2\nu_s)^{-1}, \quad \theta_W = \alpha_\theta\rho_sRW_s^{tt}, \quad \theta_U = \alpha_\theta\rho_sRU_s^{tt}\\ \alpha_\theta = \alpha_6RE_s^{-1}, \quad \alpha_6 = 2(1+\nu_s)\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $W_s(r, \xi, t)$ и $U_s(r, \xi, t)$ – радиальные и осевые перемещения в заполнителе; верхний индекс (r) при перемещениях означает дифференцирование по безразмерной радиальной координате $r = \rho R^{-1}$; ρ – радиальная координата; E_s, ν_s, ρ_s – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала заполнителя.

Напряжения в заполнителе определяются выражениями

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}(r, \xi, t) = \alpha_4(\alpha_5W_s^r + W_sr^{-1} + U_s^{\xi})\\ \sigma_{\xi\xi}(r, \xi, t) = \alpha_4(\alpha_5U_s^r + W_sr^{-1} + W_s^{\xi}), \quad \tau_{\xi}(r, \xi, t) = \alpha_\theta^{-1}(U_s^r + W_s^{\xi})\\ \alpha_4 = \alpha_3\alpha_\theta^{-1}, \quad \alpha_3 = 2\nu_s\alpha_2, \quad \alpha_5 = (1-2\nu_s)\nu_s^{-1}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Условия сопряжения оболочки с упругим телом запишем для двух вариантов. В первом предполагается жесткое соединение оболочки с упругим телом, т.е. не допускается ни отрыв оболочки от упругого тела, ни взаимное их осевое проскальзывание.

Условия эти имеют вид

$$
\begin{aligned}
&W_s(r^{(i)}, \xi, t) = W_s^{(i)}, \quad \sigma_{rr}(r^{(i)}, \xi, t) = \pm q_r^{(i)}, \\
&U_s(r^{(i)}, \xi, t) = U_0^{(i)} \pm h^{(i)}(2R^{(i)})^{-1}(W_0^{(i)})^{\xi} \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где $r^{(1)} = 1$; $r^{(2)} = r_0 = R_0R^{-1}$, r_0 – безразмерный радиус. Отметим, что, согласно расчетам для тонкостенных оболочек, которые рассматриваются в данной статье, последнее условие может быть записано в виде $U_s(r^{(i)}, \xi, t) = U_0^{(i)}$, т.е для тонкостенных оболочек поверхность контакта с заполнителем отождествляется со срединной поверхностью оболочки.

Во втором варианте сопряжения допускается взаимное проскальзывание оболочки и заполнителя в осевом направлении и не допускается их отрыв в радиальном направлении

$$
W_s(r^{(i)}, \xi, t) = W_s^{(i)}, \quad \sigma_{rr}(r^{(i)}, \xi, t) = \pm q_r^{(i)}, \quad \tau_{r\xi}(r^{(i)}, \xi, t) = 0 \tag{2.4}
$$

На внутренней цилиндрической поверхности заполнителя при $r = r_0$ при отсутствии внутренней оболочки принимаются условия равенства нулю радиальных и касательных напряжений

$$
\sigma_{rr}(r_0, \xi, t) = 0, \quad \tau_{r\xi}(r_0, \xi, t) = 0 \tag{2.5}
$$

На торцах упругого тела рассматриваются четыре вида возможных граничных условий при $\xi = 0$ и $\xi = l$:

$$
\begin{aligned}
&\text{Г1:}\ \ W_s(r, \xi, t) = 0, \quad \sigma_{\xi\xi}(r, \xi, t) = 0; \ \text{Г2:}\ \ \tau_{r\xi}(r, \xi, t) = 0, \quad \sigma_{\xi\xi}(r, \xi, t) = 0 \\
&\text{Г3:}\ \ W_s(r, \xi, t) = 0, \quad U_s(r, \xi, t) = 0; \ \text{Г4:}\ \ \tau_{r\xi}(r, \xi, t) = 0, \quad U_s(r, \xi, t) = 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Условие (Г1) предполагает наличие на торцах заполнителя мембран, абсолютно жестких в своей плоскости и гибких из своей. Решение, удовлетворяющее граничным условиям (Г1), соответствует решению для бесконечно длинного заполнителя. Торцы упругого цилиндрического тела, свободные от напряжений, (Г2) соответствуют реальным граничным условиям для большинства задач взаимодействия оболочек с заполнителем, когда внешнее воздействие на систему в виде осевых усилий воспринимается только оболочкой (или оболочками). Условия (Г3) и (Г4) предполагают наличие на торцах упругого цилиндра мембран, абсолютно жестких из своей плоскости и жестко связанных с упругим телом в радиальном направлении (Г3) или допускают взаимное касательное проскальзывание (Г4). Отметим, что условие (Г4) корректно рассматривать для шарнирно опертой оболочки, скрепленной со сплошным заполнителем, т.к. в случае полого заполнителя на торцах $W(r_0) \neq 0$.

Условия (Г3) и (Г4) предполагают наличие на торцах упругого цилиндра мембран, абсолютно жестких из своей плоскости и жестко связанных с упругим телом в радиальном направлении (Г3) или допускают взаимное касательное проскальзывание (Г4).

Таким образом, уравнения для оболочек (1.6, 1.8) и для заполнителя (1.9), граничные условия на торцах оболочек (1.7) и заполнителя (2.6), условий сопряжения оболочек с заполнителем (2.3 и 2.4) и условия на внутренней поверхности канала заполнителя (2.5) полностью описывают задачу осесимметричного взаимодействия сплошного упругого цилиндра с цилиндрической оболочкой (упругого цилиндра с каналом – с оболочками).

3. Конечные интегральные преобразования Ханкеля. При решении задач осесимметричного взаимодействия цилиндрической оболочки с цилиндрическим упругим телом будем использовать конечные интегральные преобразования Ханкеля [4]:

$$\overline{W}_s(p,\xi,t) = \int_{r_0}^{1} rW_s(r,\xi,t)B_1(pr)dr, \quad \overline{U}_s(p,\xi,t) = \int_{r_0}^{1} rU_s(r,\xi,t)B_0(pr)dr \qquad (3.1)$$

$B_i(pr) = J_i(pr)$ при $r_0 = 0$, $B_i(pr) = J_i(pr)Y_1(pr_0) - J_1(pr_0)Y_i(pr)$ при $0 < r_0 < 1$

где J_i, Y_i – функции Бесселя 1 и 2 рода ($i = 0, 1$) соответственно; p – положительный корень уравнения $B_1(p) = 0$.

Для получения выражений перехода от изображений к их оригиналам используем разложение перемещений W_s и U_s для сплошного цилиндра ($r_0 = 0$) в ряд по функциям Бесселя при фиксированных t, ξ

$$W_s = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_1(p_m r), \quad U_s = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_0(p_m r) \qquad (3.2)$$

Полагая, что указанные разложения существуют и допускают почленное интегрирование, умножим правые и левые части (3.2) на $rJ_i(p_m r)$ ($i = 1, 0$) и затем проинтегрируем

$$\int_0^1 rJ_1(p_k r)W_s dr = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^1 rJ_1(p_m r)J_1(p_k r)dr \qquad (3.3)$$

Привлечем условие ортогональности функций Бесселя

$$\int_0^1 rJ_n(\lambda r)J_n(\mu r)dr = 0 \quad (\lambda \neq \mu) \qquad (3.4)$$

и условие

$$\mu J_n(\lambda)J_n^r(\mu) - \lambda J_n(\mu)J_n^r(\lambda) = 0 \qquad (3.5)$$

Условие (3.5) справедливо в следующих случаях: λ, μ – различные корни уравнения $J_n^r(p) = 0$. Можно показать, что если p является корнем уравнения $J_1(p) = 0$, то p является корнем уравнения $J_1^r(p) = 0$. Используя условие ортогональности (3.4) и вычисляя интегралы (3.3), можно получить выражения для коэффициентов разложения a_m и b_m. Аналогичное преобразование проводится для полого заполнителя.

С учетом выражений для коэффициентов разложения формулы перехода от изображений перемещений к их оригиналам примут вид

$$W_s = \sum_{m=1}^{\infty} B(p_m)B_1(p_m r)\overline{W}_s, \quad U_s = 2r_1\int_{r_0}^{1} rU_s dr + \sum_{m=1}^{\infty} B(p_m)B_0(p_m r)\overline{U}_s$$

$$B(p_m) = 2J_0^2(p_m) \text{ при } r_0 = 0, \quad B(p_m) = 1/2(\pi p_m)^2(J_{pr}^2 - 1)^{-1} \text{ при } 0 < r_0 < 1 \qquad (3.6)$$

$$J_{pr} = J_1(p_m r_0)J_1^{-1}(p_m); \quad r_1 = (1 - r_0^2)^{-1}$$

Корни уравнения $J_1(p) = 0$ вычисляются по следующей формуле:

$$p_m = \beta_m - \frac{0.375}{\beta_m} + \frac{0.0234375}{\beta_m^3} - \frac{0.02302734}{\beta_m^5} + \frac{1.70131923}{\beta_m^7} - \ldots, \quad \beta_m = \pi\left(\frac{1}{4} + m\right) \quad (3.7)$$

При $m > 10$ корни уравнения можно вычислять по формуле

$$p_m = \pi(1/4 + m) \quad (3.8)$$

Для полого цилиндра корни уравнения $J_1(p_m r)Y_1(p_m r_0) - J_1(p_m r_0)Y_1(p_m r) = 0$ приближенно равны

$$p_m = m\pi r_1 \quad (3.9)$$

При вычислениях удобно пользоваться выражением

$$J_1(p_m)J_1^{-1}(p_m r_0) = (-1)^m \sqrt{r_0} \quad (3.10)$$

4. Преобразования уравнений Ламе. Решения уравнений Ламе (2.1) будем искать в следующем виде:

$$W_s(r, \xi, t) = U_r(r, \xi)\sin(\omega t), \quad U_s(r, \xi, t) = U_\xi(r, \xi)\sin(\omega t) \quad (4.1)$$

где ω – круговая частота собственных колебаний.

Подставим в систему (2.1) выражения (4.1) и умножим первое уравнение системы на $rB_1(pr)$, второе уравнение – на $rB_0(pr)$, и проинтегрируем от r_0 до 1. В результате преобразования уравнения Ламе сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\bar{U}_r)^{\xi\xi} - p\alpha_2(\bar{U}_\xi)^{\xi} - (pb)^2\alpha_1\bar{U}_r = \alpha_1 F_r$$

$$\alpha_1(\bar{U}_\xi)^{\xi\xi} + p\alpha_2(\bar{U}_r)^{\xi} - (pa)^2\bar{U}_\xi = -\alpha_3 p^{-1} F_r^{\xi} + \alpha_6 F_s^{-1} F_\xi \quad (4.2)$$

$$\alpha^2 = 1 + \alpha_6(\theta_s p^{-1})^2, \quad b^2 = 1 - \alpha_6\alpha_1^{-1}(\theta_s p^{-1})^2, \quad \theta_s^2 = \rho_s R^2\omega^2 E_s^{-1}$$

Для полого заполнителя имеем

$$F_r = -2\alpha_1\pi^{-1}(J_{pr}U_r(1, \xi)) - U_r(r_0, \xi)),$$

$$F_\xi = 2(\pi p\sin(\omega t))^{-1}R(J_{pr}\tau_{r\xi}(1, \xi) - \tau_{r\xi}(r_0, \xi))$$

В случае сплошного заполнителя получим

$$F_r = pJ_0(p)U_r(1, \xi), \quad F_\xi = -(\sin(\omega t))^{-1}\tau_{r\xi}(1, \xi)RJ_0(p)$$

Применив к выражениям (2.6) преобразования вида (3.1), получим граничные условия в изображениях перемещений

$$\text{Г1: } \bar{U}_r = 0, \quad p\bar{U}_r + \alpha_5(\bar{U}_\xi)^{\xi} = -B_0(p)U_r(1, \xi) + r_0 B_0(pr_0)U_r(r_0, \xi)$$

$$\text{Г2: } (\bar{U}_r)^{\xi} - p\bar{U}_\xi = 0, \quad p\bar{U}_r + \alpha_5(\bar{U}_\xi)^{\xi} = -B_0(p)U_r(1, \xi) + r_0 B_0(pr_0)U_r(r_0, \xi) \quad (4.3)$$

$$\text{Г3: } \bar{U}_r = 0, \quad \bar{U}_\xi = 0, \quad \text{Г4: } (\bar{U}_r)^{\xi} - p\bar{U}_\xi = 0, \quad \bar{U}_\xi = 0$$

5. Решение уравнений Ламе. Решение (4.1) можно представить в виде суммы общих $\overline{U}_{r0}$, $\overline{U}_{\xi 0}$ и частных $\overline{U}_{rl}$, $\overline{U}_{\xi 1}$ решений

$$\overline{U}_r = \overline{U}_{r0} + \overline{U}_{r1}, \quad \overline{U}_\xi = \overline{U}_{\xi 0} + \overline{U}_{\xi 1} \tag{5.1}$$

Радиальные прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности оболочки при этом представим в виде тригонометрических рядов по длине

$$W_0^{(i)} = W^{(i)}(\xi)\sin(\omega t), \quad U_0^{(i)} = U^{(i)}(\xi)\sin(\omega t) \tag{5.2}$$

в которых для $W^{(i)}(\xi)$ и $U^{(i)}(\xi)$ примем выражения в форме рядов по осевой координате ξ

$$\begin{gathered} W^{(1)}(\xi) = (1-r_0^2)\sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(1)}\sin(\beta_n\xi), \quad W^{(2)}(\xi) = (r_0^2-1)r_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(2)}\sin(\beta_n\xi) \\ U^{(1)}(\xi) = (1-r_0^2)\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(1)}\cos(\beta_n\xi), \quad U^{(2)}(\xi) = (r_0^2-1)r_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(2)}\cos(\beta_n\xi) \end{gathered} \tag{5.3}$$

Такое представление перемещений в задачах устойчивости и колебаний при учете осевого сжатия не вызывает вычислительных трудностей, так как в них краевой эффект несущественен. В задачах, в которых краевой эффект существенен, например, в задаче колебаний при отсутствии сжатия, необходимо применять другую форму представления перемещений.

Используя (5.2) и (5.3), из второго уравнения системы (1.8) с учетом (2.3) получим выражения для касательных напряжений

$$\begin{gathered} \tau_{r\xi}(r^{(i)}, \xi, t) = (\delta_2^{(i)})^{-1}\sin(\omega t)(\psi^{(i)}((U^{(i)})^{\xi\xi} + \nu_2(W^{(i)})^{\xi}) \\ \psi^{(i)} = 1-(1-\nu_1^{(i)}\nu_2^{(i)})(\theta_0^{(i)}\beta_n^{-1})^2, \quad (\theta_0^{(i)})^2 = \rho_0^{(i)}(R^{(i)}\omega)^2(E_1^{(i)})^{-1} \quad (i = 1; 2) \end{gathered} \tag{5.4}$$

В выражениях (5.4) и в дальнейшем аргумент ξ при перемещениях $W^{(i)}(\xi)$ и $U^{(i)}(\xi)$ опускаем. С учетом (4.1) для перемещений в заполнителе, (5.2) и (5.3) для перемещений в срединной поверхности оболочки и (5.4) для касательных напряжений на цилиндрических поверхностях заполнителя частные решения $\overline{U}_{rl}$, $\overline{U}_{\xi 1}$ системы уравнений (4.2) примут вид

$$\overline{U}_{r1} = \sum_{i=1}^{i=2}(-1)^{i+1}((U_{r1}^{(i)} - \nu_2^{(i)}U_{r2}^{(i)})W^{(i)}\beta_n^{-2} - \beta_n^{-2}\psi^{(i)}U_{r2}^{(i)}(U^{(i)})^{\xi}) \tag{5.5}$$

$$\overline{U}_{\xi 1} = \sum_{i=1}^{i=2}(-1)^{i+1}((U_{\xi 1}^{(i)} - \nu_2^{(i)}U_{\xi 2}^{(i)})(W^{(i)})^{\xi}\beta_n^{-2} + \psi^{(i)}U_{\xi 2}^{(i)}U^{(i)})$$

$$U_{r2}^{(i)} = (1-\nu_s)^{-1}\psi_1^{(i)}\bar{f}_{r1i}, \quad U_{\xi 1}^{(i)} = (1-\nu_s)^{-1}\alpha_\beta^2\beta^2\bar{f}_{\xi 1i} - \bar{f}_{\xi 2i}$$

$$U_{\xi 2}^{(i)} = \psi_1^{(i)}((1-\nu_s)^{-1}\alpha_\beta^2\bar{f}_{\xi 1i} - 2\bar{f}_{\xi 2i}), \quad \bar{f}_{r11} = \frac{2}{\pi}J_{pr}\Psi_{na}\Psi_{nb}, \quad \bar{f}_{r12} = \frac{2}{\pi}\Psi_{na}\Psi_{nb}$$

$$\bar{f}_{r21} = \frac{2}{\pi}J_{pr}\Psi_{nb}, \quad \bar{f}_{r22} = \frac{2}{\pi}\Psi_{nb}, \quad \bar{f}_{\xi 11} = \frac{1}{p}\bar{f}_{r11}, \quad \bar{f}_{\xi 21} = \frac{1}{p}\bar{f}_{r21}$$

$$\bar{f}_{\xi 12} = \frac{1}{p}\bar{f}_{r12}, \quad \bar{f}_{\xi 22} = \frac{1}{p}\bar{f}_{r22}$$

$$\alpha_\beta^2 = 1 - 2(1+\nu_s)\theta_s^2\beta_n^{-2}, \quad \psi_1^{(i)} = E_1^{(i)}h^{(i)}(1+\nu_s)(r^{(i)}E_sR^{(i)}(1-\nu_1^{(i)}\nu_2^{(i)}))^{-1}$$

$$\psi_{na} = (1+c_{na}^2)^{-1}, \quad \psi_{nb} = (1+c_{nb}^2)^{-1}, \quad c_{na} = pa\beta_n^{-1}, \quad c_{nb} = pb\beta_n^{-1}$$

При пренебрежении в исходных уравнениях (1.8) и (2.1) инерционными членами в выражениях (5.5) получаем:

$$a = b = \alpha_\beta = 1, \quad \psi_{na} = \beta_{nb} = \psi_n, \quad \psi_1^{(i)} = 1, \quad c_{na} = c_{nb} = c_n,$$

$$\bar{r} = C_sL(\pi^2FL_s)^{-1}, \quad c_n = p\beta_n^{-1}$$

Общие решения $\bar{U}_{r0}$ и $\bar{U}_{\xi 0}$ системы уравнений (4.2) записываются в виде выражений

$$\begin{aligned} \bar{U}_{r0} &= C_1\operatorname{ch}(pa\xi) + C_2\operatorname{sh}(pa\xi) + C_3\operatorname{ch}(pb\xi) + C_4\operatorname{sh}(pb\xi) \\ \bar{U}_{\xi 0} &= -C_1a^{-1}\operatorname{sh}(pa\xi) - C_2a^{-1}\operatorname{ch}(pa\xi) - C_3b\operatorname{sh}(pb\xi) - C_4b\operatorname{ch}(pb\xi) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Полагая $\theta_s = 0$ общее решение системы уравнений (4.2) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{r0} &= (C_1 + C_2\xi)\operatorname{sh}(p\xi) + (C_3 + C_4\xi)\operatorname{ch}(p\xi) \\ \bar{U}_{\xi 0} &= -C_1\operatorname{ch}(p\xi h + C_2((3-4\nu_s)p^{-1}\operatorname{sh}(p\xi h - \xi\operatorname{ch}(p\xi)) - \\ &- C_3\operatorname{sh}(p\xi h + C_4((3-4\nu_s)p^{-1}\operatorname{ch}(p\xi h - \xi\operatorname{sh}(p\xi)) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Для нахождения постоянных интегрирования $C_1 \ldots C_4$ в решениях (5.6) и (5.7) используем граничные условия (4.3), записанные в изображениях перемещений. Подставляя в (4.3) выражения (5.3) и выражения (5.1) с учетом (5.5) и (5.6) или (5.7), получим системы алгебраических уравнений четвертого порядка для определения постоянных интегрирования.

6. Радиальные напряжения. После определения постоянных интегрирования $C_1, \ldots, C_4$, выполнения обратного перехода от изображений к оригиналам, можно получить выражения для радиальных напряжений на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях заполнителя. С целью сокращения записи приведем выражения только для радиального напряжения на внешней поверхности сплошного заполнителя

$$\sigma_{rr}(1,\xi,t) = (\tilde{\sigma}_{rr}(1,\xi) + \sigma_{rr}^{(1)}(1,\xi) + \sigma_{rr}^{0}(1,\xi))\sin(\omega t) \tag{5.8}$$

Компоненты радиального напряжения имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{rr}(1,\xi) = K_0(\tilde{\sigma}_1^{(1)} - \nu_1^{(1)}\tilde{\sigma}_2^{(1)})W^{(1)} - K_0\tilde{\sigma}_2^{(1)}\psi_1^{(1)}(U^{(1)})^{\xi}, \quad \tilde{\sigma}_1^{(1)} = (1-\alpha_{\beta 2}^2)\tilde{\psi}_n$$

$$\tilde{\sigma}_2^{(1)} = 2\nu_s(1+\nu_s)^{-1}\psi_1\tilde{\psi}_n \quad \tilde{\psi}_n = (1-(\tilde{k}\beta_n^{-1})^2)^{-1}$$

$$\tilde{k} = ((1+\nu_s)(1-2\nu_s)(1-\nu_s)^{-1}\theta_s^2)^{0.5}$$

$$K_0 = E_s(R^{(1)}(1-\nu_s))^{-1}, \quad \alpha_{\beta 2}^2 = 1-(\theta_s\beta_n^{-1})^2$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(1,\xi) = K_0(\sigma_1^{(1)} - \nu_2^{(1)}\sigma_2^{(1)})W^{(1)} - K_0\sigma_2^{(1)}\psi_1^{(1)}(U^{(1)})^{\xi}$$

$$\sigma_{rr}^0(1,\xi) = K_0\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{-1}(\sigma_3^{(1)}-\nu_2^{(1)}\sigma_4^{(1)})W_n^{(1)} + K_0\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_4^{(1)}\psi_1^{(1)}U_n^{(1)}$$

$$\sigma_1^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}(\alpha_\beta^2 f_{\sigma 1} - (1-\nu_2^2)(1-\alpha_{\beta 1}^2)f_{\sigma 2})$$

$$\sigma_2^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}\psi_1^{(1)}(\alpha_\beta^2 f_{\sigma 1} - (1-\nu_2)f_{\sigma 2})$$

$$f_{\sigma 1} = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{na}\psi_{nb},\quad f_{\sigma 2} = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{nb}$$

$$\Gamma 1:\ \sigma_3^{(1)} = \sigma_4^{(1)} = 0$$

$$\Gamma 2:\ \sigma_3^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}\alpha_{\beta 1}^2 f_{\sigma 3},\quad \sigma_4^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}\psi_1^{(1)}(\alpha_\beta^2 f_{\sigma 3} - (1-\nu_s)f_{\sigma 4})$$

$$\Gamma 3:\ \sigma_3^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}(\alpha_\beta^2 f_{\sigma 3} - (1-\nu_s)f_{\sigma 4} - f_{\sigma 0}^{(1)})$$

$$\sigma_4^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}\psi_1^{(1)}(\alpha_\beta^2 f_{\sigma 3} - 2(1-\nu_s)f_{\sigma 4} + f_{\sigma 0}^{(2)})$$

$$\Gamma 4:\ \sigma_3^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}(\alpha_{\beta 1}^2 f_{\sigma 3} - (1-\alpha_{\beta 1}^2)f_{\sigma 5} + (1-\nu_s)f_{\sigma 6} - f_{\sigma 0}^{(1)})$$

$$\alpha_4^{(1)} = 2(1+\nu_s)^{-1}\psi_1^{(1)}(\alpha_{\beta 1}^2 f_{\sigma 3} - (1-\nu_s)f_{\sigma 4} + (1-\alpha_{\beta 1}^2)f_{\sigma 5} + (1-\nu_s)f_{\sigma 6} - f_{\sigma 0}^{(2)})$$

$$f_{\sigma 3} = \sum_{m=1}^{\infty}p_m\varphi_3\varphi\psi_{na}\psi_{nb},\quad f_{\sigma 4} = \sum_{m=1}^{\infty}p_m\varphi_3\varphi\psi_{nb},\quad f_{\sigma 5} = \sum_{m=1}^{\infty}p_m\varphi_{31}\varphi\psi_{na}\psi_{nb}$$

$$f_{\sigma 6} = \sum_{m=1}^{\infty}p_m\varphi_{31}\varphi\psi_{nb},\quad \alpha_{\beta 1}^2 = 1-(1-\nu_s)(\theta_s\beta_n^{-1})^2,\quad f_{\sigma 0}^{(1)} = \nu_s^2(1-2\nu_s)^{-1}\tilde{\psi}_n f_{\sigma 0}$$

$$f_{\sigma 0}^{(2)} = \nu_s\tilde{\psi}_n f_{\sigma 0},\quad f_{\sigma 0} = \tilde{k}(\sin(\tilde{k}l))((-1)^n\cos(\tilde{k}l) - \cos\tilde{k}(l-\xi))$$

Функции φ_3, φ_{31} и φ в зависимости от граничных условий на торцах заполнителя имеют вид

$$\Gamma 2:\ \varphi_3 = k^2\Phi_1\operatorname{sh}(pbl) - abk^{-2}\Phi_6\Phi_7 - k_1^2\Phi_3\Phi_9 + abk_1^{-4}\Phi_4\operatorname{sh}(pal)$$

$$\varphi = b^{-1}(2(1-\operatorname{ch}(pal)\operatorname{ch}(pbl)) + (abk^{-4} + k^4(ab)^{-1})\operatorname{sh}(pal)\operatorname{sh}(pbl))^{-1}$$

$$\Gamma 3:\ \varphi_3 = \Phi_1\operatorname{sh}(pbl) - ab\Phi_6\Phi_7 - k_1^2\Phi_3\Phi_9 + abk_1^2\Phi_4\operatorname{sh}(pal)$$

$$\varphi = b^{-1}(2(1-\operatorname{ch}(pal)\operatorname{ch}(pbl)) + (ab + (ab)^{-1})\operatorname{sh}(pal)\operatorname{sh}(pbl))^{-1}$$

$$\Gamma 4:\ \varphi_3 = (k^2-1)k_1^2\Phi_1\operatorname{sh}(pal),\quad \varphi = b^{-1}(k^2-1)^{-1}(\operatorname{sh}(pal)\operatorname{sh}(pbl))^{-1}$$

$$k^2 = 1-(1+\nu_s)(\theta_s p^{-1})^2,\quad k_1^2 = 1-(1+\nu_s)(1-\nu_s)^{-1}\nu_s(\theta_s p^{-1})^2$$

$$\varphi_{31} = ab\Phi_1 \operatorname{sh}(pbl) - kk_1^2\Phi_4 \operatorname{sh}(pal)$$

Функции Φ_1, Φ_3, Φ_4, Φ_6, Φ_7, Φ_9 запишем в виде выражений

$$\Phi_1 = (-1)^n \operatorname{ch}(pa\xi) - \operatorname{ch}(pa(l-\xi)), \quad \Phi_3 = \operatorname{ch}(pal) - (-1)^n$$

$$\Phi_4 = (-1)^n \operatorname{ch}(pb\xi) - \operatorname{ch}(pb(l-\xi)), \quad \Phi_6 = \operatorname{ch}(pbl) - (-1)^n$$

$$\Phi_7 = (-1)^n \operatorname{sh}(pa\xi) - \operatorname{sh}(pa(l-\xi)), \quad \Phi_9 = (-1)^n \operatorname{sh}(pb\xi) - \operatorname{sh}(pb(l-\xi))$$

Пренебрегая инерционными членами в уравнениях (1.8) и (2.1) для выражений (5.8) будем иметь

$$a = b = \alpha_\beta = \alpha_{\beta 1} = \alpha_{\beta 2} = 1, \quad \psi_{na} = \psi_{nb} = \psi_n, \quad \psi_1^{(i)} = 1, \quad c_{na} = c_{nb} = c_n,$$

$$\psi_n = (1 + c_n^2)^{-1}$$

$$c_n = p\beta_n^{-1}, \quad \tilde{\psi}_n = 1$$

Функции φ_3, φ_{31} и φ в зависимости от граничных условий на торцах заполнителя имеют вид:

$$\text{Г2: } \varphi_3 = 2\Phi_1 + p\xi\Phi_2 - (-1)^n pl \operatorname{sh}(p\xi), \quad \varphi = (\operatorname{sh}(pl) - (-1)^n pl)^{-1}$$

$$\text{Г3: } \varphi_3 = 2\nu_s\Phi_1 - p\xi\Phi_2 + (-1)^n pl \operatorname{sh}(p\xi), \quad \varphi = ((3 - 4\nu_s)\operatorname{sh}(pl) + (-1)^n pl)^{-1}$$

$$\text{Г4: } \varphi_3 = 2(1 - \nu_s)\Phi_1, \quad \varphi_{31} = \Phi_1 + p\xi\Phi_2 + (-1)^n \Phi_3 pl \operatorname{sh}(p\xi)$$

$$\varphi = (2(1 - \nu_s)\operatorname{sh}(pl))^{-1}$$

Функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 запишем в виде выражений

$$\Phi_1 = (-1)^n \operatorname{ch}(p\xi) - \operatorname{ch}(p(l-\xi)), \quad \Phi_2 = (-1)^n \operatorname{sh}(p\xi) + \operatorname{sh}(p(l-\xi))$$

$$\Phi_3 = ((-1)^n - \operatorname{ch}(pl))(\operatorname{sh}(pl))^{-1}$$

7. Устойчивость цилиндрической оболочки. Уравнения устойчивости (1.8) цилиндрической оболочки с учетом второго и третьего из условий (2.3) можно записать в следующем виде, опустив верхние индексы (1):

$$\varepsilon W^{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon_1 \lambda W^{\xi\xi} + \delta W + \nu_2 U^\xi + \delta_1 \sigma_{rr}(1, \xi) = 0, \quad U^{\xi\xi} + \nu_2 W^\xi - \delta_1 \tau_{r\xi}(1, \xi) = 0 \quad (7.1)$$

где обозначения приняты аналогично уравнениям (1.6), а для радиального напряжения – (5.8).

Применяя к первому уравнению системы (7.1) и к третьему условию (2.3) процедуру Бубнова – Галеркина, получим для коэффициентов разложения W_n и U_n две системы бесконечных линейных однородных алгебраических уравнений

$$A_{k1}W_k + B_{k1}U_k + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn1}W_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{kn1}U_n = 0$$
$$A_{k2}W_k + B_{k2}U_k + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn2}W_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{kn2}U_n = 0 \qquad (7.2)$$

$$A_{k1} = A_{k1}^1 - \lambda\varepsilon_1\beta_k^2, \quad A_{k1}^1 = \varepsilon\beta_k^4 + \delta + F_1 - \nu_1 F_2, \quad B_{k1} = \beta_k(-\nu_2 + F_2)$$

$$A_{k2} = \beta_k^{-1}((F_2 + \nu_2 F_5) - h(2R)^{-1}\beta_k^2), \quad B_{k2} = -F_5 - 1$$

$$A_{kn1} = -8(1+\nu_s)^{-1}(\beta_k\beta_n l)^{-1}(F_3 - \nu_2 F_4), \quad B_{kn1} = -8(1+\nu_s)^{-1}(\beta_k l)^{-1}F_4$$

$$A_{kn2} = 8(\beta_k^2\beta_n l)^{-1}(F_6 - \nu_2 F_7), \quad B_{kn2} = 8(\beta_k^2 l)^{-1}F_7$$

$$F_1 = \psi_2(1 + 2(1+\nu_s)^{-1}f_{k1}), \quad F_2 = 2(1-\nu_s)^{-1}(\nu_s + f_{k1} - (1-\nu_s)f_{k2}), \quad f_{k1} = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_k^2$$

$$F_5 = 2(1-\nu_s)^{-1}\psi_1((1-2\nu_s) - f_{k1} + 2(1-\nu_s)f_{k2}), \quad f_{k2} = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_k$$

$$\psi_2 = (1-\nu_1\nu_2)E_sR((1-\nu_s)E_1h)^{-1}\psi_k = (1+c_k^2)^{-1}, \quad c_k = p\beta_k^{-1}, \quad \beta_k = k\pi l^{-1}$$

$$\psi_1 = E_1h(1+\nu_s)(E_sR(1-\nu_1\nu_2))^{-1}$$

Для каждого из граничных условий Г2, Г3, Г4 имеем

Г2: $F_3 = \psi_2 f_{22}, \quad F_4 = (1+\nu_s)(1-\nu_s)^{-1}(f_{22} - (1-\nu_s)f_{12})$

$$F_6 = f_{21} - (1-\nu_s)^{-1}f_{22}$$

$$F_7 = \psi_1(f_{21} - (1-\nu_s)^{-1}f_{22} - (1-\nu_s)f_{11} + f_{12})$$

Г3: $F_3 = -\psi_2(f_{22} - (1-\nu_s)f_{12} - (1-\nu_s)f_{21} + (1-\nu_s)^2 f_{11} - 0.5\nu_s^2(1-2\nu_s)^{-1}f_0)$

$$F_4 = -(1+\nu_s)(1-\nu_s)^{-1}(f_{22} - (1-\nu_s)f_{21} - 2(1-\nu_s)f_{12} + 2(1-\nu_s)^2 f_{11} - 0.5\nu_s f_0)$$

$$F_6 = -(2f_{21} - (1-\nu_s)^{-1}f_{22} - 2(1-\nu_s)f_{11} + f_{12} - 0.5(1-\nu_s)^{-1}\nu_s f_0)$$

$$F_7 = -\psi_1(2f_{21} - (1-\nu_s)^{-1}f_{22} - 4(1-\nu_s)f_{11} + 2f_{12} + 0.5(1-\nu_s)^{-1}(1-2\nu_s)f_0)$$

Г4: $F_3 = (1-\nu_s)\psi_2(f_{21} + f_{12} - 0.5f_5 + 0.5\nu_s^2(1-2\nu_s)^{-1}(1-\nu_s)^{-1}f_0)$

$$F_4 = (1+\nu_s)(f_{21} - (1-\nu_s)f_{11} + f_{12} - 0.5f_5 - 0.5\nu_s(1-\nu_s)^{-1}f_0)$$

$$F_6 = -(f_{21} + f_{12} - (1-\nu_s)f_{11} - 0.5f_5 - 0.5\nu_s(1-\nu_s)^{-1}f_0)$$

$$F_7 = -\psi_1(-f_{21} - f_{12} + 2(1-\nu_s)f_{11} + 0.5f_5 - 0.5(1-\nu_s)^{-1}(1-2\nu_s)f_0)$$

$$f_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} p\varphi_4\phi\psi_n\psi_k, \quad f_{12} = \psi_k f_{11}, \quad f_{21} = \psi_n f_{11}, \quad f_{22} = \psi_n\psi_k f_{11}, \quad f_5 = \varphi_5 f_{11}$$

$$f_0 = (1-(-1)^n)(1-(-1)^k)l^{-1}$$

$$\varphi_4 = ((-1)^n+(-1)^k)((-1)^k \mathrm{ch}(pl)-1), \quad \varphi_5 = (1-(-1)^k(pl)\mathrm{sh}(pl))^{-1}$$

Системы уравнений (7.2) запишем в матричном виде

$$\mathbf{AW}+\mathbf{BU} = 0, \quad \mathbf{CW}+\mathbf{DU} = 0 \tag{7.3}$$

где **W**, **U** – векторы столбцы неизвестных; **A**, **B**, **C**, **D** – матрицы, элементы которых определяются выражениями $A_{kn} = \tilde{A}_{kn} - \varepsilon_1\lambda\beta_k^2\delta_{kn}$, $\tilde{A}_{kn} = A_{k1}^1\delta_{kn}+A_{kn1}$, $B_{kn} = B_{k1}\delta_{kn}+B_{kn1}$, $C_{kn} = A_{k2}\delta_{kn}+A_{kn2}$, $D_{kn} = B_{k2}\delta_{kn}+B_{kn2}$; δ_{kn} – символ Кронекера.

Приведем систему уравнений (7.3) к одному уравнению

$$\mathbf{K}-\mathbf{E}\lambda = 0, \quad K = (\tilde{A}-BD^{-1}C)(\varepsilon_1\beta_k^2)^{-1} \tag{7.4}$$

где **E** – единичная матрица, $\mathbf{D}^{-1}$ – матрица, обратная матрице **D**.

При вычислении элементов матриц **A**, **B**, **C**, **D** производится их усечение вокруг диагонального члена, номер которого равен числу волн, образующихся при потере устойчивости оболочки, скрепленной с упругим заполнителем, на торцах которого выполняются граничные условия (Г1). В результате этого образуются матрицы, крайние диагональные элементы которой имеют вид (например, для матрицы А):

$$\left\| \begin{matrix} A_{n-m,\,n-m} & \cdots\cdots & A_{n-m,\,n+m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & A_{n,\,n} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{n+m,\,n-m} & \cdots\cdots & A_{n+m,\,n+m} \end{matrix} \right\|$$

где n – число волн, образующихся при потере устойчивости оболочки, скрепленной с упругим заполнителем, на торцах которого выполняются граничные условия (Г1); $m = 5.....10$, число, определяемое точностью счета.

Критическое усилие λ определяется как наименьшее собственное число матрицы **K**.

Рассмотрим частный случай, когда не учитывается касательное взаимодействие между оболочкой и заполнителем. В этом случае выражения для перемещений в заполнителе примут вид

$$\begin{aligned} U_r &= (r+U_{r1})W + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{-1}U_{r3}W_n \\ U_\xi &= \beta_n^{-2}U_{\xi 1}W^\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{-1}U_{r3}W_n + 2\alpha_4\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{-1}(\cos(\beta_n\xi)+f_{\xi 0})W_n \end{aligned} \tag{7.5}$$

Для радиального напряжения в этом случае получим

$$\sigma_{rr}(1,\xi) = K_0(1+\sigma_1)W + K_0\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{-1}\sigma_3 W_n \tag{7.6}$$

Уравнения устойчивости оболочки (7.1) в этом случае сводятся к одному уравнению относительно радиального прогиба

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^1 W^{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon_1^1 \lambda W^{\xi\xi} + \delta W + \beta_1^1 \sigma_{rr}(1, \xi) = 0 \\
&\varepsilon^1 = h^2(12R^2(1-\nu_1\nu_2))^{-1}, \quad \varepsilon_1^1 = 2(\delta\varepsilon^1)^{0.5}, \quad \beta_1^1 = R^2(E_1 h)^{-1}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Критические усилия определяются как наименьшее собственное число матрицы, элементы которой можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\tilde{C}_{kn} = (\tilde{A}_{kn}\delta_{kn} + \tilde{B}_{kn})(\beta_{kn}^2 \varepsilon_1^1)^{-1} \\
&\tilde{A}_{kn} = \beta_k^4 \varepsilon^1 + \delta + (1-\nu_1\nu_2)^{-1} F_1, \quad \tilde{B}_{kn} = -8((1+\nu_s)(1-\nu_1\nu_2)l)^{-1}(\beta_k\beta_n)^{-1} F_3
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Для граничных условий (Г1) на торцах заполнителя и при учете касательного взаимодействия между ним и оболочкой критическую нагрузку определим, минимизируя по параметру k следующее выражение:

$$
\lambda = (\varepsilon_1 \beta_k^2)^{-1}(A_{kn}^1 + B_{k1} A_{k2} B_{k2}^{-1})
\tag{7.9}
$$

В случае отсутствия касательного взаимодействия между заполнителем и оболочкой при условиях (Г1) на торцах заполнителя критическая нагрузка определяется минимизацией выражения

$$
\lambda = (\varepsilon_1^1 \beta_k^2)^{-1}(\beta_k^4 \varepsilon^1 + \delta + (1-\nu_1\nu_2)^{-1} F_1)
\tag{7.10}
$$

В случае плоской деформации заполнителя, полагая в выражении (7.6) $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, получим

$$
\sigma_{rr}(1, \xi) = K_0 W
\tag{7.11}
$$

Критическая нагрузка в случае плоской деформации определяется из выражения

$$
\lambda = (1 + \beta_1^1 \delta^{-1} K_0)^{0.5}
\tag{7.12}
$$

8. Результаты расчетов и экспериментов. Численный анализ конкретных задач показывает, что критические нагрузки для граничных условий (Г2) и (Г4) меньше, а для граничных условий (Г3) больше, чем в случае граничных условий (Г1), соответствующих решению для бесконечно длинного заполнителя.

Различие между критическими нагрузками возрастает с уменьшением длины l и с увеличением относительной жесткости заполнителя $E_s E_2^{-1}$. Максимальное различие между критическими нагрузками в исследованном диапазоне изменения жесткости и длины заполнителя составляет для граничных условий (Г2) – 16%, (Г3) – 1.5%, (Г4) – 10%.

С уменьшением коэффициента Пуассона ν_s материала заполнителя величины критических нагрузок для всех видов граничных условий уменьшаются. Это уменьшение составляет 2–3% при изменении ν_s от 0.5 до 0.2, причем влияние изменения величины ν_s на относительное различие между критическими нагрузками при различных граничных условиях не наблюдается.

Различие между критическими нагрузками при граничных условиях (Г1) по сравнению с граничными условиями (Г2) и (Г4) возрастает с уменьшением относительной толщины оболочки. При изменении относительной толщины оболочки от 0.01 до 0.003 это различие возрастает на 4–5% в исследованном диапазоне изменения жесткости и длины

Таблица

N	$h \cdot 10^3$, м	$E_1 \cdot 10^{-9}$, Па	$E_2 \cdot 10^{-9}$, Па	$E_s \cdot 10^{-6}$, Па	ν_s	λ_{cr1}	λ_{cr2}	λ_{exp}
1	0.48	17.45	26.85	43.12	0.34	2.248	2.119	2.08
2	0.45	18.03	27.44	43.12	0.34	2.336	2.119	2.16
3	0.44	18.03	28.12	43.12	0.34	2.351	2.215	2.21
4	0.48	17.64	27.14	43.12	0.34	2.241	2.113	2.09
5	0.47	17.34	26.85	43.12	0.34	2.284	2.152	2.15
6	0.71	17.24	26.36	5.88	0.42	1.118	1.114	0.98
7	0.66	18.03	26.75	5.88	0.42	1.130	1.126	1.06
8	0.66	18.02	28.22	5.88	0.42	1.125	1.121	1.03
9	0.47	15.87	24.30	5.88	0.42	1.234	1.229	1.19
10	0.46	17.15	26.26	5.88	0.42	1.222	1.217	1.09
11	0.44	16.27	24.99	5.88	0.42	1.247	1.242	1.21
12	0.47	16.56	25.28	5.88	0.42	1.224	1.219	1.10

заполнителя. Для граничных условий (Г3) это различие меньше. Можно отметить следующие выводы численного анализа ряда задач. Изменение анизотропии оболочки незначительно влияет на величины относительных различий критических нагрузок при граничных условиях (Г2), (Г3), (Г4) с критическими нагрузками при граничных условиях (Г1).

С уменьшением коэффициента Пуассона от 0.5 до 0.2 в исследованном диапазоне изменения жесткости и длины заполнителя различие между критическими нагрузками, вычисленными с учетом касательного взаимодействия между оболочкой и заполнителем, и критическими нагрузками, вычисленными без его учета, для всех видов граничных условий на торцах заполнителя возрастает до 17%, причем замечено, что изменение относительной длины заполнителя, анизотропии оболочки и ее относительной толщины практически не влияют на относительное расхождение между этими критическими нагрузками.

Экспериментальным исследованиям подвергались стеклопластиковые оболочки диаметром 0.129 м и длиной 0.216 м, заполненные составом на основе пасты У-30 с последующей вулканизацией в специальной печи. Испытания проводились на машине ГМС-50 в приспособлении, обеспечивающем опирание, близкое к шарнирному.

В таблице приведены значения толщин оболочек h, жесткостные характеристики материала оболочек и заполнителя ($\nu_1 = 0.12$), а также значения безразмерных экспериментальных критических усилий λ_{exp} и теоретических, вычисленных для граничных условий (Г1) на торцах заполнителя (λ_{cr1}) с использованием выражений (7.10) и для случая торцов, свободных от напряжений – (Г2) (λ_{cr2}) с использованием выражений (7.8).

Представленные в таблице 1 данные свидетельствуют об удовлетворительных соответствиях результатов расчета критических усилий для оболочек с граничными условиями (Г1) и (Г2) и результатов, полученных экспериментальным путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов В.А.* Обзор литературы по устойчивости оболочек с заполнителем // Тр. семинара по теории оболочек. Казань: Казан. физ.-мат. ин-т АН СССР, 1971. Вып. 2. С. 5–25.
2. *Варвак А.П.* Осесимметричная потеря устойчивости цилиндрических оболочек с заполнителем // Прикл. механика, 1967. Т. 3. Вып. 3. С. 33–41.
3. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
4. *Трантер К.Д.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.

Москва — Поступила в редакцию 31.03.2004